Übung zur Vorlesung

Inferenzmethoden

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Wintersemester 2010/11

Blatt 3 — Abgabetermin: —

Aufgabe 3.1 (Prädikatenlogisches Extensionsverfahren)

Beweisen Sie die folgenden Matrizen mit Hilfe des allgemeinen Extensionsverfahrens.

$$\begin{bmatrix} P(x)^F & P(y)^T & P(f(f(z)))^T \\ & P(f(y))^F & P(f(a))^T \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} Q(a,b,c,d)^T & Q(x,y,z,v)^F & Q(c,d,a,b)^F & Q(b,c,d,a)^F \\ & Q(v,x,y,z)^T & & \\ & Q(z,v,x,y)^T & & \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3.2 (Beweisverfahren)

$$\begin{bmatrix} R^F & P^F & Q^F & R^F & P^T & P^T \\ Q^T & R^T & R^T & Q^F & Q^T & Q^F \\ & & & P^F & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} P(a)^T & P(x)^F & P(ffa)^F & Q(a)^F & Q(fa)^F \\ & P(fx)^T & & & \\ & Q(x)^T & & & \end{bmatrix}$$

Beweisen Sie Allgemeingültigkeit der folgenden Matrizen mit Hilfe der folgenden Verfahren.

3.2–a Allgemeines Extensionsverfahren

3.2–b Inverse Methode

3.2–c Resolution

Aufgabe 3.3 (Reduktionen)

Wenden Sie die Reduktionen MULT, PURE, TAUT, SUBS, UNIT, ISOL auf die folgende Matrix solange an, bis diese nicht weiter reduziert werden kann.

$$\begin{bmatrix} C^T & C^F & C^F & A^F & D^F & D^T & F^F & H^F & D^T & H^F & C^F \\ A^T & D^T & F^T & H^F & C^F & E^F & A^T & A^T & C^T & C^F & D^T \\ & H^F & & & A^T & & & & & E^T & \\ & & & & H^T & & & & & & \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3.4 (Davis-Putnam Verfahren)

Zeigen Sie mit dem Davis-Putnam-Verfahren, daß die folgende Matrix allgemeingültig ist.

$$\begin{bmatrix} A^F & A^T & A^T & A^F & A^T & A^F \\ B^F & B^T & B^F & B^T & B^T & B^T \\ & C^T & & C^T & C^F & C^F \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3.5 (Pigeonhole Prinzip / Schubfachprinzip – zeitaufwendig)

Gegeben sei die (unendliche) Folge $P_1, P_2, \ldots$ von Mengen von Klauseln wobei P_n für $n{>}0$ definiert ist als $P_n = (\bigcup_{i=1}^{n+1}\{\{\overline{x_{1i}}, \ldots, \overline{x_{ni}}\}\}) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{1\leq j<k\leq n+1}\{\{x_{ij}, x_{ik}\}\})$.

Interpretiert man die aussagenlogische Variable x_{ij} als 'Taubenschlag i ist durch die Taube j belegt', dann formalisiert P_n die Aussage, daß $n+1$ Tauben nicht in n Taubenschläge passen.

3.5–a Geben Sie P_2 und P_3 als Matrix an. (x_{ij} steht kurz für ${x_{ij}}^F$, $\overline{x_{ij}}$ für ${x_{ij}}^T$)

3.5–b Beweisen Sie die Gütltigkeit von P_2. Wählen Sie dazu $\{\overline{x_{11}}, \overline{x_{21}}\}$ als Startklausel.

3.5–c Zeigen Sie über ein Symmetrieargument, daß bereits der Beweis von $\overline{x_{11}}$ einen Beweis für die gesamte Matrix darstellt.

3.5–d Führen Sie einen Resolutionsbeweis für P_3 und geben Sie eine Abschätzung der Anzahl der Resolutionsschritte für P_n ab.

3.5–e Beweisen Sie P_3 mit dem Davis-Putman Verfahren und schätzen Sie die Anzahl der Schritte dieses Verfahrens für P_n ab.

3.5–f Wie könnte man das Beweisverfahren unter Verwendung der Erkenntnis aus Teil (c) beschleunigen?

Lösung 3.1

Bei der Lösung dieser Aufgabe ist zu berücksichtigen, daß Bezeichner a, b, c, d, e.. für Konstanten (δ-Variablen) stehen und $x, y, z, u, v, w,$ .. für (γ-)Variablen.

