Kryptographie und Komplexität

Einheit 4.3

Angriffe auf das RSA Verfahren

1. Faktorisierungsangriffe
2. Andere Angriffe
3. Richtlinien für die Schlüsselauswahl

Sicherheit des RSA Verfahrens

- **Sicherheit des geheimen Schlüssels**
  - Einziger bekannter Weg, Schlüssel zu brechen, ist Faktorisierung von n
  - Man kann zeigen, daß beide Probleme äquivalent sind (Beweis folgt)
  - Wie aufwendig ist Faktorisierung?
    - $\mathcal{NP}$-Problem: Standardsuche nach Teilern ist exponentiell in $\|n\|$
    - Primzahltests liefern nur Information, aber keine Faktoren
    - Es gibt Algorithmen, die den Exponenten stark verkleinern
    - Trotzdem braucht man für 1024 Bit mehr als 100.000.000 Jahre
- **Semantische Sicherheit**

  Kann ein Schlüsseltext dechiffriert werden, ohne des Schlüssel zu kennen?
  - Bis heute nicht abschließend geklärt - es gibt Probleme in Einzelfällen
  - Äquivalenz von RSA zum Faktorisierungsproblem nicht nachweisbar

  Wie leicht können RSA-chiffrierte Nachrichten manipuliert werden?
  - Man kann Schlüsseltexte kombinieren ohne den Klartext zu kennen

Sicherheit des RSA Schlüssels $K=(n,p,q,d,e)$

Berechnung des geheimen Schlüssels d aus e, n ist genauso schwer wie die Faktorisierung von $n = p \cdot q$

- **Faktorisierung bricht den geheimen Schlüssel**
  - Wenn Eve n in p und q zerlegen kann, dann kann sie auch $d = e^{-1} \bmod (p-1)(q-1)$ in $\mathcal{O}(\|n\|^2)$ Schritten berechnen
- **Der geheime Schlüssel liefert eine Faktorisierung**

  Sei $s = \max\{t \in \mathbb{N} \mid 2^t \text{ teilt } ed-1\}$, $k = (ed-1)/2^s$ und $a \in \{1 \ldots n-1\}$ beliebig

  1. Ist $gcd(a,n)=1$ so ist $\text{order}_{\mathbb{Z}_n^*}(a^k)=2^i$ für ein $i \leq s$

     Es ist $(a^k)^{2^s} = a^{ed-1} \equiv 1 \bmod n$, also ist $\text{order}_{\mathbb{Z}_n^*}(a^k)$ Teiler von 2^s
  2. Ist $gcd(a,n)=1$, $\text{order}_{\mathbb{Z}_p^*}(a^k) \neq \text{order}_{\mathbb{Z}_q^*}(a^k)$ so ist $gcd(a^{2^t k}-1, n) \in \{p,q\}$ für ein $t<s$

     Wie oben sind $\text{order}_{\mathbb{Z}_p^*}(a^k)$ und $\text{order}_{\mathbb{Z}_q^*}(a^k)$ Teiler von 2^s.

     Sei o.B.d.A. $\text{order}_{\mathbb{Z}_q^*}(a^k) = 2^t < \text{order}_{\mathbb{Z}_p^*}(a^k) \leq 2^s$. Dann gilt

     $(a^k)^{2^t} \equiv 1 \bmod q$ aber $(a^k)^{2^t} \not\equiv 1 \bmod p$ also $gcd(a^{2^t k}-1, n) = q \neq 1$

Sicherheit des RSA Schlüssels $K=(n,p,q,d,e)$

'RP' Algorithmus zur Faktorisierung von n mithilfe von K

– Wähle $a \in \{1...n-1\}$ zufällig

– Ist $g = gcd(a,n) \neq 1$ dann ist g echter Teiler von n

– Ansonsten setze s = max$\{t \in \mathbb{N} \mid 2^t \text{ teilt } ed-1\}$ und $k = (ed-1)/2^s$

– Wenn $gcd(a^{2^t k}-1, n) = q \neq 1$ für ein $t = s-1, s-2, ..., 0$, dann ist q Teiler von n

---

Für zusammengesetzte n ist die Anzahl der $a<n$ mit $gcd(a,n)=1$ und order$_{\mathbb{Z}_p^*}(a^k) \neq$ order$_{\mathbb{Z}_q^*}(a^k)$ ist mindestens $\varphi(n)/2$

– Nach dem chinesischen Restsatz gibt es $g<n$, das $\mathbb{Z}_p^*$ und $\mathbb{Z}_q^*$ erzeugt.

