Inferenzmethoden

Einheit 17

Logik höherer Stufe

1. Syntax und Semantik
2. Simulation mathematischer Konstrukte
3. Beweisführung in Logik höherer Stufe

Logik höherer Stufe

- **Logik erster Stufe hat nur einfache Variablen**
  - Keine Quantifizierung über Funktions- oder Prädikatensymbole erlaubt
- **Konstrukte höherer Stufe kommen in der Realität vor**
  - Funktionen (2. Stufe): "Bestimme $x{+}2$ bei Eingabe x" $\lambda x.x{+}2$
  - Induktionsprinzip: $\forall P.P(0) \wedge (\forall y{:}\mathbb{N}.P(y) \Rightarrow P(y{+}1)) \Rightarrow \forall x{:}\mathbb{N}.P(x)$
  - Zwischenwertsatz: $\forall f{:}\mathbb{R}{\to}\mathbb{R}.\forall a < b{:}\mathbb{R}.(f(a){>}0 \wedge f(b){<}0) \Rightarrow \exists x{:}\mathbb{R}.f(x){=}0$
  - Funktionale (3. Stufe): Ableitungsoperator $\lambda f.df/dx$
  - Quantifizierung über Funktionale, ...
- **Logik höherer Stufe hat keine Einschränkungen**
  - Extrem einfache Syntax: $x,\ \lambda x.t,\ f(a),\ \forall x\, P,\ P \Rightarrow Q$
  - Fester Auswertungsmechanismus (β-)Reduktion: $(\lambda x.t)(a) \longrightarrow t[a/x]$
- **Logik höherer Stufe ist minimale Grundlagentheorie**
  - Keine Abstützung auf Mengentheorie erforderlich
  - Reduktion erklärt Wert von Ausdrücken
  - Mathematische Konzepte werden nicht über Axiome erklärt sondern als definitorische Abkürzung für komplexe Terme (logizistischer Ansatz)

Logik höherer Stufe – Syntax

- **Alphabet für erlaubte Symbole**
  - $\mathcal{V}$: Variablensymbole
- **Terme**
  - Variablen $x \in \mathcal{V}$
  - $\lambda x.t$, wobei $x \in \mathcal{V}$ und t Term — λ-Abstraktion
  - $f\ t$, wobei t und f Terme — Applikation
  - (t), wobei t Term
  - $(P \Rightarrow Q)$, wobei P,Q Terme
  - $(\forall x\ P)$, wobei $x \in \mathcal{V}$ und P Term
- **Konventionen**
  - Applikation bindet stärker als λ-Abstraktion
  - Applikation ist links-assoziativ: $f\ t_1\ t_2 \mathrel{\hat{=}} (f\ t_1)\ t_2$
  - Notation $f(t_1,\ldots t_n)$ entspricht iterierter Applikation $f\ \ t_1 \ldots t_n$

Logik höherer Stufe – (Wert-)Semantik

- **α-Konversion:** Umbenennung gebundener Variablen
  - Ersetze Teilterm der Gestalt $\lambda x.t$ durch $\lambda z.t[z/x]$ (z neue Variable)
  - Ersetze Teilterm der Gestalt $\forall x\ P$ durch $\forall z\ P[z/x]$
  - Terme t und u sind kongruent (α-konvertibel), wenn sie auseinander durch endlich viele Umbenennungen gebundener Variablen entstehen
- **(β-)Reduktion:** Auswertung von Termen
  - Ersetze Teilterm der Gestalt $(\lambda x.t)(s)$ (Redex) durch $t[s/x]$ (Kontraktum)
  - t ist reduzierbar auf u ($\boldsymbol{t \xrightarrow{*} u}$), wenn u aus t durch endlich viele Reduktionen und Umbenennungen entsteht ($\hat{=}$ Termersetzung)
- **(Semantische) Gleichheit $\boldsymbol{t = s}$**
  - Es gibt einen Term u mit $t \xrightarrow{*} u$ und $s \xrightarrow{*} u$
- **Normalform von $\boldsymbol{t}$:** Wert eines Terms
  - Irreduzibler (Redex-freier) Term u mit $t = u$
  - Der Wert eines Terms ist eindeutig ($\xrightarrow{*}$ ist konfluent)
  - Nicht jeder Term hat einen Wert (keine starke Normalisierbarkeit)
- **Semantik von $\forall$ und $\Rightarrow$ analog zur Prädikatenlogik**

