

# Inferenzmethoden

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Wintersemester 2010/11

Blatt 4 — Abgabetermin: (20. Januar 2011)

## Aufgabe 4.1 (Präfix-Unifikation)

Unifizieren Sie die folgenden Präfix-Strings zunächst informal und anschließend mit den 10 in der Vorlesung angegebenen Transformationsregeln

4.1–a  $aBcD$  und  $aEf$

4.1–b  $a_0A_2a_3$  und  $a_0a_5A_6$  sowie  $a_0A_4$  und  $a_0a_5a_7$  (gleichzeitig)

## Aufgabe 4.2 (Intuitionismus)

Welche der folgenden Aussagen gilt intuitionistisch, welche nur klassisch?

4.2–a  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A \vee B$

4.2–b  $\neg A \vee B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

4.2–c  $\neg\neg(A \vee \neg A)$

4.2–d  $\neg(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow A \vee B$

4.2–e  $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

Geben Sie eine informale Begründung an und konstruieren Sie anschließend die Matrix mit intuitionistischen Präfixen. In den Fällen, in denen ein intuitionistischer Matrixbeweis möglich ist, konstruieren Sie schließlich einen Beweis im intuitionistischen (Block-)Tableau bzw. Sequenzenkalkül.

## Aufgabe 4.3 (Konstruktiver Tableaubeweis)

Der klassische (Block-)Tableaubeweis für die Formel

$$(S \wedge (\neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P)) \Rightarrow (\neg((P \Rightarrow Q) \wedge (T \Rightarrow R)) \Rightarrow (S \wedge \neg\neg P))$$

kann im intuitionistischen Kalkül nicht in der gleichen Reihenfolge erfolgreich durchgeführt werden. Konstruieren Sie einen Beweis für diese Formel im intuitionistischen (Block-)Tableaukalkül.

## Aufgabe 4.4 (Intuitionistische Normalformtransformationen)

Aus der Vorlesung ist bekannt, daß in der konstruktiven Logik eine Formel nicht gültigkeitserhaltend in Klauselnormalform transformiert werden kann, da alle Formeln in disjunktiver Normalform intuitionistisch nicht gültig sind.

Zeigen Sie, daß durch die Hinzunahme intuitionistischer Präfixe eine Normalformtransformation auch für intuitionistische Logik möglich wird, d.h. daß es zu jeder Formel  $F$  eine Normalform-Matrix  $\mathcal{M}$  mit Präfixen gibt, die genau dann einen intuitionistischen Matrixbeweis besitzt, wenn  $F$  intuitionistisch gültig ist.

**Anhang 4.1: Transformationsregeln für  $\mathcal{J}$** 

$R_1$	$\{\varepsilon = \varepsilon \varepsilon\}, \sigma$	$\rightarrow \{\}, \sigma$
$R_2$	$\{\varepsilon = \varepsilon t^+\}, \sigma$	$\rightarrow \{t^+ = \varepsilon \varepsilon\}, \sigma$
$R_3$	$\{Xs = \varepsilon Xt\}, \sigma$	$\rightarrow \{s = \varepsilon t\}, \sigma$
$R_4$	$\{Cs = \varepsilon Vt\}, \sigma$	$\rightarrow \{Vt = \varepsilon Cs\}, \sigma$
$R_5$	$\{Vs = z \varepsilon\}, \sigma$	$\rightarrow \{s = \varepsilon \varepsilon\}, [z/V] \cup \sigma$
$R_6$	$\{Vs = \varepsilon C_1t\}, \sigma$	$\rightarrow \{s = \varepsilon C_1t\}, [\varepsilon/V] \cup \sigma$
$R_7$	$\{Vs = z C_1C_2t\}, \sigma$	$\rightarrow \{s = \varepsilon C_2t\}, [zC_1/V] \cup \sigma$
$R_8$	$\{Vs^+ = \varepsilon V_1t\}, \sigma$	$\rightarrow \{V_1t = V s^+\}, \sigma$
$R_9$	$\{Vs^+ = z^+ V_1t\}, \sigma$	$\rightarrow \{V_1t = V' s^+\}, [z^+V'/V] \cup \sigma$
$R_{10}$	$\{Vs = z Xt\}, \sigma$	$\rightarrow \{Vs = zX t\}, \sigma$ ( $V \neq X$ , und $s=\varepsilon, t \neq \varepsilon$ , oder $X$ Konstante)