– Falls e = order$_{\mathbb{Z}_p^*}(g^k) >$ order$_{\mathbb{Z}_q^*}(g^k)$ dann sei $0<x<p$ ungerade, $y \leq q-2$ und a Lösung der Kongruenzen $a \equiv g^x \bmod p$, $a \equiv g^y \bmod q$.
Da e Zweierpotenz ist, ist order$_{\mathbb{Z}_p^*}(a^k) = e/gcd(e,x) = e >$ order$_{\mathbb{Z}_q^*}(a^k)$
Da g Erzeugende von $\mathbb{Z}_p^*$ und $\mathbb{Z}_q^*$ ist, gibt es für jedes x, y ein anderes a.

– Falls order$_{\mathbb{Z}_p^*}(g^k)$ = order$_{\mathbb{Z}_q^*}(g^k)$ dann sei $0<x<p$ ungerade, $y \leq q-2$ gerade (bzw. umgekehrt) und $a<n$ mit $a \equiv g^x \bmod p$, $a \equiv g^y \bmod q$.
Es folgt order$_{\mathbb{Z}_p^*}(a^k) \neq$ order$_{\mathbb{Z}_q^*}(a^k)$ für $2 \cdot (p-1)(q-1)/4$ Zahlen.

Wahrscheinlichkeit, in r Iterationen keinen Teiler zu finden, ist 2^{-r}

Es gibt viele Arten von Faktorisierungsangriffen

- **Probedivision**
  - Standardverfahren, gut für kleine Faktoren
- **Methoden für spezielle Zahlen**
  - Pollard $p-1$: Für Faktor p hat $p-1$ nur kleine Primfaktoren
  - Fermat-Methode: Faktoren liegen nahe bei $\sqrt{n}$
- **Pollard ρ**
  - Systematische Suche nach Kollisionen $x \equiv x' \bmod p$ für unbekanntes p
- **Methoden auf Basis quadratischer Kongruenzen**
  - Dixon Random Squares, Quadratische Siebe, Zahlkörpersiebe
- **Elliptische-Kurven-Faktorisierung**
  - Probabilistischer Algorithmus auf Basis elliptscher Kurven

⋮ ⋮

Probedivision

- **Einfacher, leicht zu programmierender Ansatz**
  - Alle Teiler der Zahl n werden der Reihe nach durchgetestet
  - Hochgradig ineffizient — Laufzeit $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(2^{\|n\|})$
- **Optimierungen haben geringen Effekt**
  - Außer 2 nur noch ungerade Zahlen betrachten — $\mathcal{O}(2^{\|n\|})$
  - Suche beschränkt auf Zahlen bis $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ — $\mathcal{O}(2^{\|n\|/2})$
  - Beschränke Suche auf Primzahlen mit dem Sieb des Erathostenes
    Komplexität ist $\mathcal{O}(\sqrt{n}/ln(\sqrt{n}))$ = $\mathcal{O}(2^{\|n\|/2-\log\|n\|})$
- **Nur geeignet für Zahlen mit kleinen Teilern**
  - Suche nach Teilern muß auf Schranke B begrenzt werden
  - Schranke jenseits von 10^7 wenig sinnvoll

Zahlen größer als 10^{14} sollten anders faktorisiert werden

Pollard $p-1$ Algorithmus

Nur für Zahlen mit bestimmten Eigenschaften

- **Wenn $p-1$ für ein $p|n$ nur kleine Primfaktoren hat**
  - Sei k ein beliebiges Vielfaches von $p-1$
  - Nach Satz von Fermat ist $a^k \bmod p = 1$ für jedes a mit $p \nmid a$
  - Da p Teiler von a^k-1 ist, muß $gcd(a^k-1, n)$ echter Teiler von n sein, wenn a^k-1 kein Vielfaches von n ist

  Wie bestimmt man das Vielfache einer unbekannten Zahl?
  - Wenn die Primfaktorzerlegung von $p-1$ nur aus Primzahlpotenzen $q^e \leq B$ für eine Schranke B bestehen, dann ist $B!$ Vielfaches von $p-1$
- **Einfacher Algorithmus**
  - Wähle $a := 2$
  - Berechne $a' := a^{\prod_{j=2}^{B} j} \bmod n$
  - Falls $d := gcd(a'-1, n) > 1$, dann ist d Faktor von n
- **Komplexität abhängig von B** $\mathcal{O}(B \cdot \|B\| \cdot \|n\|^2)$
  - B modulare Potenzierungen mit $j \leq B$ und Berechnung des gcd

Pollard $p-1$: Ablaufbeispiel

- **Faktorisierung von** $n = 6609029$
  - Primfaktoren bis $B = 3$ reichen aus, um Faktoren $p = 7$ und $q = 944147$ zu finden
- **Faktorisierung von** $n = 891404116139$
  - Primfaktoren bis $B = 47$ reichen aus, um Faktoren $p = 944137$ und $q = 944147$ zu finden
  - Da beides Primzahlen sind, benötig Probedivision nahezu 10^6 Schritte
- **Faktorisierung von** $n = 263185729$
  - Primfaktoren bis $B = 8111$ müssen untersucht werden, um Faktoren $p = q = 16223$ zu finden
  - Probedivision ist nahezu genauso schnell