Definition logischer Standardkonzepte

Junktoren werden zu benutzerdefinierten Funktionen

Konjunktion	$\wedge$	$\equiv$	$\lambda A.\lambda B.\forall P\,(A \Rightarrow (B \Rightarrow P)) \Rightarrow P$
Disjunktion	$\vee$	$\equiv$	$\lambda A.\lambda B.\forall P\,((A \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow P)) \Rightarrow P$
Falschheit	$\bot$	$\equiv$	$\forall P\,P$ (*intuitionistisch*)
Negation	$\neg$	$\equiv$	$\lambda A.\forall P\,(A \Rightarrow P)$
Existenzquantor	$\exists x\,A$	$\equiv$	$\forall P\,(\forall x\,(A \Rightarrow P)) \Rightarrow P$
Gleichheit	$\doteq$	$\equiv$	$\lambda x.\lambda y.\forall P\,(\,P(x) \Rightarrow P(y)\,)$

Definition von Zahlen: Church Numerals

$$\overline{n} \equiv \lambda f.\lambda x.\ f^n\, x \equiv \lambda f.\lambda x.\ \underbrace{f\,(f \ldots (f\, x) \ldots)}_{n\text{-mal}}$$

$$\mathsf{s} \equiv \lambda n.\lambda f.\lambda x.\ n\, f\, (f\, x)$$

$$\mathsf{add} \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ m\, f\, (n\, f\, x)$$

$$\mathsf{mul} \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ m\, (n\, f)\, x$$

$$\mathsf{exp} \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ n\, m\, f\, x$$

$$\mathsf{zero} \equiv \lambda n.\ n\, (\lambda n.\mathsf{F})\, \mathsf{T}$$

$$\mathsf{p} \equiv \lambda n.\, (n\, (\lambda f x.\, \langle \mathsf{s}, \mathsf{let}\ \langle \mathsf{f}, \mathsf{x} \rangle = \mathsf{f}\,\mathsf{x}\ \mathsf{in}\ \ \mathsf{f}\ \ \mathsf{x} \rangle)\, \langle \lambda z.\overline{0}, \overline{0} \rangle).2$$

$$N \equiv \lambda x.\forall P\ (\forall y\, P(y) \Rightarrow P(\mathsf{s}\, y)) \Rightarrow P(\overline{0}) \Rightarrow P(x) \qquad \boxed{N(x) \hat{=} x \in \mathbb{N}}$$

Abkürzungen

$$\mathsf{T} \equiv \lambda x.\lambda y.x$$

$$\mathsf{F} \equiv \lambda x.\lambda y.y$$

$$\mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ s\ \mathsf{else}\ t \equiv b\, s\, t$$

$$\langle s,t \rangle \equiv \lambda p.\ p\, s\, t$$

$$\mathsf{let}\ \langle x, y \rangle = pair\ \mathsf{in}\ \ t \equiv pair\ (\lambda x.\lambda y.t)$$

Church Numerals: Auswertung von Funktionen

$$
\begin{aligned}
\mathsf{s}\,\overline{n} &\equiv (\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f.\lambda x.\ f^n\ x) \\
&\longrightarrow \lambda f.\lambda x.\ (\lambda f.\lambda x.\ f^n\ x)\ f\ (f\ x) \\
&\longrightarrow \lambda f.\lambda x.\ (\lambda x.\ f^n\ x)\ (f\ x) \\
&\longrightarrow \lambda f.\lambda x.\ f^n\ (f\ x) \\
&\longrightarrow \lambda f.\lambda x.\ f^{n+1}\ x \qquad \equiv \overline{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{add}\,\overline{m}\,\overline{n} &\equiv (\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ m\ f\ (n\ f\ x))\ \overline{m}\ \overline{n} \\
&\longrightarrow (\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ \overline{m}\ f\ (n\ f\ x))\ \overline{n} \\
&\longrightarrow \lambda f.\lambda x.\ \overline{m}\ f\ (\overline{n}\ f\ x) \\
&\equiv \lambda f.\lambda x.\ (\lambda f.\lambda x.\ f^m\ x)\ f\ (\overline{n}\ f\ x) \\
&\longrightarrow \lambda f.\lambda x.\ (\lambda x.\ f^m\ x)\ (\overline{n}\ f\ x) \\
&\longrightarrow \lambda f.\lambda x.\ f^m\ (\overline{n}\ f\ x) \\
&\equiv \lambda f.\lambda x.\ f^m\ ((\lambda f.\lambda x.\ f^n\ x)\ f\ x) \\
&\longrightarrow \lambda f.\lambda x.\ f^m\ ((\lambda x.\ f^n\ x)\ x) \\
&\longrightarrow \lambda f.\lambda x.\ f^m\ (f^n\ x) \\
&\longrightarrow \lambda f.\lambda x.\ f^{m+n}\ x \qquad \equiv \overline{m+n}
\end{aligned}
$$

