Inferenzmethoden

Einheit 6

Bezüge zu anderen Deduktionsverfahren

1. Semantisch orientierte Verfahren
2. Resolution
3. Maslovs Inverse Methode

Deduktionsverfahren, historisch

- **Mathematisch-logische Kalküle**
  - Natürliches Schließen/Sequenzenkalküle — Gentzen 1935
  - Analytische Tableaux — Beth 1955, Smullyan 1971
- **Semantisch motivierte Verfahren**
  - Semantische Bäume — ca. 1947
  - Modellelimination — Loveland 1969
- **Maschinennah formulierte Verfahren**
  - Resolution — Robinson 1965
  - Maslov-Verfahren (Inverse Methode) — Maslov 1968
  - Extensionsverfahren — Bibel 1981, Andrews 1981
  - Konsolution — Eder 1991
- **Aussagenlogische Reduktionstechniken**
  - Matrixreduktionsverfahren — Prawitz 1960
  - Davis-Putnam Verfahren — Davis & Putnam 1960

⋮ ⋮

Deduktionsverfahren: Vorgehensweise

Unabhängig entstanden, dennoch ähnlich

- **Semantische Bäume**: Erzeuge systematisch alle alternativen Variablen-belegungen und eliminiere Teilmodelle, die eine der Klauseln erfüllen
- **Modellelimination**: Betrachte systematisch alle Klauseln und eliminiere Teilmodelle, welche die Klauselmenge nicht falsifizieren
- **Resolution**: Leite aus zwei Klauseln mit komplementären Literalen eine neue Klausel (Resolvente) ab, die genau dann erfüllbar ist, wenn die beiden Elternklauseln erfüllbar sind
- **Maslov-Verfahren (Inverse Methode)**: Betrachte systematisch alle Klauseln und halte die Bedingungen fest, unter denen alle Klauseln erfüllt wären
- **Extensionsverfahren**: Folge Konnektionen und untersuche Pfade, die noch nicht als komplementär erkannt wurden. Halte unbetrachtete Literale der beteiligten Klauseln auf dem Stack.
- **Aussagenlogische Reduktionstechniken**: Anwendung von Reduktionstechniken und Aufspaltung von Matrizen

EXTENSIONSVERFAHREN ABSTRAHIERT

Gegeben: Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$ mit $c_i = \{L_{i1}, \ldots, L_{im_i}\}$

Menge von Konnektionen $\{k_1, \ldots, k_m\}$ mit $k_j = \{P_{i_j}{}^F, P_{i'_j}{}^T\}$

Start: m_1 Knoten markiert den Literalen der Startklausel

Regeln: **Extension**: Wähle Blattknoten L und Konnektion $k_j = \{L, L_{ik}\}$

(Prädikatenlogische Form: “mit σ instantiierte Konnektion”)