- $\mathcal{V}$ : Variablenmenge,  $\mathcal{C}$ : Konstantenmenge,  $\mathcal{V}^*$ : Menge von Hilfsvariablen
- $s, t, z$ : Strings,  $s^+, t^+, z^+$ : nichtleere Strings
- $X$  Einzelsymbol,  $V \neq V_1$  Variablen,  $C, C_1, C_2$  Konstante (Einzelsymbole)
- $V'$  neue Variable, die bisher nicht in  $\sigma$  vorkam

## Lösung 4.1

4.1-a  $aBcD$  und  $aEf$

Informal  $\sigma = [Bc/E, f/D]$

Mit dem Verfahren

$$\begin{aligned}
 & \{aBcD = \varepsilon | aEf\}, \quad \square \\
 \xrightarrow{R_3} & \{BcD = \varepsilon | Ef\}, \quad \square \\
 \xrightarrow{R_8} & \{Ef = B | cD\}, \quad \square \\
 \xrightarrow{R_{10}} & \{Ef = Bc | D\}, \quad \square \\
 \xrightarrow{R_9} & \{D = V | f\}, \quad [BcV/E] \\
 \xrightarrow{R_{10}} & \{D = Vf | \varepsilon\}, \quad [BcV/E] \\
 \xrightarrow{R_5} & \{\varepsilon = \varepsilon | \varepsilon\}, \quad [BcV/E, Vf/D] \\
 \xrightarrow{R_1} & \{\}, \quad [BcV/E, Vf/D]
 \end{aligned}$$

Der Unifikator ist allgemeiner, da er mögliche Überlappungen mitberücksichtigt. Zu überprüfen wäre noch, ob es in einem der Schritte Alternativen gibt, die zu anderen mgus führen.

4.1-b  $a_0A_2a_3$  und  $a_0a_5A_6$  sowie  $a_0A_4$  und  $a_0a_5a_7$  (gleichzeitig)

Informal  $\sigma = [a_5/A_2, a_5a_7/A_4, a_3/A_6]$

Mit dem Verfahren

$$\begin{aligned}
 & \{a_0A_2a_3 = \varepsilon | a_0a_5A_6, a_0A_4 = \varepsilon | a_0a_5a_7\}, \quad \square \\
 \xrightarrow{R_3^{(2\pi)}} & \{A_2a_3 = \varepsilon | a_5A_6, A_4 = \varepsilon | a_5a_7\}, \quad \square \\
 \xrightarrow{R_{10}} & \{A_2a_3 = \varepsilon | a_5A_6, A_4 = a_5 | a_7\}, \quad \square \\
 \xrightarrow{R_{10}} & \{A_2a_3 = \varepsilon | a_5A_6, A_4 = a_5a_7 | \varepsilon\}, \quad \square \\
 \xrightarrow{R_5} & \{A_2a_3 = \varepsilon | a_5A_6, \varepsilon = \varepsilon | \varepsilon\}, \quad [a_5a_7/A_4] \\
 \xrightarrow{R_1} & \{A_2a_3 = \varepsilon | a_5A_6\}, \quad [a_5a_7/A_4] \\
 \xrightarrow{R_{10}} & \{A_2a_3 = a_5 | A_6\}, \quad [a_5a_7/A_4] \\
 \xrightarrow{R_9} & \{A_6 = V | a_3\}, \quad [a_5a_7/A_4, a_5V/A_2] \\
 \xrightarrow{R_{10}} & \{A_6 = Va_3 | \varepsilon\}, \quad [a_5a_7/A_4, a_5V/A_2] \\
 \xrightarrow{R_5} & \{\varepsilon = \varepsilon | \varepsilon\}, \quad [a_5a_7/A_4, a_5V/A_2, Va_3/A_6] \\
 \xrightarrow{R_1} & \{\}, \quad [a_5a_7/A_4, a_5V/A_2, Va_3/A_6]
 \end{aligned}$$

Hier gibt es Alternativen im Schritt 3, die ich vorerst nicht weiterverfolge.