Pollard ρ Algorithmus

- **Suche $x \neq x' \in \mathbb{Z}_n$ mit $1 < gcd(x-x', n) < n$**
  - Ist p Primfaktor von n so gilt $p \leq gcd(x-x', n) < n$ falls $x \equiv x' \bmod p$
  - Bei einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{Z}_n$ mit $1.2\sqrt{p}$ Elementen findet man eine solche Kollision mit Wahrscheinlichkeit 50% (Geburtstagsparadox)
  - Überprüfen aller Paare aus X braucht mehr als $p/2$ gcd-Berechnungen
- **Erzeuge und prüfe Zufallselemente schrittweise**
  - Berechne Folge $x_1, x_2, \ldots$ mit $x_{k+1} := f(x_k) \bmod n$ (f Zufallspolynom)
  - Gilt $x_i \equiv x_j \bmod p$ für ein $i<j$, dann gilt auch $f(x_i) \equiv f(x_j) \bmod p$ also $x_{i+1} \equiv x_{j+1} \bmod p$ und damit $x_{i+k} \equiv x_{j+k} \bmod p$ für alle k

    Folge der x_k läuft in eine Schleife, was aussieht wie ein ρ
  - Hat die Schleife die Länge $l = j-i$, so gibt es ein $k \in \{i..j-1\}$, das Vielfaches von l ist. Für dieses k gilt $x_k \equiv x_{2k} \bmod p$
- **Einfaches Suchverfahren**
  - In Schritt k bestimme $x := f^k(x_1)$, $x' := f^{2k}(x_1)$ und $d := gcd(x'-x, n)$
  - Ist $d>1$, dann ist d Faktor von n
  - Ist $d=n$ oder $k = B$, so breche ohne Erfolg ab

Pollard ρ: Ablaufbeispiel

- **Trace der Faktorisierung von $n = 275831$**

```
Schleife 1.        x = 1       x′ =2 d = 1
Schleife 2.        x = 2      x′ =26 d = 1
Schleife 3.        x = 5 x′ =182499 d = 1
Schleife 4.       x = 26   x′ =6145 d = 1
Schleife 5.      x = 677  x′ =26256 d = 1
Schleife 6.  x = 182499 x′ =187948 d = 1
Schleife 7.  x = 119245 x′ =104247 d = 1
Schleife 8.    x = 6145 x′ =260046 d = 1
Schleife 9.  x = 248010 x′ =252849 d = 1
Schleife 10.  x = 26256 x′ =153840 d = 1
Schleife 11.  x = 75868  x′ =89454 d = 1
Schleife 12. x = 187948  x′ =10831 d = 1
Schleife 13. x = 153690 x′ =244353 d = 1
Schleife 14. x = 104247 x′ =141598 d = 1
Schleife 15. x = 247272 x′ =230974 d = 1
Schleife 16. x = 260046 x′ =191915 d = 1
Schleife 17.  x = 90833  x′ =89356 d = 1
Schleife 18. x = 252849 x′ =266080 d = 101
```

  - Faktoren sind 101 und 2731 (beides Primzahlen)

- **Faktorisierung von $n = 891404116139$**
  - 1410 Schritte nötig um Faktoren $p = 944137$, $q = 944147$ zu finden

Fermat-Faktorisierungsmethode

Gut wenn Differenz der Faktoren gering

- **Suche Faktoren p, q nahe bei $\sqrt{n}$**
  - Sei $n = p{\cdot}q$ mit $p{<}q$ ungerade (nicht notwendigerweise prim)
  - Da $q{-}p$ gerade ist, sind $x = (p{+}q)/2$ und $d = (q{-}p)/2$ ganze Zahlen und es gilt $n = p{\cdot}q = (x{-}d)(x{+}d) = x^2{-}d^2$
  - Damit ist $x^2{-}n$ Quadratzahl mit der Eigenschaft $x > \lfloor\sqrt{n}\rfloor$
- **Einfacher Suchalgorithmus**
  - Suche das erste $x{>}\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ für das $x^2{-}n =: d^2$ Quadratzahl ist
  - $p := x{-}d$ und $q := x{+}d$ sind die Faktoren von n
- **Ablaufbeispiel**
  - Für $n = 891404116139$ ist $x_0 := \lfloor\sqrt{n}\rfloor = 944141$
  - Es gilt $(x_0{+}1)^2 = 891404116164$, also $(x_0{+}1)^2{-}n = 25$
  - Die beiden Faktoren sind $p = 944137$ und $q = 944147$

