Prüfung Kategorientheorie und Typen

Eva Richter

17. Februar 2012

Prüfungsablauf

Die Prüfung wird als mündliche Prüfung abgehalten. Zu Prüfungsbeginn erhält jeder Student eine der unten stehenden Prüfungsfragen und hat eine halbe Stunde Zeit, die Lösung vorzubereiten. Anschließend findet ein halbstündiges Prüfungsgespräch statt.

Prüfungsfragen für die Vorbereitungszeit

1. **Funktoren**

   (a) Geben Sie die Definition eines Funktors an.

   (b) Zeigen Sie, dass das Paar (F_0, F_1) mit

   $$F_0(M) = \mathcal{P}(M) \qquad F_1(f^{op})(A) = f^{-1}(A)$$

   einen Funktor $F : \mathbf{FIN}^{op} \to \mathbf{FBoole}$ von der Kategorie der endlichen Mengen zur Kategorie der endlichen Booleschen Algebren definiert. Dabei sollen M, N endliche Mengen sein, $A \subseteq N$ und $f : M \to N$ eine Funktion.

2. **Initialobjekte**

   (a) Definieren Sie die Begriffe Initialobjekt, Terminalobjekt und Dualität.

   (b) Beweisen Sie, dass zwei initiale Objekte isomorph sind.

   (c) Beweisen Sie, dass $< \mathbb{N}, (zero, succ) >$ initial in der Kategorie der Algebren mit der Signatur $\Sigma = (f^{(0)}, f^{(1)})$ ist.

3. **Retrakte und Hauptpfeile**

   (a) Geben Sie die Definitionen von Epimorphismus, Retraktion und Hauptpfeil an.

   (b) Beweisen Sie, dass in einer Kategorie $\mathbf{C}$ mit Objekten A, B gilt, dass wenn $A < B$ via (f, g), dann ist g ein Epimorphismus und ein Hauptpfeil und f ist ein Monomorphismus.

4. **Scott-Domains**

   (a) Geben Sie die Definitionen für vollständige Halbordnung, gerichtete Mengen, kompakte Elemente und Scott-Topologie an.

   (b) Beweisen Sie, dass wenn eine endliche Menge von kompakten Elementen ein Supremum hat, dann ist es ein kompaktes Element.

5. **Pullbacks**

   (a) Geben Sie die Definitionen von Monomorphismus und Pullback an.

   (b) Beweisen Sie, dass wenn P, p_1, p_2 das Pullback von $f : A \to B$ entlang $g : C \to B$ ist, und wenn g ein Monomorphismus ist, dann ist $p_1 : P \to A$ ebenfalls ein Monomorphismus.

6. **Topoi**

   (a) Definieren Sie den Begriff Topos.

   (b) Zeigen Sie, dass die Kategorie $\mathbf{SET}^{\to}$ der Funktionen ein Terminalobjekt hat und für jedes Paar von Pfeilen Pullbacks besitzt.

7. **Volle und treue Funktoren**

   (a) Geben Sie eine Definition für volle und treue und darstellbare Funktoren.

   (b) Zeigen Sie, dass der Potenzmengenfunktor treu aber nicht voll ist.

   (c) Erläutern Sie die Aussage des Yoneda-Lemmas.

8. **Natürliche Transformationen**

   (a) Geben Sie die Definition für die Hom-Funktoren $Hom(-, B)$ und $Hom(A, -)$ an und definieren Sie, was eine natürliche Transformation ist.

   (b) Sei $\mathbf{C}$ eine kleine Kategorie. Zeigen Sie, dass für jeden $\mathbf{C}$-Pfeil $h : A \to A'$ die Familie $\tau_B = \{Hom_{\mathbf{C}}(h, B)\}_B$ mit $\tau_B : Hom(A, B) \to Hom(A', B)$ eine natürliche Transformation $\tau : Hom(A, -) \dot{\to} Hom(A', -)$ bildet.

9. **Monaden**

   (a) Geben Sie die Definition für eine Monade an.

   (b) Zeigen Sie, dass für ein Monoid M mit Einselement 1 das Tripel (T, η, μ) eine Monade ist. Dabei soll $T : \mathbf{SET} \to \mathbf{SET}$ mit $T(S) = M \times S$ die Objektabbildung des Funktors sein, die Einheit sei gegeben ducrh $\eta_S(s) = (1, s)$ und die Multiplikation $\mu_S(m_1, m_2, s) = (m_1 * m_2, s)$, wobei $*$ die Monoidoperation ist.

10. **Adjungierte Funktoren**

    (a) Definieren Sie, was ein adjungiertes Funktorpaar ist.

    (b) Sei $\mathbf{C}$ eine kartesische Kategorie. Zeigen Sie dass der Produktfunktor $\Pi : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ mit $\Pi(A, B) = A \times B$ und $\Pi(f, g) =< f, g >$ rechtsadjungiert zum Diagonalenfunktor $\Delta : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ mit $\Delta(C) = (C, C)$ ist.

11. **λ-Kalkül**

   (a) Beschreiben Sie, was ein getypter λ-Kalkül $\mathcal{L}$ ist(ohne Gleichheitsaxiome und Reduktionsrelation).

   (b) Begründen Sie, warum $\mathbf{C}(\mathcal{L})$ kartesisch abgeschlossen ist.

12. **Kegel und Limiten**

   (a) Definieren Sie die Begriffe Kegel und Limes.

   (b) Zeigen Sie, dass die Kegel in einer Kategorie $\mathbf{C}$ über einem Diagramm $\mathcal{D}$ eine Kategorie $\mathbf{Cones}_{\mathbf{C},\mathcal{D}}$ bilden.

   (c) Geben Sie die Diagramme an, deren Limiten Initialobjekte, Equalizer, Produkte oder Pullbacks sind.