**Lösung 4.2** Ziel dieser Aufgabe ist es, einen Begriff von der intuitionistischen Gültigkeit zu vermitteln. Mit Hilfe des Nachdenkens über den Grund, aus dem die einzelnen Aussagen gelten oder auch nicht gelten, soll dies möglichst hitzig debattiert werden.

4.2-a  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A \vee B$  gilt intuitionistisch **nicht**, da allein aus der Voraussetzung, daß man aus der Wahrheit von  $A$  immer auf diejenige von  $B$  schließen kann, nicht notwendigerweise eine Antwort auf die Frage resultiert, ob dies der Fall ist, weil nun gerade  $A$  nicht gilt oder aber weil  $B$  sowieso gilt. Jeder Beweis für diese Formel muß sich auf Tertium non datur stützen: es kann eben nur eine der zu beweisenden Möglichkeiten geben, wenn die Implikation als wahr angenommen wird.

$$\left[ \begin{array}{ccc} a_0 A_1 a_2 : A^F & a_0 a_5 A_6 : A^T & a_0 a_7 : B^F \\ a_0 A_1 A_3 : B^T & & \end{array} \right]$$

Klassisch ist die Matrix komplementär. Präfixunifikation ist nicht möglich, da wegen der ersten Konnektion die Instanz von  $A_1$  mit  $a_5$  beginnen muß, wegen der zweiten Konnektion aber entweder mit  $a_7$  beginnen oder leer sein muß. Damit ist die Matrix intuitionistisch nicht gültig.

Eine Erhöhung der intuitionistischen Multiplizität (Klausel 1) würde nichts bringen, da die kritische Variable in derselben Klausel steckt.

- 4.2-b  $\neg A \vee B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$  intuitionistisch **gültig**. Im Gegensatz zum ersten Beispiel kann man aus jeder einzelnen der beiden alternativ möglichen Voraussetzungen die Gültigkeit der Implikation folgern: wenn  $A$  nicht gilt, ist sie erfüllt und ebenso wenn  $B$  gilt.

$$\left[ \begin{array}{ccc} a_0 A_2 A_3 : A^F & a_0 a_5 A_6 : A^T & a_0 a_5 a_7 : B^F \\ a_0 A_4 : B^T & & \end{array} \right]$$

Aus klassischer Sicht ist die Matrix identisch mit der obigen. Allerdings sind jetzt die Variablen und Konstanten in den Präfixen anders verteilt.

Präfixunifikation liefert  $\sigma_J = [a_5 a_7 / A_4, a_5 / A_2, a_3 / A_6]$  (siehe Aufgabe 4.1-b). Damit ist die Matrix intuitionistisch komplementär.

Der Sequenzenbeweis ist sehr direkt, wenn man analytisch vorgeht. Die nötigen Regeln sind  $\Rightarrow -R$ ,  $\Rightarrow -R$ ,  $\vee -L$ ,  $\neg -L$  und zweimal *axiom*.

- 4.2-c  $\neg \neg (A \vee \neg A)$  ist intuitionistisch **gültig**. Während man es zwar ablehnt etwas als wahr zu akzeptieren, dessen Gegenteil für widersprüchlich befunden wurde, ist es durchaus legitim, etwas für falsch zu halten dessen Gegenteil nicht falsch sein kann. Der Intuitionist erkennt demnach an, daß es kein Problem geben kann, das nicht entweder selbst wahr ist oder aber dessen Gegenteil wahr ist.

$$\left[ \begin{array}{cc} a_0 A_1 a_3 : A^F & a_0 A_1 a_4 A_5 : A^T \end{array} \right]$$

Klassisch ist die Matrix bereits komplementär. Präfixunifikation ist jedoch nicht möglich. Verwendung einer intuitionistischen Multiplizität ist erforderlich

$$\left[ \begin{array}{cccc} a_0 A_1^1 a_3 : A^F & a_0 A_1^1 a_4 A_5 : A^T & a_0 A_1^2 a_7 : A^F & a_0 A_1^2 a_8 A_9 : A^T \end{array} \right]$$

Präfixunifikation liefert  $\sigma_J = [A_1^1 a_4 / A_1^2, a_7 / A_5]$  (analog zu Aufgabe 4.1-a). Damit ist die Matrix intuitionistisch komplementär.