Faktorisierung mit quadratischen Kongruenzen

Erweitere Idee der Fermat-Faktorisierung

- **Suche nichttriviale $x, y \in \mathbb{Z}_n$ mit $x^2 \equiv y^2 \bmod n$**
  - Ist n Teiler von $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ und $x \not\equiv \pm y \bmod n$
    dann haben n und $x-y$ sowie n und $x+y$ gemeinsame Teiler
  - Suche liefert Faktoren von n
- **Beispiel: Kongruenzen für $n = 15770708441$**
  - Suche liefert $x = 125979$ und $y = 10000$
    Dann ist $x^2 = 15870708441 = n + y^2$ und $gcd(x-y, n) = 115979$
    Damit ist 115979 Faktor von n (ebenso wie $gcd(x+y, n) = 135979$)
- **Suche x und y ausgehend von $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$**
  - Anders als bei Fermat muß $x^2 \bmod n$ Quadratzahl modulo n sein
    und der Abstand von x zu $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ kann sehr groß werden

Wie kann man x und y systematisch finden?

Bestimmung quadratischer Kongruenzen

- **Erzeuge x und y durch Kombination von Quadratzahlen**
  - Zerlege gewisse $b_i = x_i^2 \bmod n$ in Primfaktoren
  - Suche Kombination der Zerlegungen, die eine Quadratzahl ergeben: bestimme Werte $z_1, .., z_k$, so daß alle Primfaktoren p_j von $b_1^{z_1} \cdot b_2^{z_2} .. b_k^{z_k}$ geradzahlig vorkommen, d.h. $b_1^{z_1} \cdot b_2^{z_2} .. b_k^{z_k} = \prod_{j=1}^{m} p_j^{2e_j}$
  - Setze $x = x_1^{z_1} \cdot x_2^{z_2} .. x_k^{z_k} \bmod n$ und $y = \prod_{j=1}^{m} p_j^{e_j}$
- **Methode: Lösung linearer Gleichungssysteme**
  - Ist $b_i = \prod_{j=1}^{m} p_j^{e_{i,j}}$ dann ist $b_1^{z_1} \cdot b_2^{z_2} .. b_k^{z_k}$ genau dann eine Quadratzahl, wenn die Summe der entstehenden Exponenten aller p_j geradzahlig wird
  - Also muß für alle $j \leq m$ gelten: $e_{i_1,j} \cdot z_1 + e_{i_2,j} \cdot z_2 .. + e_{i_k,j} \cdot z_k \bmod 2 = 0$
  - Liefert lineares System von m Gleichungen mit k Unbekannten $z_i \in \{0, 1\}$

Nur effizient, wenn alle Primfaktoren der b_i klein sind

Effiziente Bestimmung quadratischer Kongruenzen

- **Einfache Grundidee**
  - Wähle eine Faktorbasis $\mathcal{B} = \{p \text{ prim} \mid p \leq b\}$ für eine Zahl b
  - Zahlen sind effizient zerlegbar, wenn alle Primfaktoren aus $\mathcal{B}$ kommen

    Eine Zahl x heißt ***b*-glatt** wenn kein Primfaktor von x größer als b ist.
  - Suche Zahlen x_i sodaß $b_i = x_i^2 \bmod n$ b-glatt ist

    Suche kann systematisch oder zufallsbasiert sein

- **Kombination von Faktorzerlegungen am Beispiel**
  - Sei $n = 15770708441$ und $\mathcal{B} = \{-1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
  - Betrachte $8340934156^2 \bmod n = 21 = 3 * 7$

    $12044942944^2 \bmod n = 78 = 2 * 3 * 13$

    $2773700011^2 \bmod n = 182 = 2 * 7 * 13$
  - Das Produkt der drei Quadrate ergibt $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 = 546^2$
  - Ergebnis $x = 9503435785$ und $y = 546$ und $gcd(x-y, n) = 115979$

Wie wählt man gut faktorisierbare b_i?