3.1–a
$$\begin{bmatrix} \boxed{P(x)^F} & P(y)^T . & P(f(f(z)))^T . \\ & \boxed{P(f(y))^F} & P(f(a))^T . \end{bmatrix}$$

Entwicklung der Substitutionen während der Beweisführung
(1) $[y/x]$
(2) $[f(z)/y, y/x]$ bzw. nach Einsetzen $[f(z)/y, f(z)/x]$
(3) $[f(a)/x, f(z)/y, f(z)/x]$ bzw. nach Auflösen $[a/z, f(a)/y, f(a)/x]$

3.1–b Erster Versuch

$$\begin{bmatrix} \boxed{Q(a,b,c,d)^T} & Q(x,y,z,v)^F . & Q(c,d,a,b)^F & Q(b,c,d,a)^F \\ & \boxed{Q(v,x,y,z)^T} & & \\ & Q(z,v,x,y)^T & & \end{bmatrix}$$

Der erste Schritt führt zur Substitutionen $[a/x, b/y, c/z, d/v]$. Im zweiten Schritt ist keine Extension möglich für das Literal $Q(v,x,y,z)^T$, da die Anwendung der Substitution dieses in $Q(d,a,b,c)^T$ transformiert

Ein Kopie der zweiten Klausel mit den γ-Variablen ist erforderlich. (Alle anderen Klauseln haben nur δ-Variablen)

$$\begin{bmatrix} \boxed{Q(a,b,c,d)^T} & Q(x,y,z,v)^F . & Q(x',y',z',v')^F & Q(c,d,a,b)^F & Q(b,c,d,a)^F \\ & Q(v,x,y,z)^T & Q(v',x',y',z')^T & & \\ & Q(z,v,x,y)^T & Q(z',v',x',y')^T & & \end{bmatrix}$$

Wieder führt der erste Schritt führt zur Substitutionen σ= $[a/x, b/y, c/z, d/v]$, was wir der Übersicht halber direkt einsetzen.

$$
\left[\begin{array}{ccccc}
\boxed{Q(a,b,c,d)^T} & Q(x,y,z,v)^F\,. & Q(x',y',z',v')^F\,. & Q(c,d,a,b)^F & Q(b,c,d,a)^F \\
 & \boxed{Q(d,a,b,c)^T} & Q(v',x',y',z')^T & & \\
 & Q(c,d,a,b)^T & Q(z',v',x',y')^T & &
\end{array}\right]
$$

Im zweiten Schritt erweitert σ zu $[a/x, b/y, c/z, d/v, d/x', a/y', b/z', c/v']$, was wieder eingesetzt wird.

$$
\left[\begin{array}{ccccc}
\boxed{Q(a,b,c,d)^T} & Q(a,b,c,d)^F\,. & Q(d,a,b,c)^F\,. & Q(c,d,a,b)^F\,. & Q(b,c,d,a)^F \\
 & \boxed{Q(d,a,b,c)^T} & \boxed{Q(c,d,a,b)^T} & & \\
 & Q(c,d,a,b)^T & Q(b,c,d,a)^T & &
\end{array}\right] \sim
$$