Der analytische Sequenzenbeweis beginnt  $\neg -R$ , kopiert dann die Formel  $\neg(A \vee \neg A)$  im Antezedent (*Kontraktion-L*), verwendet dann  $\neg -L$  um  $A \vee \neg A$  im Sukzedent zu haben (aber immer noch eine Kopie von  $\neg(A \vee \neg A)$  im Antezedent). Mit  $\vee -R$  (zweite Regel) entsteht  $\neg A$  im Sukzedent. Wir wenden wiederum  $\neg -R$  an und erhalten  $\neg(A \vee \neg A)$ ,  $A$  im Antezedent. Nun wenden wir  $\neg -L$  auf unsere Kopie von  $\neg(A \vee \neg A)$  an und anschließend  $\vee -R$  (erste Regel), was uns schließlich die Sequenz  $A \vdash A$  liefert, die mit der *axiom*-Regel abgeschlossen wird.

Ohne die Kopie von  $\neg(A \vee \neg A)$  ist der Beweis nicht zu führen. Den Hinweis kann man aus dem Matrixbeweis entnehmen.

4.2-d  $\neg(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow A \vee B$  gilt intuitionistisch **nicht**. Es handelt sich hier um eine abgewandelte de-Morgan-Regel, von der bekannt sein sollte, daß sie in der vorliegenden Richtung nur klassisch gilt.

$$\left[ \begin{array}{l} a_0 A_1 a_3 A_4 : A^T \quad a_0 a_8 : A^F \quad a_0 a_9 : B^F \\ a_0 A_1 a_5 A_6 : B^T \end{array} \right]$$

Klassisch ist die Matrix komplementär. Präfixunifikation ist nicht möglich, da die Konstanten der konnektierten Präfixe im Konflikt stehen. Damit ist die Matrix intuitionistisch nicht gültig.

4.2-e  $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$  gilt intuitionistisch **nicht**

$$\left[ \begin{array}{l} a_0 A_1 a_2 A_3 : A^T \quad a_0 A_1 a_2 a_4 : B^F \\ a_0 A_1 A_5 : A^T \end{array} \right]$$

Klassisch ist die Nichtnormalformmatrix komplementär. Beim beweis spielt  $B$  keine Rolle. Präfixunifikation ist nicht möglich, da die Konstanten der Präfixe in der ersten Konnektion im Konflikt stehen. Damit ist die Matrix intuitionistisch nicht gültig.

### Lösung 4.3

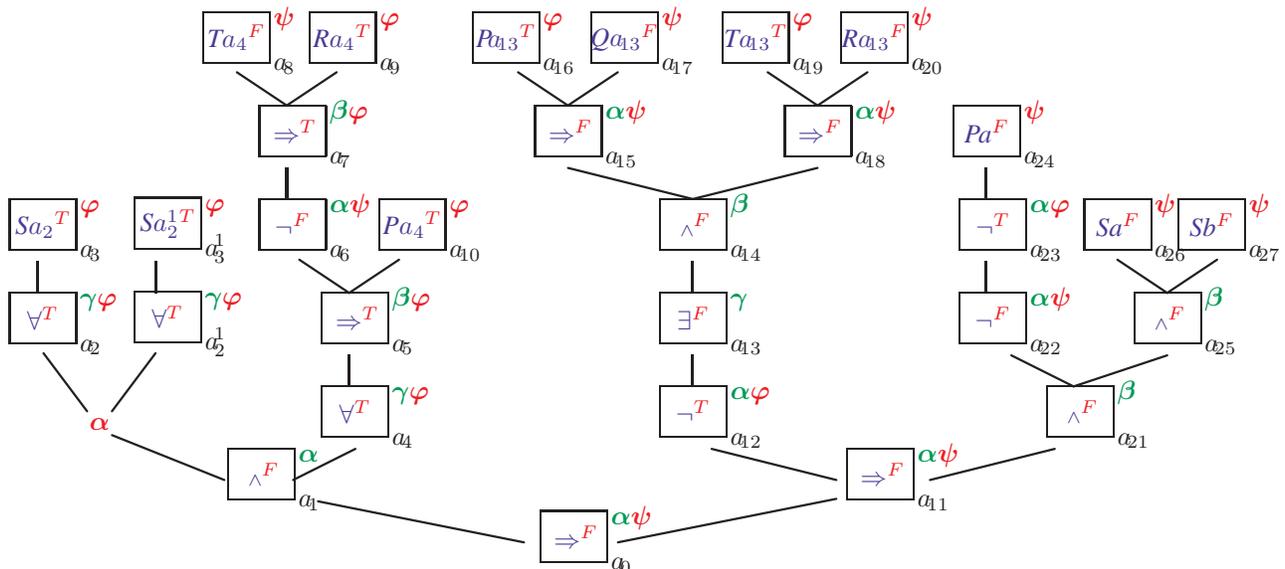
Man könnte den intuitionistischen Beweis durch langes Experimentieren bestimmen, bis die geeignete Reihenfolge gefunden ist. Andererseits wissen wir auch, daß sich Tableau- und Sequenzenbeweise aus Matrixbeweisen rekonstruieren lassen. Da die Formel