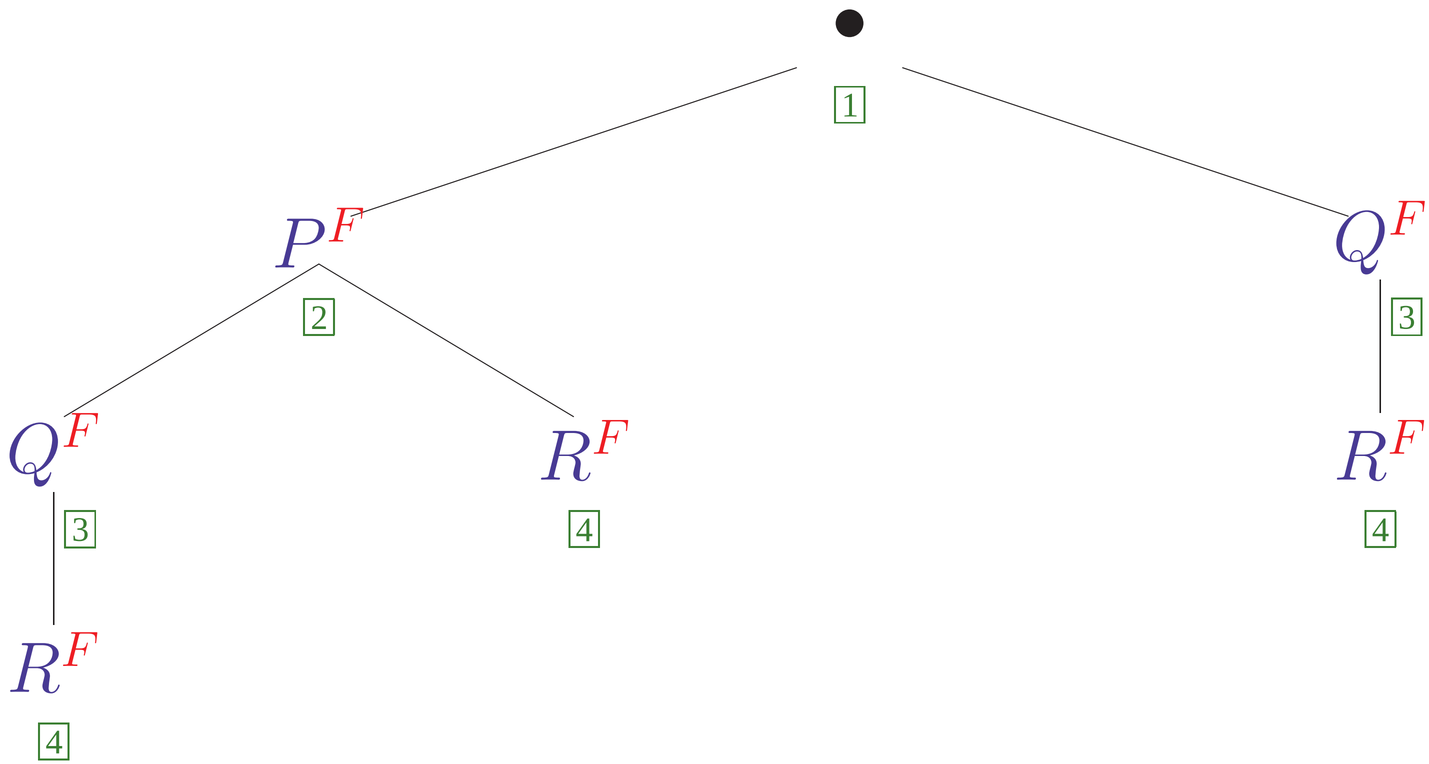
Entferne aus Klausel $c_i = \{L_{i1}, \ldots, L_{im_i}\}$ alle Literale, die zu einem Literal des aktuellen Pfades komplementär. Ergänze die verbleibenden Literale als Nachfolgerknoten von L

Ziel: Alle Knoten haben keine Nachfolger

Rechtfertigung: Knoten codieren Teilpfade, die noch nicht als komplementär nachgeweisen sind. Extension erweitert die Pfade um die nichtkomplementären Literale konnektierbarer Klauseln. Das Verfahren endet, wenn kein Pfad übrigbleibt, der nicht komplementär ist.

Extensionsverfahren für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

$$\{\{P^F, Q^F\}^{\boxed{1}}, \{P^T, Q^F, R^F\}^{\boxed{2}}, \{Q^T, R^F\}^{\boxed{3}}, \{R^T\}^{\boxed{4}}\}$$



Auswahlstrategie hat großen Einfluß auf Größe des Beweises

Extensionsverfahren für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

– alternative Auswahl der Konnektionen –

$$\{\{P^F, Q^F\}^{\boxed{1}}, \{P^T, Q^F, R^F\}^{\boxed{2}}, \{Q^T, R^F\}^{\boxed{3}}, \{R^T\}^{\boxed{4}}\}$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[d, dash, "\boxed{4}"] \\ R^T \arrow[d, dash, "\boxed{3}"] \\ Q^T \arrow[d, dash, "\boxed{2}"] \\ P^T \\ \boxed{1} \end{tikzcd}$$

