Übung zur Vorlesung

Inferenzmethoden

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Wintersemester 2010/11

Blatt 1 — Abgabetermin: (4. November 2010)

Aufgabe 1.1 (Semantik)

Die Formel $(\forall x \exists y\ P(x,y)) \wedge \neg(\exists x\ P(x,x)) \wedge (\forall xyz\ (P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow P(x,z))$ ist erfüllbar in der Standardinterpretation der natürlichen Zahlen. Begründen Sie, warum die Formel nicht über einem (nicht leeren) endlichen Universum erfüllbar sein kann.

Aufgabe 1.2 (Matrix-Beweise)

Beweisen Sie folgende Formeln im Matrix-Kalkül und die ersten beiden zusätzlich in Refinement Logic und im Tableaux-Kalkül

Stellen Sie dazu zunächst den annotierten Formelbaum und die zugehörige zweidimensionale Matrixdarstellung auf. Identifizieren Sie alle Konnektionen und alle Pfade durch die Matrix. Zeigen Sie, daß alle Pfade eine solche Konnektion enthalten und geben Sie eine zulässige Substitution an, welche diese Konnektionen komplementär macht.

1.2–a $\mathtt{A} \vee \mathtt{B} \ \Rightarrow\ \neg(\neg\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{B})$

1.2–b $(\exists\mathtt{x}\ \neg\mathtt{Px}) \ \Rightarrow\ \neg(\forall\mathtt{x}\ \mathtt{Px})$

1.2–c $(\forall\mathtt{x,y,z}\ \mathtt{S(x,y)} \wedge \mathtt{S(y,z)} \ \Rightarrow\ \mathtt{G(x,z)}) \ \wedge\ (\forall\mathtt{x,y}\ \mathtt{G(x,y)} \ \Rightarrow\ \mathtt{S(x,y)})$
$\Rightarrow\ \forall\mathtt{a,b,c,d}\ (\mathtt{S(a,b)} \wedge \mathtt{S(c,d)} \wedge \mathtt{S(b,c)} \ \Rightarrow\ (\exists\mathtt{u}\ \mathtt{G(a,u)}))$

1.2–d $(\forall\mathtt{x,y,z}\ \mathtt{S(x,y)} \wedge \mathtt{S(y,z)} \ \Rightarrow\ \mathtt{G(x,z)}) \ \wedge\ (\forall\mathtt{x,y}\ \mathtt{G(x,y)} \ \Rightarrow\ \mathtt{S(x,y)})$
$\Rightarrow\ \forall\mathtt{a,b,c,d}\ (\mathtt{S(a,b)} \wedge \mathtt{S(c,d)} \wedge \mathtt{S(b,c)} \ \Rightarrow\ \mathtt{G(a,d)})$

Konstruieren Sie aus dem fertigen Matrixbeweis die induzierte Reduktionsordnung, linearisieren Sie diese und erzeugen Sie daraus einen Tableauxbeweis.

Aufgabe 1.3 (Logik-Puzzle zum Tüfteln)

Lösen Sie das sogenannte “Agatha Murder Puzzle” mithilfe des Matrix-Verfahrens.

```
1. Agatha hates Charles
2. Agatha hates herself
3. If a person is not richer than Agatha then the Butler hates that person
4. If Agatha hates somebody then Charles does not hate that person
5. If Agatha hates somebody then the Butler hates that person too
6. Everyone likes at least one of Agatha, the Butler, or Charles
7. Nobody kills a person that is not richer
8. If you kill someone, you must hate that person
Agatha is dead.  Show that neither Charles nor the Butler killed her
```

Versuchen Sie zunächst ein informales, logisches Argument. Formulieren Sie dann obige Aussagen in der Logik erster Stufe und konstruieren Sie daraus schrittweise den Matrixbeweis.

Aufgabe 1.4 (Eigenschaften der Logik erster Stufe)

Beweisen Sie den Satz von Löwenheim: *In der der Logik erster Stufe kann jede erfüllbare Formel in einem abzählbaren Universum erfüllt werden.*

Was bedeutet dieser Satz für die Anwendbarkeit der Logik erster Stufe?