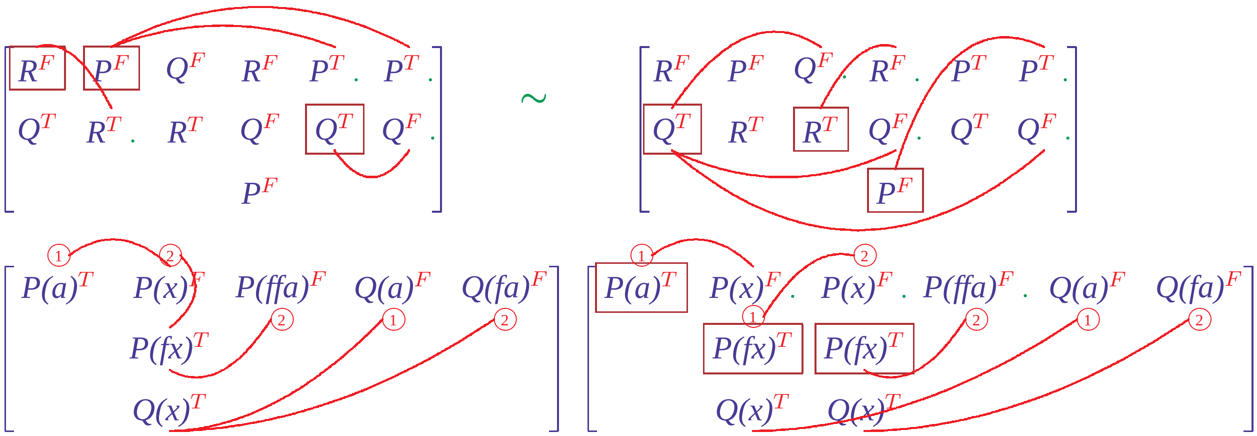
$$
\left[\begin{array}{ccccc}
\boxed{Q(a,b,c,d)^T} & Q(a,b,c,d)^F\,. & Q(d,a,b,c)^F\,. & Q(c,d,a,b)^F & Q(b,c,d,a)^F\,. \\
 & \boxed{Q(d,a,b,c)^T} & Q(c,d,a,b)^T\,. & & \\
 & Q(c,d,a,b)^T & \boxed{Q(b,c,d,a)^T} & &
\end{array}\right] \sim^2
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc}
\boxed{Q(a,b,c,d)^T} & Q(a,b,c,d)^F\,. & Q(d,a,b,c)^F & Q(c,d,a,b)^F & Q(b,c,d,a)^F\,. \\
 & Q(d,a,b,c)^T\,. & Q(c,d,a,b)^T & & \\
 & \boxed{Q(c,d,a,b)^T} & Q(b,c,d,a)^T & &
\end{array}\right]
$$

Im Verlauf der weiteren Schritte hat sich die Substitution nicht mehr verändert, so daß wir insgesamt 5 Konnektionen haben, die mit $\sigma = [a/x, b/y, c/z, d/v, d/x', a/y', b/z', c/v']$ komplementär werden.

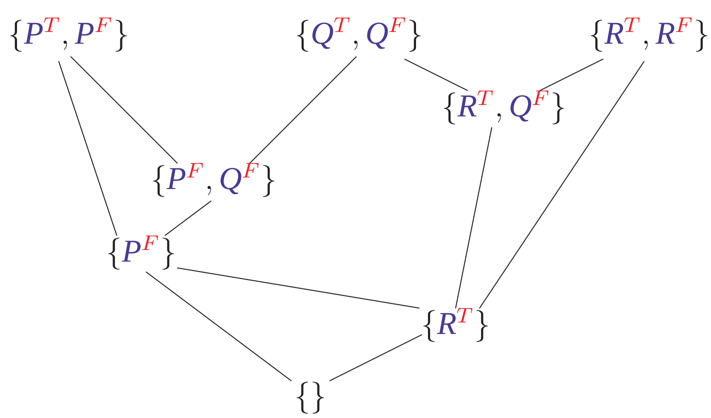
Lösung 3.2

3.2–a Allgemeines Extensionsverfahren



$\sigma = [a/x_1, fa/x_2]$ Explizite Darstellung

3.2–b Inverse Methode: die Beweise sind kurz, aber die Suche nach Beweisen oft mühsam. Bei der Auswahl der Klauseln empfiehlt es sich, jeweils möglichst “kleine” Ergebnisse anzustreben, also Vorgängerknoten zu wählen, bei denen der Rest zuweilen identisch ist (und nur einmal im Resultat erscheint).