Beweisführung in Logik höherer Stufe

Extensionsverfahren ähnlich wie bei Prädikatenlogik

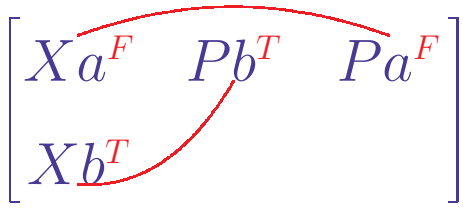
- **Erweiterte Matrixcharakterisierung der Gültigkeit**
  - ***F* ist gültig gdw. alle Pfade durch *F* komplementär**
  - Komplementarität mit erweitertem Substitutionsbegriff
    - Prädikats- und Funktionssymbole dürfen ersetzt werden
    - Konnektierte Terme müssen nur semantisch gleich sein
- **Erweitertes Beweissuchverfahren** → TPS (Andrews)
  - Konnektionen-orientiertes Pfadüberprüfungsverfahren
  - Komplementaritätstest mit Unifikation höherer Stufe → Huet
    - i.A. unentscheidbar (!) und erheblich komplizierteres Verfahren
- **Beweise sind normalerweise sehr kurz und elegant**
  - Aber erheblich schwerer zu finden

Beweis der Grundeigenschaften der Gleichheit

$$\doteq \;\equiv\; \lambda x.\lambda y.\forall P(P(x) \Rightarrow P(y))$$

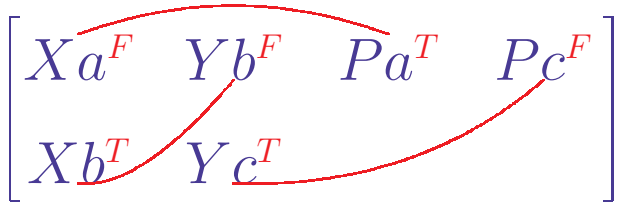
- **Reflexivität:** $a \doteq a$

- **Kommutativität:** $a \doteq b \Rightarrow b \doteq a$



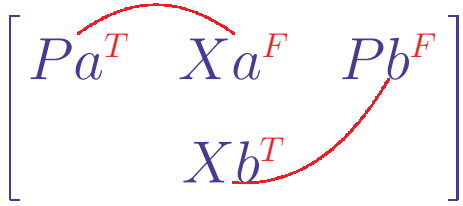
$[\lambda z.\neg Pz/X]$

- **Transitivität:** $a \doteq b \wedge b \doteq c \Rightarrow a \doteq c$



$[P/X, P/Y]$

- **Substitutivität:** $Pa \wedge a \doteq b \Rightarrow Pb$



$[P/X]$

Intuitionistische Logik höherer Stufe

- **Unterstützt formale Manipulation von Algorithmen**
  - Synthese aus Spezifikationen, Optimierung, Verifikation, ...
  - Einheitliche Sprache für Spezifikation, Programmierung, Deduktion...
- **(Zur Zeit noch) viele verschiedene Formulierungen**
  - Martin-Löf'sche Typentheorie (Computational Type Theory)
  - Kalkül der Konstruktionen
  - System F
  - LCF (Logik berechenbarer Funktionen)
  - ⋮
- **Beweissysteme interaktiv mit taktischer Steuerung**
  - **AUTOMATH** (historischer Vorläufer)
  - **Nuprl, MetaPRL** (Computational Type Theory)
  - **Alf / Agda, ...** (Martin-Löf Typentheorie)
  - **Lego**, **Coq** (Kalkül der Konstruktionen)
  - **Cambridge LCF**
- **Viele erfolgreiche Anwendungen**