Inferenzmethoden

Einheit 13

Modallogiken

1. Syntax und Semantik
2. Modales Extensionsverfahren
3. Modale Präfixunifikation

Modallogiken

- **Erweiterung der Prädikatenlogik um ‘Modalitäten’**
  - Modellierung von Schlußfolgerungen, die im Alltag verwendet werden
    - Formel F ist beweisbar
    - Ich bin sicher oder glaube, daß F gilt
    - Möglicherweise ist F gültig
- **Syntax: Prädikatenlogik + Modaloperatoren $\Box$, $\Diamond$**
  - $\Box$, $\Diamond$ sind Meta-Operatoren, die Aussagen über Formeln treffen
  - Lesart: $\Box F$: “notwendigerweise F” $\Diamond F$: “möglicherweise F”

  Semantik abhängig von vorgesehener Anwendung
  - Je nachdem, ob $\Box$ als “beweisbar”, “wissen”, “glauben” verstanden wird
  - $(\forall x\,\Box Px) \Rightarrow \Box(\exists x\; Px)$ ist nicht für jede Interpretation gültig
- **Beweisverfahren:**
  - (Erweiterte) Sequenzenkalküle
  - Konnektionsbeweiser + Transformation der Formeln in Prädikatenlogik
  - Modifizierter Konnektionsbeweiser mit Präfixen für Modaloperatoren

Semantik von Modallogiken

- **Interpretation von Formeln abhängig von Welten**
  - In der Prädikatenlogik wird eine unveränderliche Welt modelliert
  - Modaloperatoren interpretieren relativ zu denkbaren Welten
    - mögliche zukünftige Entwicklung
    - mögliche vergangene Ereignisse
    - mögliche Wissens- oder Glaubenszustände
    - mathematische Theorien der Beweisbarkeit

- **Kripke Semantik über Weltmodelle $(\mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{U}, u)$**
  - $\mathcal{W}$: Menge der (denkbaren) Welten
  - R: Erreichbarkeitsrelation zwischen Welten aus $\mathcal{W}$
  - U: Universum aller Objekte aller Welten
  - $u{:}\mathcal{W}{\to}\mathcal{P}(U)$: $u(w) \hat{=}$ die in Welt w existierenden Objekte

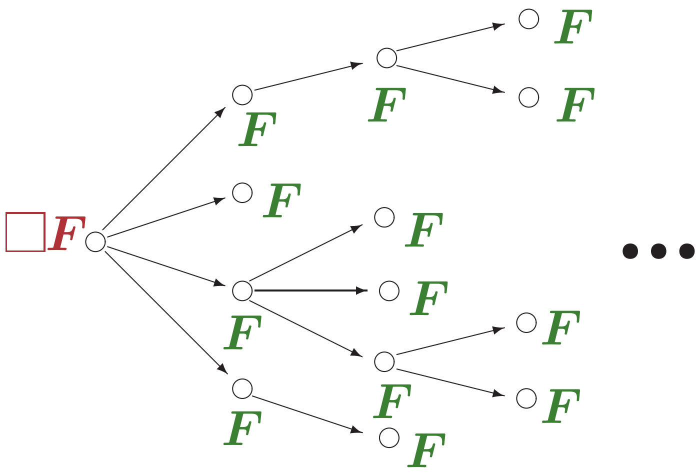
    $u(w)$ kann konstant, variabel, oder kumulativ bezüglich R sein