Lösung 1.1 Zunächst einmal eine grobe Idee:

Die Formel besteht im Endeffekt aus drei Axiomen, die das Prädikat P charakterisieren. $P(x,y)$ könnte man auch lesen als $x<y$ (so die ursprüngliche Formulierung der Aufgabe). Dann sagt Axiom 1, daß es zu jedem Objekt ein größeres gibt und nach Axiom 2 kann dieses nicht das Objekt selbst sein. Axiom 3, die Transitivität, verbietet zusammen mit Axiom 2 die Vergleichbarkeit von Objekten im Kreis. Dies bedeutet, daß nach Axiom 1 zu jedem Objekt ein *neues* Objekt im Universum existieren muß, das größer ist. In endlichen Universen ist dies nicht möglich.

Dieses Argument bezieht sich aber zu sehr auf die konkrete Lesart P als "kleiner" zu interpretieren. Wir müssen zeigen, daß das Argument davon aber gar nicht abhängt und gehen daher zurück auf die Definitionen von Erfüllbarkeit und Interpretationen. Eine Formel F ist erfüllbar, wenn es eine Interpretation $(\iota,\mathcal{U})$ gibt, unter der F wahr ist. Dabei ist die Interpretation der logischen Konnektive festgelegt, aber die Interpretation $\iota(P)$ nicht. Die einzige Bedingung ist, daß $\iota(P)$ eine Funktion auf $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ ist, die Wahrheitswerte als Ergebnis liefert. Der Einfachheit halber schreibe ich im folgenden $\iota(P)(u,v)$, wenn $\iota(P)(u,v)$=`wahr` gemeint ist.

Beweis: Sei $(\iota,\mathcal{U})$ eine Interpretation, welche die drei Teilaxiome der Formel wahr macht.

1. Axiom 1 ($\forall x \exists y\ P(x,y)$) besagt, daß für jedes Objekt $u \in \mathcal{U}$ ein anderes Objekt $v \in \mathcal{U}$ existieren muß, so daß $\iota(P)(u,v)$ gilt.
2. Axiom 2 ($\neg(\exists x\ P(x,x))$) besagt, daß dieses v nicht identisch zu u sein kann, denn es gibt kein $u \in \mathcal{U}$ für das $\iota(P)(u,u)$ gilt.
3. Axiom 3 ($\forall xyz\ \ (P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow P(x,z)$) besagt, daß $\iota(P)$ transitiv ist, also daß aus $\iota(P)(u,v)$ und $\iota(P)(v,w)$ immer $\iota(P)(u,w)$ folgt – für jede Wahl der $u,v,w \in \mathcal{U}$.

Wir wählen nun ein Objekt $u_1 \in \mathcal{U}$. Dann gibt es nach Axiom ein Objekt u_2 für das $\iota(P)(u_1,u_2)$ gilt, ein Objekt u_3, für das $\iota(P)(u_2,u_3)$ gilt, usw. Nach Axiom 3 gilt dann $\iota(P)(u_i,u_j)$ für alle $i<j$.

Wenn nun $\mathcal{U}$ endlich wäre, also n Elemente hätte, dann müsste das oben konstruierte Objekt u_{n+1} identisch mit einem der u_i für ein $i \leq n$ sein. Da aber wegen der Transitivität $\iota(P)(u_i,u_{n+1)}$ gilt, hätten wir $\iota(P)(u_i,u_i)$, was wegen Axiom 2 aber nicht möglich ist. Also kann $\mathcal{U}$ nicht endlich sein.

P.S. Wenn $\mathcal{U}$ leer ist, dann sind alle drei Axiome trivialerweise wahr. In dem Sinne gibt es ein endliches Universum, über dem die Formel erfüllbar ist. Auf solche pathologischen Fälle muß man achten!

