

Theoretische Informatik I

Einheit 2.2

Nichtdeterministische Automaten

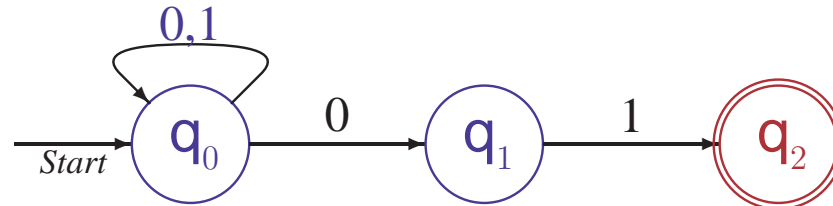


1. Arbeitsweise
2. Akzeptierte Sprache
3. Äquivalenz zu deterministischen Automaten

WAS IST NICHTDETERMISMUS?

- **Verhalten nicht eindeutig bestimmt**

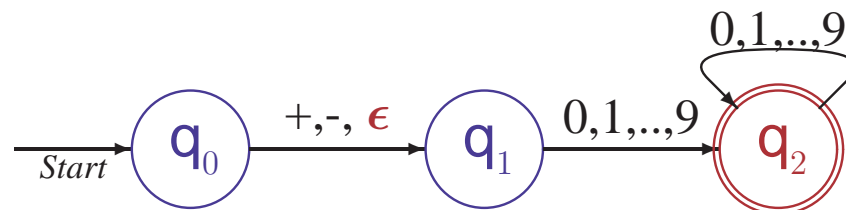
- Automat wählt Folgezustand aus mehreren Möglichkeiten



- Automat erkennt Strings, die mit 01 enden
- Eine 0 kann das erste Symbol des Endes 01 sein ... oder auch nicht

- **Spontane Übergänge zwischen Zuständen**

- Automat geht ohne Eingabe in anderen Zustand über (**ϵ -Übergang**)



- Automat erkennt ganze Zahlen mit und ohne Vorzeichen

- **Hilfreiches Modell für Entwurfsphase**

- Elegantere Beschreibungsform, leichter als korrekt nachzuweisen
- **Begrenzte physikalische Realisierung** durch Parallelrechner möglich

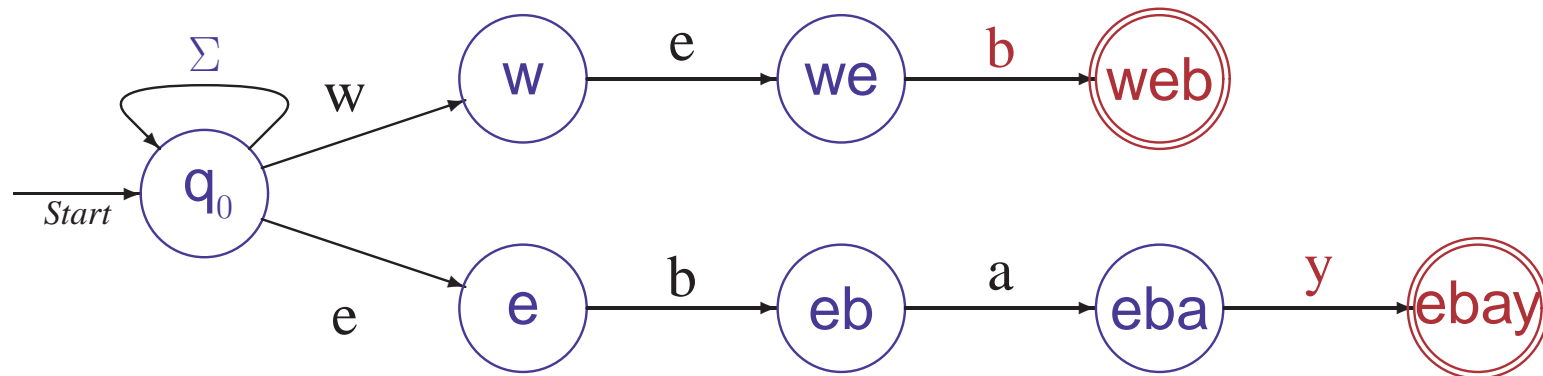
NICHTDETERMINISTISCHE AUTOMATEN – WOZU?

- **Elegante Form der Textsuche in Dokumenten**

- Viele verschiedene Wörter in großen Textsammlungen (Internet)
- Leichte Beschreibung der Suchanfrage
- Deterministisches Erkennungsverfahren mühsam zu beschreiben