Modellelimination

Zeige, dass kein Modell eine Formel falsifizieren kann

Beweis für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

1. Um die erste Klausel falsch werden zu lassen, darf P oder Q nicht wahr sein. Wir nehmen an, P sei falsch, und betrachten die weiteren Klauseln
2. Unter der Annahme ist $\neg P$ wahr. Klausel 2 wird trotzdem falsch, wenn zusätzlich Q oder R falsch ist. Wir nehmen an, Q sei falsch.
3. Unter den Annahmen ist $\neg Q$ wahr. Klausel 3 wird trotzdem falsch, wenn zusätzlich R falsch ist.
4. Unter den Annahmen ist $\neg R$ (Klausel 4) wahr. Sie führen also nicht zu einem Gegenmodell und wir müssen weitere Alternativen betrachten.
5. Wenn R wahr wäre, würde Klausel 3 wahr, also müssen wir andere Alternativen betrachten.
6. Wenn Q wahr wäre, würde Klausel 2 wahr – es sei denn, R wäre falsch. Dann aber wird Klausel 4 wahr. Somit gibt es kein Gegenmodell, in dem P falsch ist.

$\vdots$ $\vdots$

Extensionsverfahren ist maschinennahe Modellelimination

Semantische Bäume
Erzeuge Modelle, bis alle eine der Klauseln erfüllen

Beweis für $\boldsymbol{P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R}$

1. Es gilt entweder R oder $\neg R$.
2. Da $\neg R$ die 4. Klausel erfüllt, müssen wir nur den ersten Fall betrachten
3. Im Fall R wissen wir, daß auch Q oder $\neg Q$ gilt. Da R und $\neg Q$ die 3. Klausel erfüllt, müssen wir nur noch den ersten betrachten.
4. Wir unterscheiden nun P oder $\neg P$.
5. Im ersten Fall haben wir P, Q (und R), also ist die 1. Klausel erfüllt
6. Im zweiten Fall haben wir $\neg P$, Q und R, also ist die 2. Klausel erfüllt
7. Damit erfüllt jede Alternative mindestens eine der 4 Klauseln (Keine Alternative kann alle 4 Klauseln falsifizieren)

Duale Form der Modellelimination

Semantische Bäume in Matrix-Denkweise

Gegeben: Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$ mit $c_i = \{L_{i1}, \ldots, L_{im_i}\}$

Menge von Konnektionen $\{k_1, \ldots, k_m\}$ mit $k_j = \{P_{i_j}{}^F, P_{i'_j}{}^T\}$

Start: Ein Knoten markiert mit der Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$

Regeln: Wähle Konnektion $k_j = \{P_{i_j}{}^F, P_{i'_j}{}^T\}$.

Generiere zwei Nachfolger, markiert mit $P_{i_j}{}^F$ und $P_{i'_j}{}^T$

Ziel: Alle Äste abgeschlossen (enthalten eine Klausel der Matrix)