$$(S \wedge (\neg(T \Rightarrow R) \Rightarrow P)) \Rightarrow (\neg((P \Rightarrow Q) \wedge (T \Rightarrow R)) \Rightarrow (S \wedge \neg\neg P))$$

eine aussagenlogische Vereinfachung der Beispielformel

$$(\forall x Sx) \wedge (\forall y \neg(Ty \Rightarrow Ry) \Rightarrow Py) \Rightarrow \neg(\exists z(Pz \Rightarrow Qz) \wedge (Tz \Rightarrow Rz)) \Rightarrow \neg\neg Pa \wedge Sa \wedge Sb$$

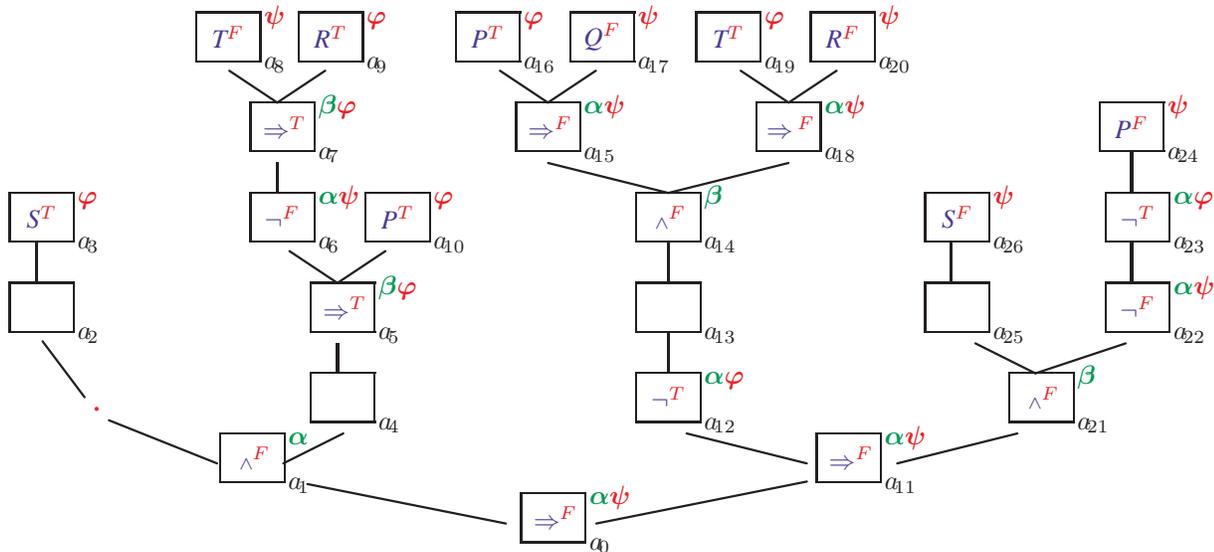
aus Einheit 12 ist, können wir die Reihenfolge der Beweisschritte leicht aus dem Matrixbeweis dieser Formel erzeugen.