- **Erfolglose Probedivisionen sind aufwendig**
  - Probedivision von b durch Elemente von $\mathcal{B}$ benötigt Zeit $\mathcal{O}(|\mathcal{B}|^2 \cdot \|b\|)$
  - Faktorbasen sind i.a. sehr groß (mehr als 100000 Primzahlen)
- **Dixon Random Squares** $\mathcal{O}(e^{(1+o(1))\cdot\|n\|^{1/2}\cdot(\log(\|n\|))^{1/2}})$
  - Probedivision mit semi-zufälliger Wahl der x_i
  - Wahrscheinlichkeit b-glatter Zahlen ist relativ hoch
- **Quadratisches Sieb** $\mathcal{O}(e^{(1+o(1))\cdot\|n\|^{1/2}\cdot(\log(\|n\|))^{1/2}})$
  - Wähle $x_i = \lfloor\sqrt{n}\rfloor + i)$ für $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm C$
  - Probedivision für $i \in \{0, .., p-1\}$ identifizert alle durch p teilbaren b_i
- **Zahlkörpersieb** $\mathcal{O}(e^{1.92\cdot\|n\|^{1/3}\cdot(\log(\|n\|))^{2/3}})$
  - Systematischer Erzeugung der Kongruenzen $x_i^2 \equiv y_i^2 \bmod n$ mithilfe der algebraischen Zahlentheorie (aufwendig!)
  - Bestes asymptotisches Verhalten aller Faktorisierungsalgorithmen

Quadratische Siebe

- **Wähle Siebintervall $S = \{-C, \ldots -1, 0, 1, \ldots C\}$**
  - Für alle $i \in S$ wähle $x_i = \lfloor\sqrt{n}\rfloor + i$ und berechne $b_i := x_i^2 \bmod n$
- **Identifiziere b-glatte Werte im Intervall simultan**
  - Für $p \in \mathcal{B}$ teste alle b_i mit $i \in \{0, .., p-1\}$ auf Teilbarkeit

    $x^2 \bmod p$ ist Polynom zweiten Grades, also gibt es maximal 2 Treffer
  - Ist b_j durch p teilbar, dann auch $b_{j\pm p}, b_{j\pm 2p}, \ldots$ aber kein anderes b_i
  - Es gibt (fast) keine erfolglosen Divisionen mehr
- **Faktorisierung mit quadratische Sieben**
  - Für alle $p \in \mathcal{B}$: Identifiziere die durch p teilbaren b_j mit $j \in \{0, .., p-1\}$

    Dividiere alle $b_{j\pm k\cdot p}$ mit $k \leq C/p$ durch das maximale p^e
  - Ein b_i ist b-glatt, wenn es insgesamt zu 1 oder -1 reduziert wurde
  - Löse Gleichungssystem, wenn $m = |\mathcal{B}|$ b-glatte Zahlen gefunden sind
  - Berechne $x = \prod_{j=1}^{m} x_j^{z_j}$, das zugehörige y und den Faktor $gcd(x-y, n)$

Faktorisierung mit quadratischen Sieben

- **Beispielfaktorisierung von $n = 7429$**
  - Berechne b_i für $S = \{-6, ..., 6\}$ und siebe mit $\mathcal{B} = \{2, 3, 5, 7\}$

i	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x_i	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
b_i	-1029	-868	-705	-540	-373	-204	-33	140	315	492	671	852	1035
Sieb mit 2		-217		-135		-51		35		123		213	
Sieb mit 3	-343		-235	-5		-17	-11		35	41		71	115
Sieb mit 5			- 47	-1				7	7				23
Sieb mit 7	-1	- 31						1	1				

  - Glatte Werte $b_{-6} = (-1)\cdot 2^2\cdot 7^3$, $b_{-3} = (-1)\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 5$, $b_1 = 2^2\cdot 5\cdot 7$ und $b_2 = 3^2\cdot 5\cdot 7$
  - Lösung des Gleichungssystems ergibt

    $x = x_1\cdot x_2 \bmod n = 227$ und $y = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 \bmod n = 210$
  - Faktoren sind $gcd(x-y, n) = 17$ und $gcd(x+y, n) = 437$

- **Größe von Siebintervall S und Faktorbasis $\mathcal{B}$**
  - Ideale Größe ist $|\mathcal{B}| \approx 2^{(\|n\|\cdot \log \|n\|)^{1/2}/2}$ und $|S| \approx |\mathcal{B}|\cdot u^u$,

    wobei $u = (\|n\| / \log \|n\|)^{1/2}$ (siehe Laufzeitanalyse)

Typische Werte

Bitgröße	128	192	256	384	512
$\|\mathcal{B}\|$ in Tausend	1	4	65	524	16777
$\|S\|$ in Millionen	.1	4	67	536	209715