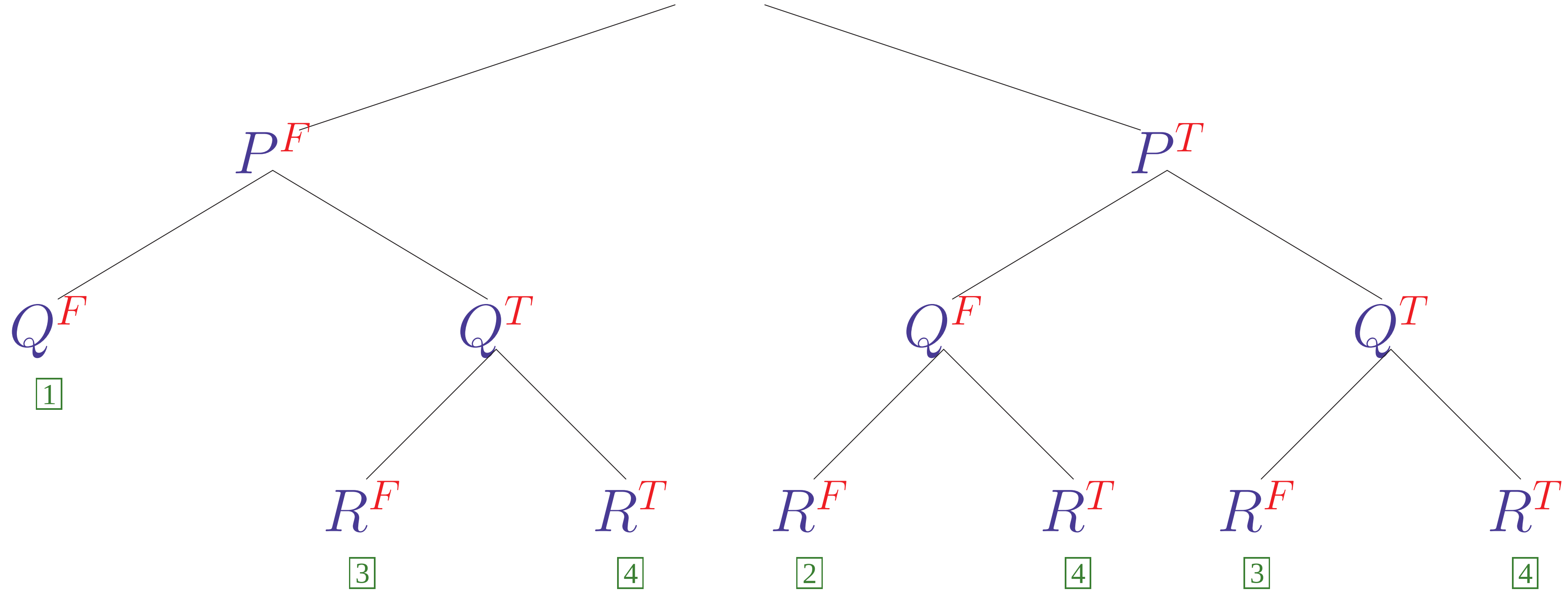
Rechtfertigung: Jeder Ast beschreibt ein oder mehrere mögliche Modelle.

Jedes Modell muß eine der Klauseln erfüllen.

Gut für Klausel-Normalform, aber schwer zu verallgemeinern

Semantischer Baum für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

$$\{\{P^F, Q^F\}\boxed{1}, \{P^T, Q^F, R^F\}\boxed{2}, \{Q^T, R^F\}\boxed{3}, \{R^T\}\boxed{4}\}$$