Benutzte Klausel

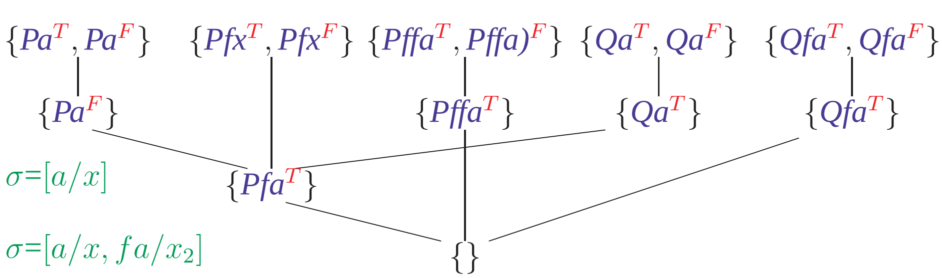
$\{R^F, Q^T\}$

$\{P^T, Q^T\}$

$\{P^T, Q^F\}$

$\{R^F, Q^F, P^F\}$

$\{P^F, R^T\}$



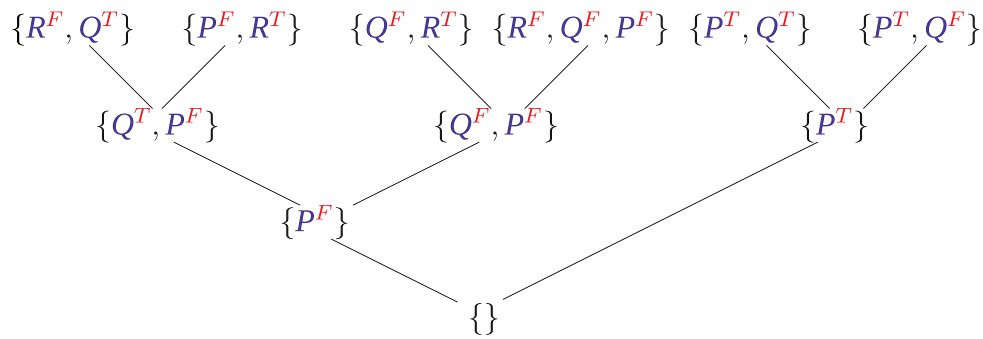
Benutzte Klausel

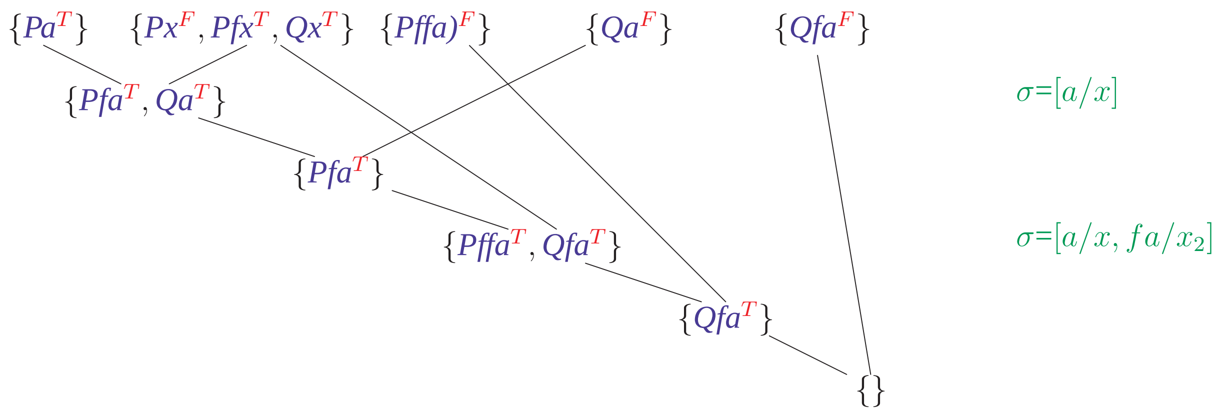
Alle Einerklauseln

$\{Px^F, Pfx^T, Qx^T\}$

$\{Px^F, Pfx^T, Qx^T\}$

3.2–c Resolution: oft einfache Beweisführung und kurze Beweise ... wenn man Normalform hat.





Lösung 3.3

$$\left[\begin{array}{ccccccccccc} C^F & C^T & A^F & C^F & D^F & F^F & D^T & H^F & D^T & H^F & C^F \\ D^T & A^T & H^F & F^T & C^F & A^T & E^F & A^T & C^T & C^F & D^T \\ H^F & & & & A^T & & & & & E^T & \\ & & & & H^T & & & & & & \\ & & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & & \uparrow & \end{array}\right] \vdash_{ISOL(F),ISOL(E)}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} C^F & C^T & A^F & C^F & D^F & D^T & H^F & D^T & C^F \\ D^T & A^T & H^F & A^T & C^F & H^F & A^T & C^T & D^T \\ H^F & & & & A^T & C^F & & & \\ & & & & H^T & & & & \\ \uparrow & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \end{array}\right] \vdash_{SUBS,SUBS}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} C^F & C^T & A^F & C^F & H^F & D^T & C^F \\ D^T & A^T & H^F & A^T & A^T & C^T & D^T \\ H^F & & & & & & \\ \uparrow & & & & & \uparrow & \uparrow \end{array}\right] \vdash_{PURE(\neg D)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} C^T & A^F & C^F & H^F \\ A^T & H^F & A^T & A^T \\ \uparrow & & \uparrow & \end{array}\right] \vdash_{ISOL(C),MULT}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} A^T & A^F & H^F \\ & H^F & A^T \\ & \uparrow & \end{array}\right] \vdash_{PURE(H)} \qquad \left[\begin{array}{c} A^T \end{array}\right]$$