Laufzeitanalyse quadratischer Siebe

Laufzeit hängt von vielen Faktoren ab

- **Größe eines Intervalls S**
  - Es müssen genügend b-glatte Werte b_i erzeugt werden können
- **Aufwand für Berechnung aller b_i für $i \in S$**
  - Insgesamt $|S|$ Quadrierungen modulo n $\mathcal{O}(|S| \cdot \|n\|^2)$
- **Bestimmung der teilbaren b_i mit $i \in \{0, .., p-1\}$**
  - Maximal $m^2 = |\mathcal{B}|^2$ Divisionsversuche $\mathcal{O}(|\mathcal{B}|^2 \cdot \|n\|^2)$
- **Aussieben der b-glatten Elemente in S**
  - Aufwand für eine Divisionen von b_i durch ein $p \in \mathcal{B}$ $\mathcal{O}(\|b_i\| \cdot \|p\|)$
  - Zahl der Elemente, die durch ein $p \in \mathcal{B}$ dividiert werden $|S|/p$
  - Anzahl der Elemente der Faktorbasis $\mathcal{B}$ m
- **Lösen des linearen $m \times m$-Gleichungssystems**
  - Bei dünn besetzten Matrixen (Wiedemann Algorithmus) $\mathcal{O}(m^2 \cdot \|n\|)$
- **Berechnung von x, y und $gcd(x-y, n)$**
  - Jeweils m Multiplikationen bzw. Euklids Algorithmus $\mathcal{O}(m \cdot \|n\|^2)$

Laufzeitanalyse quadratischer Siebe (II)

- **Wieviele b-glatte Elemente erzeugt Intervall S?**

  Satz (Zahlentheorie): Sei $\psi(k,b)$ die Anzahl b-glatter Zahlen in $\{1..k\}$.

  Dann ist $\psi(k,b) \approx k/w^w$ (d.h. Anteil $1/w^w$), wobei $w = \|k\|/\|m\|$

  – Quadratische Siebe generieren $x_i = \lfloor\sqrt{n}\rfloor + i$ und $b_i \approx 2i\cdot\lfloor\sqrt{n}\rfloor + i^2$,
  Beide Werte liegen nahe bei $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, da $i \in S$ klein relativ zu $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$

  – Anteil b-glatter Werte für S entspricht Anteil in $\{1, .., \lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$
  da $\psi(k,b)/k$ sich für kleine Änderungen von k kaum ändert

  – Um m gute b_i zu erzeugen, muß $|S| = m\cdot w^w$ sein mit $w = \|n\|/(2\|m\|)$

- **Aufwand für Aussieben der b-glatten Elemente**

  – Aufwand der Division von b_i durch $p \in \mathcal{B}$ ist $\mathcal{O}(\|b_i\|\cdot\|p\|)$
  mit $b_i \approx \sqrt{n}$ und $p<n$ ist der Aufwand $\mathcal{O}(\|n\|^2/2)$

  – Anzahl der b_i, die durch $p \in \mathcal{B}$ dividiert werden ist $|S|/p$
  Im Mittel ist dies maximal $2\cdot|S|/m = 2\cdot w^w$

  – Bei m Elementen in $\mathcal{B}$ ist die Laufzeit insgesamt $\mathcal{O}(m\cdot w^w\cdot\|n\|^2)$

Laufzeitanalyse quadratischer Siebe (III)

- **Bestimme ideale Größe der Faktorbasis**
  - Gesamtlaufzeit ist $\mathcal{O}(m \cdot w^w \cdot \|n\|^2 + m^2 \cdot \|n\|^2)$
  - Polynomieller Anteile verschwinden gegenüber exponentiellem w^w
  - Ergibt Laufzeit $m \cdot w^w \cdot \|n\|^2 = 2^{\|m\| + w \cdot \log w + 2 \cdot \log \|n\|}$ mit $w = \|n\|/(2\|m\|)$
  - Der Exponent ist minimal für $\|m\| = 1/2 \cdot (\|n\| \cdot \log \|n\|)^{1/2}$,
  - Dann ist $w = (\|n\|/\log \|n\|)^{1/2}$ und die Laufzeit ist

    $\mathcal{O}(2^{(\|n\| \cdot \log \|n\|)^{1/2}/2 + (\|n\|/\log \|n\|)^{1/2} \cdot (\log \|n\| - \log\log \|n\|)/2 + 2 \cdot \log \|n\|})$

    $= \mathcal{O}(2^{(\|n\| \cdot \log \|n\|)^{1/2}(1 - (\log\log \|n\|/\log \|n\|))}) = \mathcal{O}(2^{(1+o(1)) \cdot \|n\|^{1/2} \cdot \log \|n\|^{1/2}})$
- **Definiere** $L_n[u, v] := \mathcal{O}(e^{v \cdot \|n\|^u \cdot (\log(\|n\|))^{1-u}})$
  - u beschreibt den Grad der "Exponentialität" der Laufzeitfunktion

    $L_n[0, v] = \mathcal{O}(e^{v(\log(\|n\|))}) = \mathcal{O}(\|n\|^v)$ ist polynomielle Laufzeit

    $L_n[1, v] = \mathcal{O}(e^{v \cdot \|n\|})$ ist exponentielle Laufzeit
  - Schnelle Faktorisierungsalgorithmen sind subexponentiell $(0 < u < 1)$
  - **Laufzeit quadratischer Siebe ist $L_n[1/2,\ 1+o(1)]$**