Lösung 1.2

1.2–a `A∨B ⇒ ¬(¬A∧¬B)`

Refinement Logic Der Beweis folgt den äußersten Konnektiven und versucht, Formeln so weit wie möglich zu zerlegen. Dabei ist die Reihenfolge in der Aussagenlogik fast beliebig, aber es empfiehlt sich, Regeln, die zwei Unterziele erzeugen, so spät wir möglich auszuführen.

```
⊢ A∨B ⇒ ¬(¬A∧¬B)                                BY impI
1.  A∨B ⊢ ¬(¬A∧¬B)                              BY notI
1.1.  A∨B, ¬A∧¬B ⊢ ff                           BY andE 2
1.1.1.  A∨B, ¬A,¬B ⊢ ff                         BY orE 1
1.1.1.1.  A, ¬A,¬B ⊢ ff                         BY notE 2
1.1.1.1.1.  A, ¬A,¬B ⊢ A                        BY hypothesis 1
1.1.1.2.  B, ¬A,¬B ⊢                            BY notE 3
1.1.1.1.1.  A, ¬A,¬B ⊢ B                        BY hypothesis 1
```

Tableaux-Beweis

$A \vee B \;\Rightarrow\; \neg(\neg A \wedge \neg B)^F$	α
$\neg(\neg A \wedge \neg B)^F$	α
$A \vee B^T$	β
$\neg A \wedge \neg B^T$	α
$\neg A^T$	α
$\neg B^T$	α
A^F	
B^F	
$B^T \qquad B^T$	
$\times \qquad \times$	

Matrix-Beweis

Die Matrix wird aus dem Formelbaum aufgebaut. Dabei werden α-Submatrizen nebeneinander geschrieben, β-Submatrizen übereinander und dann werden überflüssige Klammern gestrichen. Es bleibt die folgende Matrix mit zwei Konnektionen.

$$\begin{bmatrix} A^T & A^F & B^T \\ B^T & & \end{bmatrix}$$

In der Matrix gibt es nur zwei Pfade (von links nach rechts!), die jeweils eine Konnektion enthalten. Damit ist die Formel gültig.

1.2–b $(\exists x\ \neg Px) \;\Rightarrow\; \neg(\forall x\ Px)$

$$\begin{bmatrix} P\ a^F & P\ x^T \end{bmatrix}$$

a ist δ-Variable, $\sigma = [a/x]$[1]

Matrix-Beweis

Refinement Logic

$\vdash \exists x\ \neg Px \;\Rightarrow\; \neg(\forall x\ Px)$	BY impI
1. $\exists x\ \neg Px \vdash \neg(\forall x\ Px)$	BY notI
1.1. $\exists x\ \neg Px,\ (\forall x\ Px) \vdash ff$	BY exE 1
1.1.1. $\neg Pa,\ (\forall x\ Px) \vdash ff$	BY notE 1
1.1.1.1. $\neg Pa,\ (\forall x\ Px) \vdash Pa$	BY allE 2 a
1.1.1.1.1. $\neg Pa,\ (\forall x\ Px),\ Pa \vdash Pa$	BY hypothesis 1

Tableaux-Beweis

$\exists x\ \neg Px \;\Rightarrow\; \neg(\forall x\ Px)^F$	α
$\exists x\ \neg Px^T$	$\delta(a)$
$\neg(\forall x\ Px)^F$	α
$(\forall x\ Px)^T$	$\gamma(a)$
$\neg Pa^T$	α
Pa^F	
Pa^T	
$\times$	

[1] In der ursprünglichen Aufgabe stand $\exists x\ \neg Px \;\Rightarrow\; \neg(\forall x\ Px)$. Dann ist a eine γ-Variable und die Beweise verlaufen minimal anders.

1.2–c $(\forall \mathtt{x,y,z}\ \mathtt{S(x,y)} \wedge \mathtt{S(y,z)} \Rightarrow \mathtt{G(x,z)})$
$\wedge\ (\forall \mathtt{x,y}\ \mathtt{G(x,y)} \Rightarrow \mathtt{S(x,y)})$
$\Rightarrow\ \forall \mathtt{a,b,c,d}\ (\mathtt{S(a,b)} \wedge \mathtt{S(c,d)} \wedge \mathtt{S(b,c)} \Rightarrow (\exists \mathtt{u}\ \mathtt{G(a,u)}))$