Lösung 3.4

$$\begin{bmatrix} A^F & A^T & A^T & A^F & A^T & A^F \\ B^F & B^T & B^F & B^T & B^T & B^T \\ & C^T & & C^T & C^F & C^F \end{bmatrix} \vdash_{SPLIT(A)}$$

Fall 1:

$$\begin{bmatrix} B^T & B^F & B^T \\ C^T & & C^F \end{bmatrix} \vdash_{UNIT(B),UNIT(C)} \begin{bmatrix} \square & B^F & C^F \end{bmatrix}$$

Fall 2:

$$\begin{bmatrix} B^F & B^T & B^T \\ & C^T & C^F \end{bmatrix} \vdash_{UNIT(B),UNIT(C)} \begin{bmatrix} B^F & \square & C^F \end{bmatrix}$$

Lösung 3.5

3.5–a

$$\begin{bmatrix} \overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{13}} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{21} & x_{22} \\ \overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{23}} & x_{12} & x_{13} & x_{13} & x_{22} & x_{23} & x_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{13}} & \overline{x_{14}} & x_{11} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{21} & x_{21} & x_{22} & x_{22} & x_{23} & x_{31} & x_{31} & x_{31} & x_{32} & x_{32} & x_{33} \\ \overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{23}} & \overline{x_{24}} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{13} & x_{14} & x_{14} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{23} & x_{24} & x_{24} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{33} & x_{34} & x_{34} \\ \overline{x_{31}} & \overline{x_{32}} & \overline{x_{33}} & \overline{x_{34}} & & & & & & & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

3.5–b

$$\begin{bmatrix} \overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{13}} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{21} & x_{22} \\ \overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{23}} & x_{12} & x_{13} & x_{13} & x_{22} & x_{23} & x_{23} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{13}} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{21} & x_{22} \\ \overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{23}} & x_{12} & x_{13} & x_{13} & x_{22} & x_{23} & x_{23} \end{bmatrix}$$

3.5–c Die Beweisketten sind praktisch "dieselben".

3.5–d Die Anzahl der Schritte muß exponentiell in n sein. Siehe *A. Haken. "The intractability of resolution", Theoretical Computer Science 39:253–275, 1985.*

3.5–e Ich führe die Spaltungen und Reduktionen vorrangig mit den Variablen durch, die in P_2 nicht vorkommen. Dies hilft später bei der Abschätzung der Laufzeit für P_n

$$\left[\begin{array}{l} \overline{x_{11}}\ \overline{x_{12}}\ \overline{x_{13}}\ \overline{x_{14}}\ x_{11}\ x_{11}\ x_{11}\ x_{12}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{21}\ x_{21}\ x_{21}\ x_{22}\ x_{22}\ x_{23}\ x_{31}\ x_{31}\ x_{31}\ x_{32}\ x_{32}\ x_{33} \\ \overline{x_{21}}\ \overline{x_{22}}\ \overline{x_{23}}\ \overline{x_{24}}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{14}\ x_{22}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{24}\ x_{32}\ x_{33}\ x_{34}\ x_{33}\ x_{34}\ x_{34} \\ \overline{x_{31}}\ \overline{x_{32}}\ \overline{x_{33}}\ \overline{x_{34}} \end{array}\right] \vdash_{SPLIT(x_{34})}$$