In der Vorlesung wurde ein intuitionistischer Matrixbeweis für diese Formel konstruiert, aus dem sich die notwendigen Einschränkungen an die Reihenfolge der Regeln ergeben. Die Präfixe der konnektierten Atome wurden gleich unter der (zyklenfreien) Substitution

$$\sigma_J = [\epsilon/A_2, \epsilon/A_2^1, a_{11}a_{27}/A_3, a_{11}a_{26}/A_3^1, \epsilon/A_4, a_{11}a_{22}/A_5, a_{18}a_{20}/A_7, \epsilon/A_9, a_6a_{15}a_{24}/A_{10}, a_{22}a_6/A_{12}, a_{24}/A_{16}, a_{20}a_8/A_{19}, a_6a_{15}/A_{23}]$$

Das bedeutet, daß die genannten  $\psi$ -Positionen im Beweis jeweils vor den entsprechenden  $\varphi$ -Positionen erscheinen müssen. Traversiert man nun den Formelbaum unter Beachtung dieser Einschränkungen, so ergibt sich eine Regelreihenfolge für den konstruktiven Beweis. Dieser läßt sich dadurch auf die vereinfachte Formel übertragen, indem man aus dem Formelbaum der prädikatenlogischen Formel einfach alle prädikatenlogischen Informationen entfernt, die sonstige Struktur aber beibehält.