Faktorisierungsstrategie für grosse Zahlen

Kaskadischer Einsatz von Verfahren

- **Teste auf kleine Faktoren mit Probedivision**
  - Sehr erfolgreich, wenn n einen Faktor kleiner als 10^7 hat
- **Teste Spezialsituationen mit Pollard $p-1$ /Fermat**
  - Entdeckt Faktoren p, für die $p-1$ nur kleine Primfaktoren hat
  - Entdeckt Faktoren nahe bei $\sqrt{n}$
- **Teste n mit Pollard ρ**
  - Gut, wenn ein Faktor kleiner als 10^{12} ist
- **Teste mit quadratischem Sieb**
  - Empfehlenswert für Zahlen bis ca. 10^{120}
  - Basis und Intervall werden ab 380 Bits zu groß
- **Verwende Zahlenkörpersieb für größere Zahlen**
  - Schnellster bekannter Algorithmus für sehr große Zahlen
  - Einzelne RSA Schlüssel mit 640 Bit wurden erfolgreich faktorisiert

Weitere Angriffe auf RSA

Nicht nur der Schlüssel selbst ist angreifbar

- **Angriff auf kleine Verschlüsselungsexponenten**
  - Verschlüsselung ist sehr effektiv bei kleinen Exponenten
  - Wenn Sender den gleichen Exponenten bei verschiedenen Empfängern nutzt, wird das System leicht angreifbar
  - Beispiel: Nachricht x wurde mit $e = 3$ an drei Empfänger geschickt

    Angreifer liest $y_i = x^3 \bmod n_i$ und löst mit dem Chinesischen Restsatz die Kongruenzen $z \equiv y_i \bmod n_i$ in $\mathbb{Z}_{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3}$

    Wegen $x^3 < n_1 \cdot n_1 \cdot n_3$ ist $x = \sqrt[3]{z}$ (ohne Modulararithmetik)
  - Idee läßt sich verallgemeinern auf e Gleichungen für $e < 10^6$
- **Angriff auf kurze Nachrichten**
  - Ist $x^e < n$, so reicht konventionelles Wurzelziehen zur Dechiffrierung
  - Ist $\|x\|$ klein, so ist eine Wörterbuchattacke möglich

Weitere Angriffe auf RSA (II)

- **Homomorphieeigenschaft (Multiplikativität)**
  - $(x_1 \cdot x_2)^e = x_1^e \cdot x_2^e$ macht adaptive chosen ciphertext Attacke möglich
    - Angreifer liest $y \equiv x^e \bmod n$, ergänzt $y' \equiv x'^e \bmod n$ für ein z, schickt $y \cdot y'$ an Empfänger und bittet um Bestätigung
    - Empfänger schickt $m = (y \cdot y')^d$ auf sicherem Kanal zurück
    - Wegen $(y \cdot y')^d = x \cdot x'$ kann $x = m \cdot x'^{-1} \bmod n$ berechnet werden
- **Common Modulus Attacke**
  - Szenario: Zentrale Autorität legt Schlüssel $K := (n, p, q, d_i, e_i)$ für eine gesamte Organisationseinheit fest (gleiches n für alle!)
  - Wenn Angreifer ein einziges Paar (d_i, e_i) in die Hand bekommt, kann n faktorisiert werden und alle Schlüssel liegen offen
  - Alle Mitarbeiter können die für andere bestimmten Nachrichten lesen
- **Cycling Attacke**
  - Ist $y \equiv x^e \bmod n$, so gilt $y^{e^k} \equiv y$ für ein k und $y^{e^{k-1}} \equiv x^{e^k} \equiv x$
  - Berechne $y^e, (y^e)^e, y^{e^3}, \ldots \bmod n$ bis $y^{e^k} \equiv y$ und extrahiere $x = y^{e^{k-1}}$