Fall 1:

$$\left[\begin{array}{l} \overline{x_{11}}\ \overline{x_{12}}\ \overline{x_{13}}\ \overline{x_{14}}\ x_{11}\ x_{11}\ x_{11}\ x_{12}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{21}\ x_{21}\ x_{21}\ x_{22}\ x_{22}\ x_{23}\ x_{31}\ x_{31}\ x_{32} \\ \overline{x_{21}}\ \overline{x_{22}}\ \overline{x_{23}}\ \overline{x_{24}}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{14}\ x_{22}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{24}\ x_{32}\ x_{33}\ x_{33} \\ \overline{x_{31}}\ \overline{x_{32}}\ \overline{x_{33}} \end{array}\right] \vdash_{SPLIT(x_{33})}$$

Fall 1.1:

$$\left[\begin{array}{l} \overline{x_{11}}\ \overline{x_{12}}\ \overline{x_{13}}\ \overline{x_{14}}\ x_{11}\ x_{11}\ x_{11}\ x_{12}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{21}\ x_{21}\ x_{21}\ x_{22}\ x_{22}\ x_{23}\ x_{31} \\ \overline{x_{21}}\ \overline{x_{22}}\ \overline{x_{23}}\ \overline{x_{24}}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{14}\ x_{22}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{24}\ x_{32} \\ \overline{x_{31}}\ \overline{x_{32}} \end{array}\right] \vdash_{SPLIT(x_{32})}$$

Fall 1.1.1:

$$\left[\begin{array}{l} \overline{x_{11}}\ \overline{x_{12}}\ \overline{x_{13}}\ \overline{x_{14}}\ x_{11}\ x_{11}\ x_{11}\ x_{12}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{21}\ x_{21}\ x_{21}\ x_{22}\ x_{22}\ x_{23} \\ \overline{x_{21}}\ \overline{x_{22}}\ \overline{x_{23}}\ \overline{x_{24}}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{14}\ x_{22}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{24} \\ \overline{x_{31}} \end{array}\right] \vdash_{PURE(\overline{x_{31}})}$$

$$\left[\begin{array}{l} \overline{x_{12}}\ \overline{x_{13}}\ \overline{x_{14}}\ x_{11}\ x_{11}\ x_{11}\ x_{12}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{21}\ x_{21}\ x_{21}\ x_{22}\ x_{22}\ x_{23} \\ \overline{x_{22}}\ \overline{x_{23}}\ \overline{x_{24}}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{14}\ x_{22}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{24} \end{array}\right] \vdash_{PURE(x_{11}),PURE(x_{21})}$$

$$\left[\begin{array}{l} \overline{x_{12}}\ \overline{x_{13}}\ \overline{x_{14}}\ x_{12}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{22}\ x_{22}\ x_{23} \\ \overline{x_{22}}\ \overline{x_{23}}\ \overline{x_{24}}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{14}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{24} \end{array}\right]$$

Damit haben wir im Fall 1.1.1 die Teilmatrix auf ein modifiziertes P_2 reduziert.

Fall 1.1.2:

$$\left[\begin{array}{l} \overline{x_{11}}\ \overline{x_{13}}\ \overline{x_{14}}\ x_{11}\ x_{11}\ x_{11}\ x_{12}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{21}\ x_{21}\ x_{21}\ x_{22}\ x_{22}\ x_{23}\ x_{31} \\ \overline{x_{21}}\ \overline{x_{23}}\ \overline{x_{24}}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{14}\ x_{22}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{24} \\ \overline{x_{31}} \end{array}\right] \vdash_{PURE(x_{12}),PURE(x_{22})}$$

$$\left[\begin{array}{l} \overline{x_{11}}\ \overline{x_{13}}\ \overline{x_{14}}\ x_{11}\ x_{11}\ x_{13}\ x_{21}\ x_{21}\ x_{23}\ x_{31} \\ \overline{x_{21}}\ \overline{x_{23}}\ \overline{x_{24}}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{14}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{24} \\ \overline{x_{31}} \end{array}\right] \vdash_{UNIT(x_{31}),PURE(x_{31})}$$

$$\left[\begin{array}{l} \overline{x_{11}}\ \overline{x_{13}}\ \overline{x_{14}}\ x_{11}\ x_{11}\ x_{13}\ x_{21}\ x_{21}\ x_{23} \\ \overline{x_{21}}\ \overline{x_{23}}\ \overline{x_{24}}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{14}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{24} \end{array}\right]$$

Damit haben wir im Fall 1.1.2 die Teilmatrix auf ein modifiziertes P_2 reduziert.