Matrix-Beweis

$$\left[\begin{array}{llllll} \mathtt{S}(x,y)^F & \mathtt{G}(x,y)^F & \mathtt{S(a,b)}^T & \mathtt{S(c,d)}^T & \mathtt{S(b,c)}^T & \mathtt{G}(\mathtt{a},u)^F \\ \mathtt{S}(y,z)^F & \mathtt{S}(x,y)^T & & & & \\ \mathtt{G}(x,z)^T & & & & & \end{array}\right]$$

$\mathtt{a,b,c,d}$ sind δ-Variablen, $\sigma = [\mathtt{a}/x, \mathtt{b}/y, \mathtt{c}/z, \mathtt{c}/u]$

Es gibt 6 Pfade, die durch die drei angegebenen Konnektionen komplementär gemacht werden. Dabei spielt die zweite Klausel keine Rolle, denn alle drei Literale der ersten Klausel sind mit dem Literal einer "Einerklausel" konnektiert.

P.S. in einem "sieht man direkt"-Matrixbeweis gibt man nur die Konnektionen an, die tatsächlich benötigt werden. Dann kann man die Komplementarität unter σ leicht prüfen und sieht anhand des Bildes, dass alle Pfade abgedeckt sind.

1.2–d $(\forall \mathtt{x,y,z}\ \mathtt{S(x,y)} \wedge \mathtt{S(y,z)} \Rightarrow \mathtt{G(x,z)})$
$\wedge\ (\forall \mathtt{x,y}\ \mathtt{G(x,y)} \Rightarrow \mathtt{S(x,y)})$
$\Rightarrow\ \forall \mathtt{a,b,c,d}\ (\mathtt{S(a,b)} \wedge \mathtt{S(c,d)} \wedge \mathtt{S(b,c)} \Rightarrow \mathtt{G(a,d)})$

Matrix-Beweis: Hier ist eine Klauselkopie erforderlich, die wir mit Indizes darstellen

$$\left[\begin{array}{llllll} \mathtt{S}(x,y)^F & \mathtt{G}(x',y')^F & \mathtt{S(a,b)}^T & \mathtt{S(c,d)}^T & \mathtt{S(b,c)}^T & \mathtt{G(a,d)}^F \\ \mathtt{S}(y,z)^F & \mathtt{S}(x',y')^T & & & & \\ \mathtt{G}(x,z)^T & & & & & \end{array}\right]$$

$\mathtt{a,b,c,d}$ sind δ-Variablen, $\sigma = [\mathtt{a}/x^1, \mathtt{c}/y^1, \mathtt{d}/z^1, \mathtt{a}/x', \mathtt{c}/y'\mathtt{a}/x^2, \mathtt{b}/y^2, \mathtt{c}/z^2]$

Mit diesen Konnektionen sind alle Pfade abgedeckt (Das kann man mit guter Vorstellungskraft direkt sehen – ansonsten ist es besser, die Matrix zu expandieren)

Lösung 1.3

Informal: Wenn Charles der Mörder wäre, müsste er Agatha hassen (8). Da Agatha sich selbst haßt (2) kann Charles sie nicht hassen (4).

Wenn der Butler der Mörder wäre, dann wäre Agatha reicher als er (7). Damit müsste der Buter sich selbst hassen (3). Außerdem haßt er Agatha und Charles, weil Agatha diese beiden haßt (1,2) und der Butler loyal ist (5). Damit ist Voraussetzung (6) verletzt ... der Butler mag weder Agatha, noch Charles, noch sich selbst.