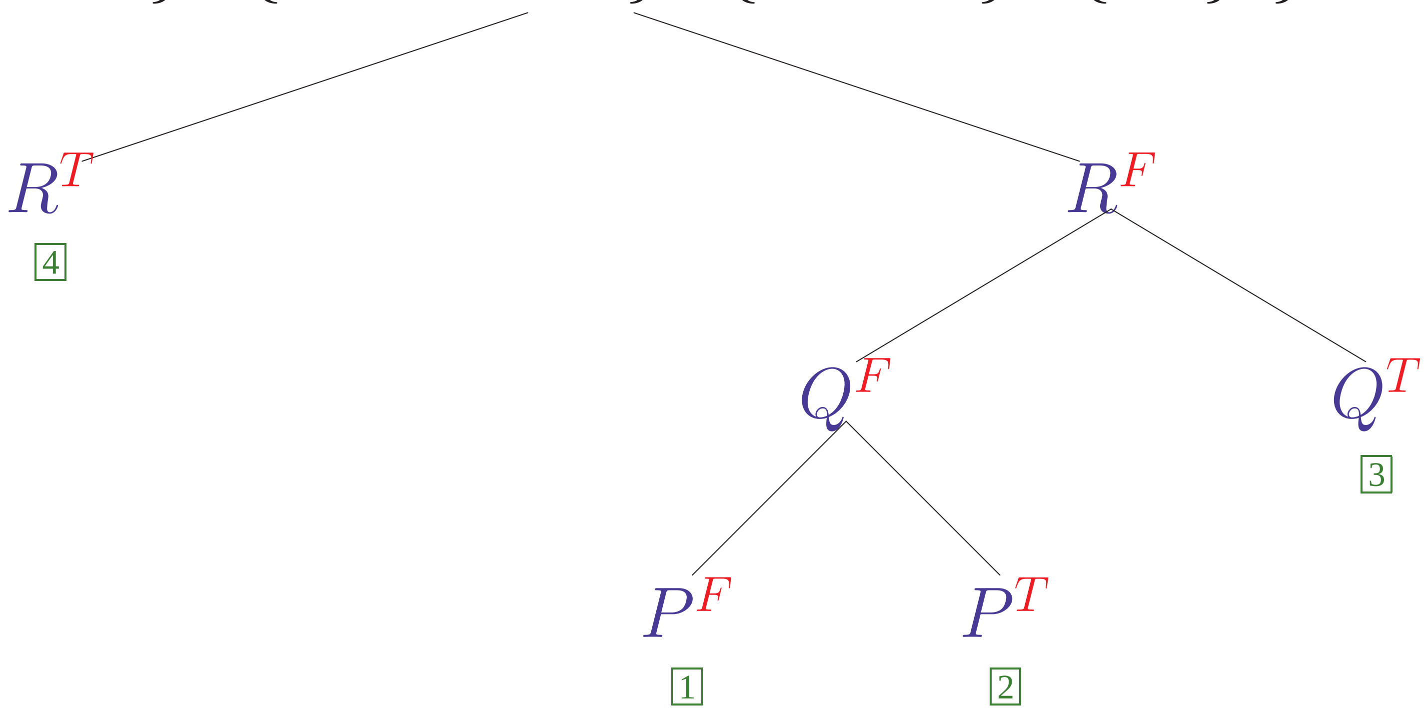


Auswahlstrategie hat großen Einfluß auf Größe des Beweises

Semantischer Baum für $P \land Q \lor \neg P \land Q \land R \lor \neg Q \land R \lor \neg R$

– alternative Auswahl der Konnektionen –

$$\{\{P^F, Q^F\}^{\boxed{1}}, \{P^T, Q^F, R^F\}^{\boxed{2}}, \{Q^T, R^F\}^{\boxed{3}}, \{R^T\}^{\boxed{4}}\}$$



Resolution

↦ "Angewandte Logik"

Erzeuge Resolventen bis die leere Klausel entsteht

Gegeben: Menge von Klauseln $\{c_1, \ldots, c_n\}$, die eine zu widerlegende Formel in konjunktiver Normalform repräsentieren

Regeln: Resolutionsregel: Wähle zwei Klauseln $L_{11} \vee \ldots \vee L_{1m} \vee Pt_1$ und $L_{21} \vee \ldots \vee L_{2k} \vee \neg Pt_2$, so daß t_1 und t_2 unifizierbar sind

Ergänze $\sigma(L_{11} \vee \ldots \vee L_{1m} \vee L_{21} \vee \ldots \vee L_{2k})$ zur Klauselmenge, wobei σ der allgemeinste Unifikator von t_1 und t_2 ist.

Umbenennung der Variablen garantiert, daß Elternklauseln verschiedene Variablen haben

Ziel: Die Klauselmenge enthält die leere Klausel

Rechtfertigung: Die Formel $\sigma(L_{11} \vee \ldots \vee L_{1m} \vee L_{21} \vee \ldots \vee L_{2k})$ ist genau dann erfüllbar, wenn $L_{11} \vee \ldots \vee L_{1m} \vee Pt_1$ und $L_{21} \vee \ldots \vee L_{2k} \vee \neg Pt_2$ erfüllbar sind. Da die leere Klausel unerfüllbar ist, folgt aus der Ableitbarkeit der leeren Klausel die Unerfüllbarkeit der ursprünglichen Klauselmenge.