Wieners Attacke auf Entschlüsselung

- **Angriff auf kleine Entschlüsselungsexponenten**
  - Durchführbar wenn $3d < n^{1/4}$ (also $\|d\| < \|n\|/4-1$) und $q<p<2q$ (Faktoren nahe beieinander, aber zu weit für Fermat)
  - Wegen $e\cdot d-1 = k\cdot\varphi(n)$ für ein k folgt hieraus $|\frac{e}{n}-\frac{k}{d}| < \frac{1}{3d^2}$ (Beweis folgt)
- **Verwendet zahlentheoretischen Satz**
  - *Ist der Abstand $|\frac{a}{b}-\frac{c}{d}|$ zwischen zwei Brüchen maximal $\frac{1}{2d^2}$, dann ist $\frac{c}{d}$ einer der Konvergenten der Kettenbruchexpansion von $\frac{a}{b}$*
  - Die **Kettenbruchexpansion $[q_1, .., q_m]$ von $\frac{a}{b}$** ist die Folge der Quotienten $q_i = \lfloor\frac{a_i}{b_i}\rfloor$ bei Abarbeitung des Euklidischen Algorithmus
  - Es gilt: $\frac{a}{b} = q_1+\frac{a_1-q_1b_1}{b_1} = q_1+\frac{b_2}{a_2} = q_1+\frac{1}{\frac{a_2}{b_2}} = q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{\frac{a_3}{b_3}}} = q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3+\cdots\frac{1}{q_m}}}$
  - Der **j-te Konvergent** von $[q_1, .., q_m]$ ist der Kettenbruch $[q_1, .., q_j]$

Liefert Verfahren zur Berechnung von $\frac{k}{d}$

Wieners Attacke im Detail

- **Geringer Abstand der Brüche**
  - Es ist $|\frac{e}{n}-\frac{k}{d}| = |\frac{e\cdot d-k\cdot n}{d\cdot n}| = |\frac{1+k\cdot(\varphi(n)-n)}{d\cdot n}| < \frac{3k\cdot\sqrt{n}}{d\cdot n} < \frac{3d}{d\cdot\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n}} < \frac{1}{3d^2}$
  - Wegen $q<p<2q$ gilt: $0 < n-\varphi(n) = p+q-1 < 3q < 3\sqrt{n}$
  - Wegen $3d < n^{1/4}$ gilt $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{9\cdot d^2}$
- **Bestimmung des j-ten Konvergenten**
  - Der durch $[q_1, .., q_j]$ dargestellte Bruch $\frac{k_j}{d_j}$ ist iterativ zu berechnen:

$$k_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } j=0 \\ q_1 & \text{falls } j=1 \\ q_j k_{j-1}+k_{j-2} & \text{falls } j\geq 1 \end{cases} \qquad d_j = \begin{cases} 0 & \text{falls } j=0 \\ 1 & \text{falls } j=1 \\ q_j d_{j-1}+d_{j-2} & \text{falls } j\geq 1 \end{cases}$$

- **Wieners Angriff auf RSA**
  - In Stufe j der Attacke berechne den j-ten Konvergenten $\frac{k_j}{d_j}$
  - Setze $\varphi_j = (e\cdot d_j-1)/k_j$ und löse Gleichung $p^2 - (n-\varphi_j+1)\cdot p + n = 0$
  - Wenn beide Lösungen zwischen 2 und n liegen, sind sie Teiler von n und d_j ist der Entschlüsselungsschlüssel

Beispielattacke nach Wieners Methode

- **Gegeben $n = 160523347$ und $e = 60728973$**
  - Zahlenbruchentwicklung von $\frac{e}{n}$: $[0, 2, 1, 1, 1, 4, 12, 102, 1, 1, 2, 3, 2, 2, 36]$
  - Konvergenten sind $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{14}{37}, \frac{171}{452}, \ldots$
  - Erste fünf Konvergenten liefern keine Faktorisierung von n
- **Berechnung der sechsten Stufe der Attacke**
  - φ_6 ist $(37{\cdot}60728973 - 1)/14 = 160498000$
  - Zu lösende quadratische Gleichung: $p^2 - 25348{\cdot}p + 160523347 = 0$

    ergibt $q = 12347$ und $p = 13001$
- **Ergebnis der Attacke**
  - Faktorisierung von $\boldsymbol{n = 12347{\cdot}13001}$
  - Entschlüsselungsschlüssel $\boldsymbol{d = 37}$ (knapp unter $n^{1/4}/3 = 37.52004$)

Richtlinien für die Schlüsselauswahl

- **p und q müssen sehr groß sein**
  - Nach heutigen Maßstäben sind mindestens 512 Bit erforderlich
  - Für sicherheitskritische Anwendungen sind 2024 Bit empfehlenswert
  - $\|p\|$ und $\|q\|$ sollten ähnlich groß sein (nur wenige Bits Unterschied)
- **Zufällige Primzahlen generieren**
  - Systematische Konstruktion kann nachgebaut werden
  - Es ist besser, Eigenschaften im Nachinein zu prüfen
- **Starke Primzahlen auswählen**
  - p und q dürfen nicht zu nahe beieinanderliegen (Fermat-Faktorisierung!)
  - $p-1$ muß auch große Primfaktoren haben (Pollard $p-1$ Faktorisierung!)
  - $p+1$ muß auch große Primfaktoren haben (Williams $p+1$ Faktorisierung!)
- **e und d müssen groß sein**
  - Vermeide Angriffe auf zu kleine Ver-/Entschlüsselungsexponenten