Eigenschaften von R bestimmen Bedeutung der Modaloperatoren

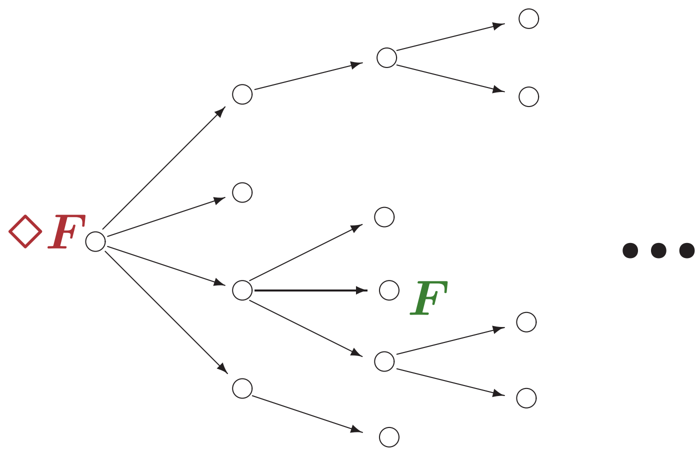
Kripke-Semantik von Modaloperatoren

Betrachte von aktueller Welt erreichbare Welten

- $\Box F$: F gilt in allen erreichbaren Welten



- $\Diamond F$: F gilt in mindestens einer erreichbaren Welt



- F: F gilt in allen Welten

Erreichbarkeit und modale Axiome

• Allgemeine Eigenschaften aller Modallogiken

(Df)	Definition von $\Diamond$	$\Diamond F \Leftrightarrow \neg\Box\neg F$
(K)	Distributivität	$\Box(F \Rightarrow G) \;\Rightarrow\; (\Box F \Rightarrow \Box G)$
(RN)	Notwendigkeitsregel	aus $\vdash F$ folgt $\vdash \Box F$
(PL)		*Axiome der (klassischen) Prädikatenlogik*
(MP)	Modus Ponens Regel	aus $\vdash F$ und $\vdash F \Rightarrow G$ folgt $\vdash G$

• Mögliche Eigenschaften der Erreichbarkeitsrelation

(D)	seriell	Für alle $w_1 \in \mathcal{W}$ gibt es ein $w_2 \in \mathcal{W}$ mit $w_1 R w_2$
(T)	reflexiv	wRw für alle Welten $w \in \mathcal{W}$
(B)	symmetrisch	$w_1 R w_2 \Rightarrow w_2 R w_1$ für alle $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$
(4)	transitiv	$w_1 R w_2$ & $w_2 R w_3 \;\Rightarrow\; w_1 R w_3$ für alle $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$
(5)	euklidisch	$w_1 R w_2$ & $w_1 R w_3 \;\Rightarrow\; w_2 R w_3$ oder $w_3 R w_2$ für alle $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$

• Durch R induzierte Axiome für $\Box$

(D)	seriell	$\Box F \Rightarrow \Diamond F$	*“Was ich glaube, ist auch möglich”*
(T)	reflexiv	$\Box F \Rightarrow F$	*“Was beweisbar ist, ist auch gültig”*
(B)	symmetrisch	$F \Rightarrow \Box\Diamond F$	*“Ist F wahr, dann weiß man, daß F möglich ist”*
(4)	transitiv	$\Box F \Rightarrow \Box\Box F$	*“Ich weiß, was ich weiß”*
(5)	euklidisch	$\Diamond F \Rightarrow \Box\Diamond F$	

Die wichtigsten Modallogiken

Name	*Eigenschaften von R*	*Axiome*
K **K4**	keine transitiv	PL, Df, K PL, Df, K, 4
D **D4**	seriell seriell, transitiv	PL, Df, K, D PL, Df, K, D, 4
B	symmetrisch	PL, Df, K, B
T	reflexiv	PL, Df, K, T
S4 **S5**	reflexiv, transitiv reflexiv, transitiv, symmetrisch	PL, Df, K, T, 4 PL, Df, K, T, B, 4 (+5)

- **$F \Rightarrow \Box F$ gilt trotz der Notwendigkeitsregel nicht**

  $\vdash F$ $\hat{=}$ "F gilt in jeder Welt $w \in \mathcal{W}$"

  $\vdash \Box F$ $\hat{=}$ "Für alle $w \in \mathcal{W}$ gilt F gilt in jeder von w erreichbaren Welt"

  $\vdash F \Rightarrow \Box F$ $\hat{=}$ "In jeder Welt $w \in \mathcal{W}$ folgt $\Box F$ aus F "

  Deduktionstheorem "$\vdash F$ folgt aus $\vdash E$ genau dann, wenn $\vdash E \Rightarrow F$ gilt" gilt nicht für Modallogiken (und konstruktive Logik)