Verdichtung semantischer Bäume

Resolutions-Ableitung für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

$$\{\neg P, \neg Q\} \qquad \{P, \neg Q, \neg R\} \qquad \{Q, \neg R\} \qquad \{R\}$$

$$\{\neg Q, \neg R\}$$

$$\{\neg R\}$$

$$\{\}$$

Sehr kurze Beweise möglich, aber oft schwer zu finden

Klauselmenge wächst mit jedem Resolutionsschritt an

Resolution in Matrix-Denkweise

Gegeben: Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$ mit $c_i = \{L_{i1}, \ldots, L_{im_i}\}$

Menge von Konnektionen $\{k_1, \ldots, k_m\}$ mit $k_j = \{P_{i_j}{}^F, P_{i'_j}{}^T\}$

Start: n Knoten markiert mit den Klauseln $c_i = \{L_{i1}, \ldots, L_{im_i}\}$

Regeln: Wähle Konnektion $k_j = \{P_{i_j}{}^F, P_{i'_j}{}^T\}$

und 2 Knoten markiert mit $K_1 \cup \{P_{i_j}{}^F\}$ und $K_2 \cup \{P_{i'_j}{}^T\}$.

(Prädikatenlogische Form: mit σ instantiierte Konnektion)

Generiere einen Nachfolger, markiert mit $K_1 \cup K_2$

Ziel: Ein Knoten, der mit $\{\}$ markiert ist

Rechtfertigung: Die Klausel $K_1 \cup K_2$ ist genau dann komplementär zur

Restmatrix, wenn dies für die Matrix $\{\, K_1 \cup \{P_{i_j}{}^F\},\ K_2 \cup \{P_{i'_j}{}^T\} \,\}$ gilt

Die leere Klausel macht jede Restmatrix komplementär (es gibt keine Pfade)

Resolutionsbeweis für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

$$\{\{P^F, Q^F\}^{\boxed{1}}, \{P^T, Q^F, R^F\}^{\boxed{2}}, \{Q^T, R^F\}^{\boxed{3}}, \{R^T\}^{\boxed{4}}\}$$

$$\bullet \xrightarrow{\boxed{1}+\boxed{2}} \{Q^F, R^F\}^{\boxed{5}}$$

$$\{Q^F, R^F\}^{\boxed{5}} \xrightarrow{\boxed{5}+\boxed{3}} \{R^F\}^{\boxed{6}}$$

$$\{R^F\}^{\boxed{6}} \xrightarrow{\boxed{6}+\boxed{4}} \{\}$$

Maslov-Verfahren (Inverse Methode)

Zielorientierte synthetische Beweisführung

Gegeben: Zielformel X und eine Menge von Axiomensequenzen der Form $P \vdash P$, wobei P Literal von X ist

Regel: Wähle eine kleinste neue Teilformel Y von X, eine Regel des (synthetischen) Sequenzenkalküls, deren Konklusion die Form $\Gamma \vdash Y$ hat, und bereits abgeleitete Sequenzen $\Gamma_1 \vdash Y_1$ (und ggf. $\Gamma_2 \vdash Y_2$), welche mit den Prämissen der Regel unifizieren.
Leite die Sequenz $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash Y$ ab

Ziel: Abgeleitete Sequenz $\vdash X$ (ohne Annahmen)

Rechtfertigung: Das Verfahren sucht nach einer Folge von Sequenzenregeln, die von Axiomen der Form $P \vdash P$ zur Zielformel $\vdash X$ führen. Es nutzt dabei die Teilformeleigenschaft von Sequenzenkalkülen aus (der Wahrheitswert der Teilformeln bestimmt den der Ausgangsformel) und speichert die noch offenen Annahmen in der Sequenz. Im Original ist das Verfahren als Widerlegungskalkül formuliert: Axiome sind grundsätzliche Widersprüche und das Beweisziel ist die Widerlegung von X ohne zusätzliche Annahmen.