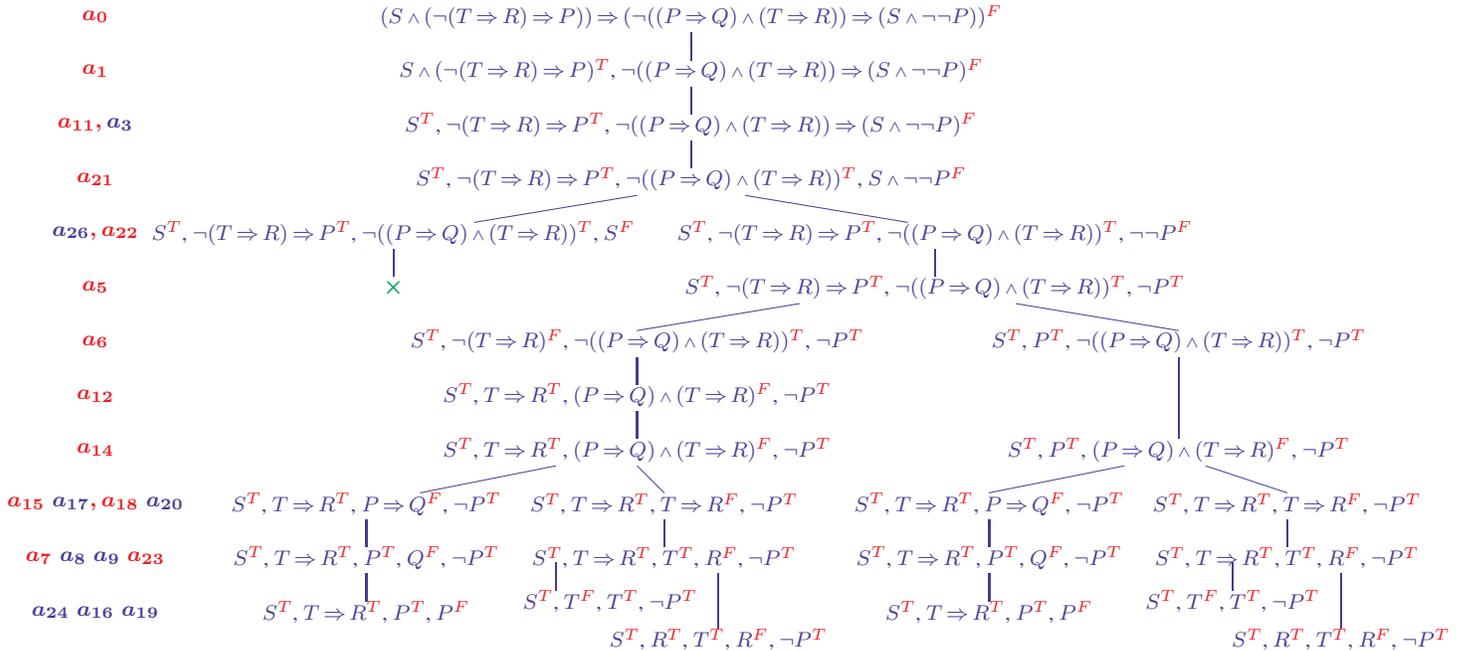


Es verbleibt die Präfixsubstitution

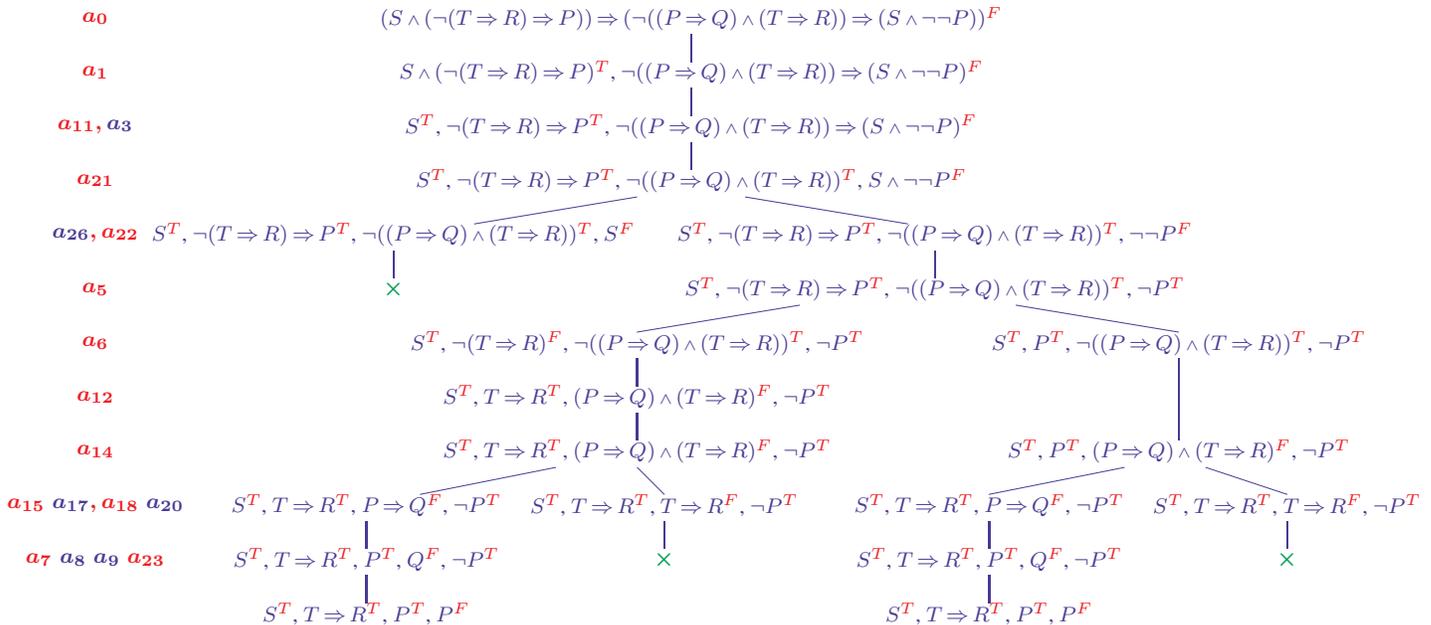
$$\sigma'_J = [a_{11}/A_3, a_{11}a_{22}/A_5, a_{18}a_{20}/A_7, \epsilon/A_9, a_6a_{15}a_{24}/A_{10}, a_{22}a_6/A_{12}, a_{24}/A_{16}, a_{20}a_8/A_{19}, a_6a_{15}/A_{23}],$$

die wiederum folgende mögliche lineare Reihenfolge der Knoten im Beweis liefert:

$$a_0 \ a_1 \ a_{11} \ a_3 \ a_{21} \ a_{26} \ a_{22} \ a_5 \ a_6 \ a_{12} \ a_{14} \ a_{15} \ a_{17} \ a_{18} \ a_{20} \ a_7 \ a_8 \ a_9 \ a_{23} \ a_{24} \ a_{16} \ a_{19}$$



Der obige Beweis lässt sich etwas verkürzen, wenn man keine atomaren Beweise benötigt.



### Lösung 4.4

Normalisierung auf Ebene der Matrizen entspricht im Prinzip der Umkehrung einer Faktorisierungsoperation. Diese ist gültigkeits- und Modellerhaltend, da im Prinzip “dieselben” Pfade in beiden Matrizen existieren.

Einen ausführlichen Beweis findet man im Artikel *Clausal Connection-Based Theorem Proving in Intuitionistic First-Order Logic*. Jens Otten. In B. Beckert, editor, *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods*, TABLEAUX 2005, LNAI 3702, pages 245-261. Springer Verlag, 2005.