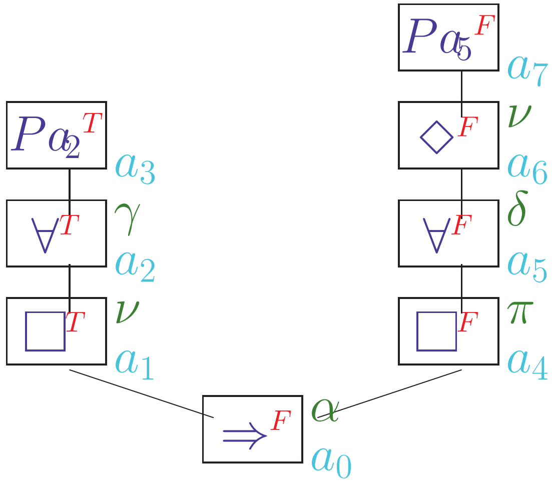
Beweise in der Modallogik

- **In K folgt $\Diamond F \Rightarrow \Diamond G$ aus $F \Rightarrow G$**
  - Es gelte $F \Rightarrow G$
  - Dann gilt $\neg G \Rightarrow \neg F$ (Kontraposition)
  - Dann gilt $\Box(\neg G \Rightarrow \neg F)$ (RN)
  - Dann gilt $\Box\neg G \Rightarrow \Box\neg F$ (K, MP)
  - Dann gilt $\neg\Box\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg G$ (Kontraposition)
  - Es folgt $\Diamond F \Rightarrow \Diamond G$ (Df)
- **In K folgt $\Box F \Rightarrow \Box G$ aus $F \Rightarrow G$**
  - Aus $F \Rightarrow G$ folgt $\Box(F \Rightarrow G)$ mit RN und hieraus $\Box F \Rightarrow \Box G$ mit K
- **In T gilt $F \Rightarrow \Diamond F$**
  - Es gilt $\Box\neg F \Rightarrow \neg F$ (T)
  - Daraus folgt $\neg\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg F$ (Kontraposition)
  - Es folgt $F \Rightarrow \Diamond F$ (PL, Df)

Modifikationen analog zur Konstruktiven Logik

- **Erweitere Matrixcharakterisierung der Gültigkeit**
  - **F ist gültig gdw. alle Pfade durch F komplementär**
  - Betrachtung von Nichtnormalform-Matrizen ist sinnvoll
  - Komplementaritätsbegriff muß ergänzt werden
    - Unifizierbarkeit der konnektierten Terme
    - Erreichbarkeit beider Literale bei Einschränkungen an Regelreihenfolge
- **Erweitertes Beweissuchverfahren**
  - Unverändertes konnektionen-orientiertes Pfadüberprüfungsverfahren
    - Uniformes Verfahren für Nichtnormalform-Matrizen sinnvoll
  - Erweiterter Komplementaritätstest
    - Termunifikation liefert Substitution σ_Q von γ-Variablen durch Terme
    - Präfixunifikation liefert Substitution σ_M für modale Präfixe
  - Substitutionen codieren Einschränkungen an Reihenfolge der Regeln
  - Eigenschaften von R codiert in Bedingungen an Zulässigkeit von σ_M