Maslov-Ableitung für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

$P \vdash P$ $\quad Q \vdash Q$ $\quad R \vdash R$ **Teilformel**

$\vdash P, \neg P$

$P, Q \vdash P \wedge Q$ $\quad Q, R \vdash P,\ (\neg P \wedge Q \wedge R)$ $\quad P \wedge Q$

$Q, R \vdash (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$ $\quad \neg P \wedge Q \wedge R\ (*)$

$R \vdash (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R)$ $\quad \neg Q \wedge R\ (*)$

$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R) \vee \neg R$ $\quad \neg R\ (*)$

$(*)$ Diese Regelanwendung besteht aus mehreren (immer gleichartigen) Teilschritten: $\neg$-R für negierte Literale, $\wedge$-R für den Aufbau der Klausel und schließlich Schnittregel (und $\vee$-R) für das Zusammensetzen der Klauseln unter Wegfall des Konnektionsliterals

Maslov-Verfahren in Matrix-Denkweise

Gegeben: Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$ mit $c_i = \{L_{i1}, \ldots, L_{im_i}\}$
Menge von Konnektionen $\{k_1, \ldots, k_m\}$ mit $k_j = \{P_{i_j}{}^F, P_{i'_j}{}^T\}$

Start: m Knoten markiert mit Konnektionen k_j=$\{P_{i_j}{}^F$,$P_{i'_j}{}^T\}$

Regeln: Wähle Klausel $c_i = \{L_{i1}, \ldots, L_{im_i}\}$.
und m_i Knoten markiert mit $K_1 \cup \{L'_{i1}\} \ldots K_{m_i} \cup \{L'_{im_i}\}$.
(K_j sind Klauselmengen, die L'_{im_i} unifizieren mit den L_{im_i})
Generiere einen Nachfolger, markiert mit $K_1 \cup \ldots \cup K_{m_i}$

Ziel: Ein Knoten, der mit $\{\}$ markiert ist

Rechtfertigung: Die Regel entspricht dem Ableitungsschritt einer veränderten Abarbeitungsreihenfolge bei der Suche nach Komplementarität. Statt Tiefensuche werden ganze Klauseln (Breitensuche) verarbeitet und Teilpfade, die alle Pfade durch die bisher betrachteten Klauseln mit Sicherheit komplementär machen würden, auf einen Stack gelegt. Erscheint dabei der leere Pfad, so ist jeder Pfad durch die Matrix komplementär.

Maslov-Beweis für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

	Klausel
$\{P^F, P^T\}$ $\{Q^F, Q^T\}$ $\{R^F, R^T\}$	
$\{P^T, Q^T\}$	$\{P^F, Q^F\}$
$\{Q^T, R^T\}$	$\{P^T, Q^F, R^F\}$
$\{R^T\}$	$\{Q^T, R^F\}$
$\{\,\}$	$\{R^T\}$

Kurze Beweise, aber Beweissuche oft mühsam

Maslov-Ableitung als inverse Konnektionsmethode

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix}\boxed{\{P^T, Q^T\}} \vdash$$

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix}\boxed{\{Q^T, R^T\}} \vdash$$

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix}\boxed{\{R^T\}} \vdash \begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix}\boxed{\{\}}$$

Deduktionsverfahren im Vergleich

- **Fast alle Verfahren sind konnektionenorientiert**
  – Konnektionen verketten Formeln oder schließen Beweisäste ab
- **Große Unterschiede in Steuerung der Beweissuche**
  – Steuerung durch Klauseln oder aktuelle Beweispfade
  – Erzeugung zusätzlicher Klauseln oder Durchsuchen der Matrix
  – Indirekte oder direkte Beweisführung
- **Viele Verfahren benötigen Klauselnormalform**
  – Extensionsverfahren basiert auf Charakterisierung der Gültigkeit von Formeln und kann auch direkt auf Formelbaum operieren $\mapsto$ §11
  – Wichtig für nichtklassische und höhere Logiken
- **Davis-Putnam Verfahren ist völlig anders**
  – Systematische Vereinfachung und Aufspaltung der Formel
  – Extrem effizient aber nur für Aussagenlogik verwendbar
  – Hyperlinking reduziert Prädikatenlogik auf Aussagenlogik (Lee & Plaisted 1992)