Ausformuliert:

```
   Agatha hates Charles
∧ Agatha hates Agatha
∧ ∀p ¬(p is richer than Agatha) ⇒ The Butler hates p
∧ ∀p Agatha hates p ⇒ ¬(Charles hates p)
∧ ∀p Agatha hates p ⇒ The Butler hates p
∧ ∀p p likes Agatha ∨ p likes The Butler ∨ p likes Charles
∧ ∀p,q  p kills q ⇒ ¬(p is richer than q)
∧ ∀p,q  p kills q ⇒ p hates q
∧ ∀p,q  p likes q ⇔ ¬(p hates q)
⇒ ¬(The Butler kills Agatha) ∧ ¬(Charles kills Agatha)
```

Vereinfacht

```
   H(a,c)
∧ H(a,a)
∧ ∀p ¬R(p,a)  ⇒  H(b,p)
∧ ∀p H(a,p)   ⇒ ¬H(c,p)
∧ ∀p H(a,p)   ⇒  H(b,p)
∧ ∀p ¬H(p,a) ∨ ¬H(p,b) ∨ ¬H(p,c)
∧ ∀p,q  K(p,q) ⇒ ¬R(p,q)
∧ ∀p,q  K(p,q) ⇒ H,p,q)
⇒ ¬K(b,a) ∧ ¬K(c,a)
```

Im Matrixbeweis muß eine Klauselkopie eingesetzt werden

$$\left[\begin{array}{cccccccccc}
\mathtt{H(a,c)}^T & \mathtt{H(a,a)}^T & \mathtt{R}(p,\mathtt{a})^T & \mathtt{H(a,}p_1\mathtt{)}^F & \mathtt{H(a,}p_2\mathtt{)}^F & \mathtt{H(}p_3\mathtt{,a)}^F & \mathtt{K}(p_4,q)^F & \mathtt{K}(p_5,q_1)^F & \mathtt{K(b,a)}^T \\
 & & \mathtt{H(b,}p\mathtt{)}^T & \mathtt{H(c,}p_1\mathtt{)}^F & \mathtt{H(b,}p_2\mathtt{)}^T & \mathtt{H(}p_3\mathtt{,b)}^F & \mathtt{R}(p_4,q)^F & \mathtt{H}(p_5,q_1)^T & \mathtt{K(c,a)}^T \\
 & & & & & \mathtt{H(}p_3\mathtt{,c)}^F & & &
\end{array}\right]$$

Es gibt nur γ-Variablen und Konstanten, $\sigma = [\mathtt{c}/p_5, \mathtt{a}/q_1, \mathtt{a}/p_1, \mathtt{b}/p_4, \mathtt{a}/q, \mathtt{b}/p, \mathtt{b}/p_3, \mathtt{a}/p_2^1, \mathtt{c}/p_2^2]$

Lösung 1.4

Zum Beweis des Satzes von Löwenheim verwenden wir Teile des Vollständigkeitsbeweises für analytische Tableaux.

Es sei X eine erfüllbare Formel. Dann können wir für X ein vollständiges Tableau $\mathcal{T}$ mit der systematischen Beweismethode konstruieren. Da X erfüllbar ist, kann $\mathcal{T}$ nicht geschlossen sein, besitzt also mindestens einen Zweig ϑ, der eine Hintikka Folge ist. Wie im Vollständigkeitsbeweis gezeigt, ist ϑ damit erfüllbar durch eine Interpretation über dem Universum der Terme, also über einem abzählbaren Universum. Da X zum Zweig ϑ gehört, ist X über demselben Universum erfüllbar.

Bedeutung: Logik erster Stufe kann überabzählbare Universen nicht von abzählbaren trennen. Für alle (logischen) Aussagen, die über den reellen Zahlen nicht gelten, gibt es bereits ein abzählbares Gegenmodell (z.B. über den rationalen Zahlen).

Anmerkungen:

1. Das Argument hier ignoriert die Tatsache, daß wir Tableaux bisher nur mit signierten Formeln diskutiert haben und die Beweise nur über die Formel X^F geführt haben. Man kann aber die Vorzeichen fallen lassen (eines dabei durch Negation ersetzen) ohne daß sich das Argument des Beweises ändert.

2. Ich habe die Aussage eines Teilbeweises im Vollständigkeitsbeweis verallgemeinert. Statt

   X gültig $\Rightarrow$ X^F hat vollständiges Tableau

   benötigen wir

   für jede Formel X hat X^F hat vollständiges Tableau.

   Ein Blick auf die systematische Methode zeigt, daß die Gültigkeit für die Konstruktion des vollständiges Tableaus nicht benötigt wird.