Modale Präfixe



$\left[\; A_1{:}Pa_2{}^F \quad a_4A_6{:}Pa_5{}^T \;\right]$ K, D, D4, S4, T

$\left[\; A_1{:}Pa_2{}^F \quad A_6{:}Pa_5{}^T \;\right]$ S5

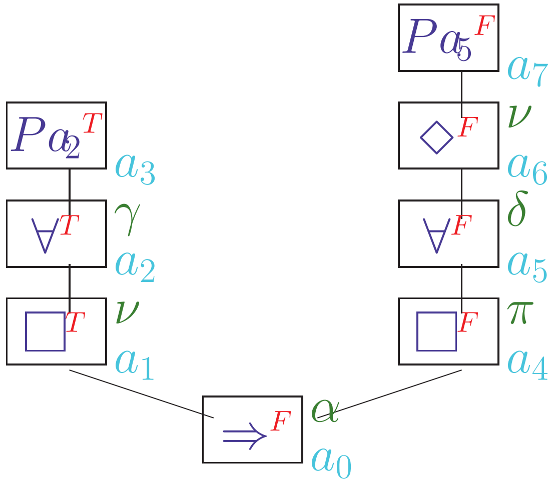
- **Weise Positionen modale Typen zu**
  - **Typ $\boldsymbol{\nu}$**: $\Box^T$, $\Diamond^F$ Variablen
  - **Typ $\boldsymbol{\pi}$**: $\Box^F$, $\Diamond^T$ Konstante
- **Bestimme Präfix eines Atoms P**
  - Liste der modalen Positionen zwischen Wurzel und P
  - Letzte modale Position vor P für Logik S5
- **Definiere modale Substitution σ_M**
  - Abbildung von ν-Positionen in Strings über modalen Positionen
  - σ_M induziert Reduktionsordnung $\sqsubseteq_M$ auf modalen Positionen:
    Ist $\sigma_M(U) = v_1 ... v_n$ dann gilt $v_i \sqsubseteq_M U$ für jede π-Position v_i

Komplementarität und Gültigkeit

- **Komplementarität unter $\sigma = (\sigma_Q, \sigma_M)$**
  - Terme konnektierter Literale sind unter σ_Q unifizierbar, Präfixe unter σ_M
  - σ_Q: Ersetze quantifizierte γ-Variablen durch Terme
    - Termunifikation versucht Terme konnektierter Atome gleich zu machen
  - σ_M: Ersetze φ-Variablen durch Strings
    - Präfixunifikation versucht Präfixe konnektierter Atome gleich zu machen
- **Zulässigkeit von (σ_Q, σ_M)**
  - Gesamte Reduktionsordnung $\lhd := (< \cup \sqsubseteq_Q \cup \sqsubseteq_M)^+$ ist azyklisch
  - Kommt eine δ-Position v in $\sigma_Q(u)$ vor, so gilt $|\sigma_M(pre_v)| \leq |\sigma_M(pre_u))|$ $(|\sigma_M(pre_v)| \leq |\sigma_M(pre_u))| \leq |\sigma_M(pre_v)|+1$ für T und D)
  - $\sigma_M(a_i)$ hat maximal (T), genau (D), mindestens (D4) Länge 1
- **Modale Multiplizität $\mu_M(a_i)$**
  - Anzahl der Kopien des ν-Knotens im Baum

Ein modales F ist gültig, wenn es eine Multiplizität $\mu{=}(\mu_Q, \mu_M)$, eine zulässige Substitution $\sigma{=}(\sigma_Q, \sigma_M)$ und eine Menge $\mathcal{C}$ σ-komplementärer Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F ein Element von $\mathcal{C}$ enthält

Modaler Matrixbeweis



$$\left[\; A_1{:}Pa_2{}^F \quad {}_{a_4A_6}{:}Pa_5{}^T \;\right]$$ K, D, D4, S4, T

$$\left[\; A_1{:}Pa_2{}^F \quad A_6{:}Pa_5{}^T \;\right]$$ S5

- **Einziger Pfad $\{a_3a_7\}$ durch Konnektion abgedeckt**
  Terme sind gleich unter $\sigma_Q = [a_5/a_2]$
  – Induzierte Reduktionsordnung $a_5 \sqsubseteq_Q a_2$
- **Drei allgemeinste Präfix-Unifikatoren**
  – $\sigma_{M_1} = [a_4A_6/A_1]$ zulässig für D4 und S4
  – $\sigma_{M_2} = [a_4/A_1, \varepsilon/A_6]$ zulässig für S4 und T
  – $\sigma_{M_3} = [a_4/A_1, a_4/A_6]$ zulässig für für S5
  – σ_{M_1} und σ_{M_2} verletzt Längenbedingung für D
  – σ_{M_1} verletzt Bedingung an δ-Positionen für T, σ_{M_2} für D4
- **Die Formel ist gültig in D4, T, S4, S5 aber nicht in D**