Fall 1.2:

$$
\begin{bmatrix}
\overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{14}} & x_{11} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{21} & x_{21} & x_{22} & x_{22} & x_{23} & x_{31} & x_{31} & x_{32} \\
\overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{24}} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{13} & x_{14} & x_{14} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{23} & x_{24} & x_{24} & x_{32} & & \\
\overline{x_{31}} & \overline{x_{32}} & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix} \vdash_{PURE(x_{13}),PURE(x_{23})}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{14}} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{21} & x_{22} & x_{31} & x_{31} & x_{32} \\
\overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{24}} & x_{12} & x_{14} & x_{14} & x_{22} & x_{24} & x_{24} & x_{32} & & \\
\overline{x_{31}} & \overline{x_{32}} & & & & & & & & & &
\end{bmatrix} \vdash_{UNIT(x_{31}),SUBS(x_{31}),PURE(x_{31})}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{14}} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{21} & x_{22} & x_{32} \\
\overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{24}} & x_{12} & x_{14} & x_{14} & x_{22} & x_{24} & x_{24} & \\
 & \overline{x_{32}} & & & & & & & &
\end{bmatrix} \vdash_{UNIT(x_{32}),PURE(x_{32})}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{14}} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{21} & x_{22} \\
\overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{24}} & x_{12} & x_{14} & x_{14} & x_{22} & x_{24} & x_{24}
\end{bmatrix}
$$

Damit haben wir im Fall 1.2 die Teilmatrix auf ein modifiziertes P_2 reduziert.

Fall 2:

$$
\begin{bmatrix}
\overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{13}} & x_{11} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{21} & x_{21} & x_{22} & x_{22} & x_{23} & x_{31} & x_{31} & x_{31} & x_{32} & x_{32} & x_{33} \\
\overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{23}} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{13} & x_{14} & x_{14} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{23} & x_{24} & x_{24} & x_{32} & x_{33} & & x_{33} & & \\
\overline{x_{31}} & \overline{x_{32}} & \overline{x_{33}} & & & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix} \vdash_{PURE(x_{14}),PURE(x_{24})}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{13}} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{21} & x_{22} & x_{31} & x_{31} & x_{31} & x_{32} & x_{32} & x_{33} \\
\overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{23}} & x_{12} & x_{13} & x_{13} & x_{22} & x_{23} & x_{23} & x_{32} & x_{33} & & x_{33} & & \\
\overline{x_{31}} & \overline{x_{32}} & \overline{x_{33}} & & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix} \vdash_{UNIT(x_{31}),UNIT(x_{32}),UNIT(x_{33})}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{13}} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{21} & x_{22} & x_{31} & x_{31} & x_{31} & x_{32} & x_{32} & x_{33} \\
\overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{23}} & x_{12} & x_{13} & x_{13} & x_{22} & x_{23} & x_{23} & x_{32} & x_{33} & & x_{33} & &
\end{bmatrix} \vdash_{SUBS(x_{31}),SUBS(x_{32}),SUBS(x_{33})}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{13}} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{21} & x_{22} & x_{31} & x_{32} & x_{33} \\
\overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{23}} & x_{12} & x_{13} & x_{13} & x_{22} & x_{23} & x_{23} & & &
\end{bmatrix} \vdash_{PURE(x_{31}),PURE(x_{32}),PURE(x_{33})}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{13}} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{21} & x_{22} \\
\overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{23}} & x_{12} & x_{13} & x_{13} & x_{22} & x_{23} & x_{23}
\end{bmatrix}
$$

Damit haben wir im Fall 2 die Teilmatrix in 11 Schritten auf P_2 reduziert.

Auch das Davis Putnam Verfahren wird in seiner Rohform exponentiell arbeiten, da der Beweis für P_n in dem von P_{n+1} mehrfach verwendet wird, also die Anzahl der Schritte für P_{n+1} mindestens doppelt so groß wie die der Schritte für P_n ist.

3.5–f Mit einer geeigneten Umbenennungs- und Lemmastrategie könnte man den Beweis für P_n als Lemma führen und dann mehrfach im Beweis für P_{n+1} einsetzen. Damit ist die Rechenzeit für P_{n+1} nur noch polynomiell in n. Details hierzu findet man in *W. Bibel. "Short proofs of pigeonhole formulas based on the connection method", Journal of Automated Reasoning 6:287–297, 1990.*