Modale Präfix-Unifikation

Unifiziere Präfix-Strings konnektierter Atome

- **Ähnlich zur Präfix-Unifikation für konstruktive Logik**
  - Gleiches Transformationsverfahren im Stil von Martelli-Montanari
  - Unterschiedliche Transformationsregeln für jede Modallogik

- **Transformationsregeln für D und K**

R_1	$\{\varepsilon = \varepsilon \vert \varepsilon\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{\}, \sigma$	
R_2	$\{Vs = \varepsilon \vert Xt\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{s = \varepsilon \vert t\}, \{V \backslash X\} \cup \sigma,$	$V \neq X$
R_3	$\{Xs = \varepsilon \vert Xt\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{s = \varepsilon \vert t\}, \sigma$	
R_4	$\{Cs = \varepsilon \vert Vt\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{Vt = \varepsilon \vert Cs\}, \sigma$	

Transformationsregeln für D4 und K4

$R_1 - R_4$, $R_7 - R_{10}$	*wie bei konstruktiver Logik*			
R_5.	$\{Vs = z \vert \varepsilon\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{s = \varepsilon \vert \varepsilon\}, \{V \backslash z\} \cup \sigma,$	$z \neq \varepsilon$ oder $V \in V' \wedge R_V^{(\sigma)}$
R_6.	$\{Vs = \varepsilon \vert C_1 t\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{s = \varepsilon \vert C_1 t\}, \{V \backslash \varepsilon\} \cup \sigma,$	$V \in V' \wedge R_V^{(\sigma)}$

Transformationsregeln für weitere Logiken

Transformationsregeln für S5

R_1	$\{V = \varepsilon \vert X\}, \sigma$	$\to$	$\{\}, \{V\backslash X\} \cup \sigma$	$V{\neq}X$
R_2	$\{X = \varepsilon \vert X\}, \sigma$	$\to$	$\{\}, \sigma$	
R_3	$\{C = \varepsilon \vert V\}, \sigma$	$\to$	$\{V = \varepsilon \vert C\}, \sigma$	

Transformationsregeln für S4 wie bei konstruktiver Logik

Transformationsregeln für T

$R_1 - R_3$, $R_7 - R_{10}$ *wie bei konstruktiver Logik*

R_4	$\{V s = z_v \vert \varepsilon\}, \sigma$	$\to$	$\{s = \varepsilon \vert \varepsilon\}, \{V\backslash z_v\} \cup \sigma$	
R_5	$\{s_1 V s_2 = z \vert Ct\}, \sigma$	$\to$	$\{s_1 = \varepsilon \vert z, s_2 = \varepsilon \vert t\}, \{V\backslash C\} \cup \sigma_V^{(\sigma)} \cup \sigma$	
R_6	$\{s_c^+ = \varepsilon \vert t_v^+\}, \sigma$	$\to$	$\{t_v^+ = \varepsilon \vert s_c^+\}, \sigma$	
R_7	$\{V s_v^+ = \varepsilon \vert V_1 t_v\}, \sigma$	$\to$	$\{V_1 t_v = V \vert s_v^+\}, \sigma$	
R_8	$\{V s_v^+ = z^+ \vert V_1 t_v\}, \sigma$	$\to$	$\{V_1 t_v = V' \vert s_v^+\}, \{V\backslash z^+ V'\} \cup \sigma$	
R_9	$\{X s = z \vert V t\}, \sigma$	$\to$	$\{X s = z V \vert t\}, \sigma,$	$X{\neq}V$, $s{=}\varepsilon$ oder $t{\neq}\varepsilon$

Extensionsverfahren für Modallogik

- **Pfadüberprüfungsverfahren bleibt unverändert**
  – Nicht-Normalform-Verfahren aus Einheit 11
- **Komplementaritätstest `unify_check` wird erweitert**
  – Bekanntes Termunifikationsverfahren
  – Präfixunifikationsverfahren mit Logik-spezifischen Regeln
  – Überprüfung der Zulässigkeit
- **Anwendbar auf D, D4, T, S4, S5**
  – Regeln für Präfixunifikation in K, K4 vorhanden
  – Matrixcharakterisierung für K, K4, B formal noch nicht abgesichert

Weitere Details in Literatur auf Webseite