- **Idee: Simultane Verarbeitung von Alternativen**

- z.B. Suche nach den Wörtern *web* und *ebay* am Ende eines Wortes



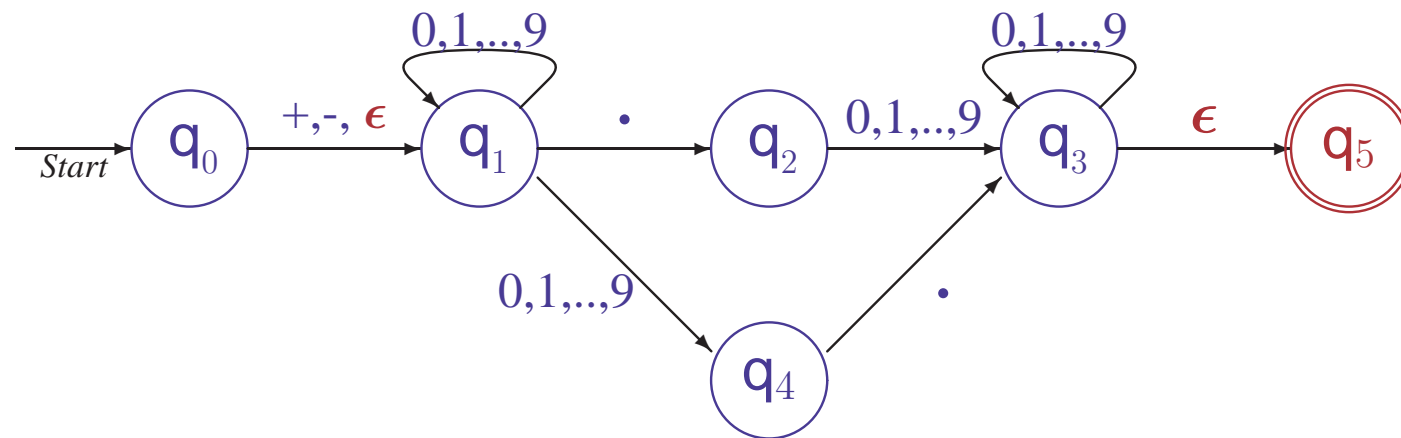
- Ein *w* könnte der Anfang von *web* sein
- Ein *e* könnte der Anfang von *ebay* sein
- Aber vor den Wörtern könnte noch etwas anderes stehen

Nichtdeterminismus $\hat{=}$ verfolge alle Möglichkeiten simultan

ϵ -ÜBERGÄNGE – VERARBEITUNG OPTIONALER EINGABEN

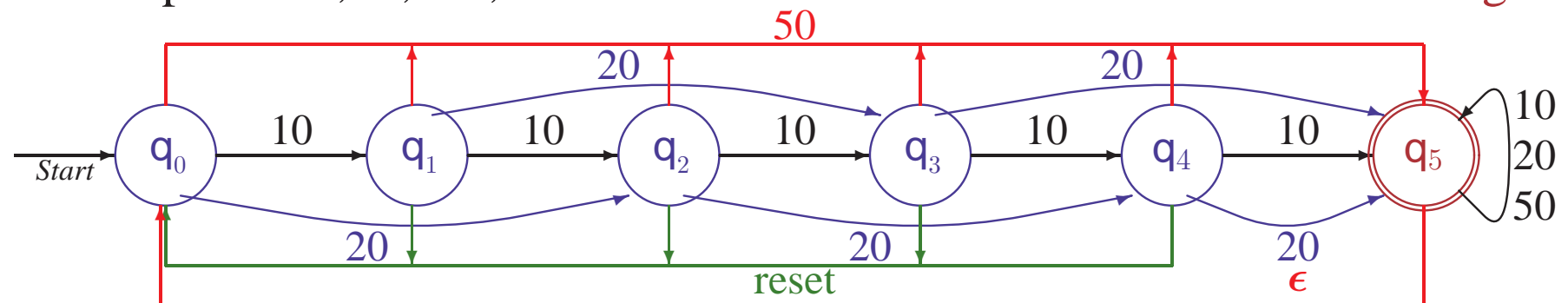
• **Erkenne Dezimalzahlen im Programmcode**

- Zwei Zeichenreihen von Ziffern getrennt durch Dezimalpunkt
- Eine der beiden Zeichenreihen darf leer sein, aber nicht beide
- Optionales Vorzeichen + oder - separater Endzustand



• **50c Kaffeeautomat**

- Akzeptiert 10,20,50c, mit Reset-Taste und automatischer Rücksetzung



NICHTDETERMINISTISCHE AUTOMATEN – PRÄZISIERT



Ein **ϵ -NEA** (**nichtdeterministischer endlicher Automat mit ϵ -Übergängen**) ist ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ (endliches) **Eingabealphabet** mit $\epsilon \notin \Sigma$
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ **Zustandsüberföhrungsfunktion** *
- $q_0 \in Q$ **Startzustand**
- $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden** (End-) **Zuständen**

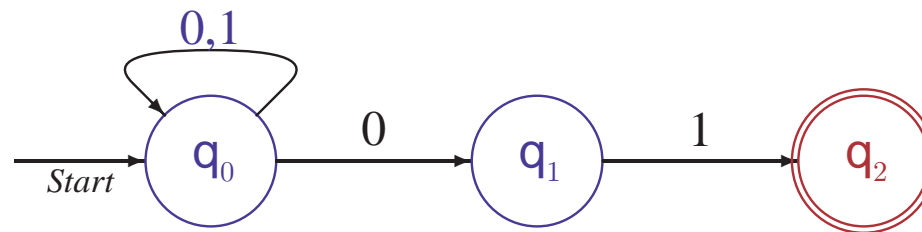
Ein **NEA** ist ein nichtdet. endlicher Automat ohne ϵ -Übergänge

* $\mathcal{P}(Q) = \{S \mid S \subseteq Q\}$ (**Potenzmenge** von Q)

Bei ϵ -NEAs ist $\delta(q', a)$ ist eine (möglicherweise leere) Menge von Zuständen

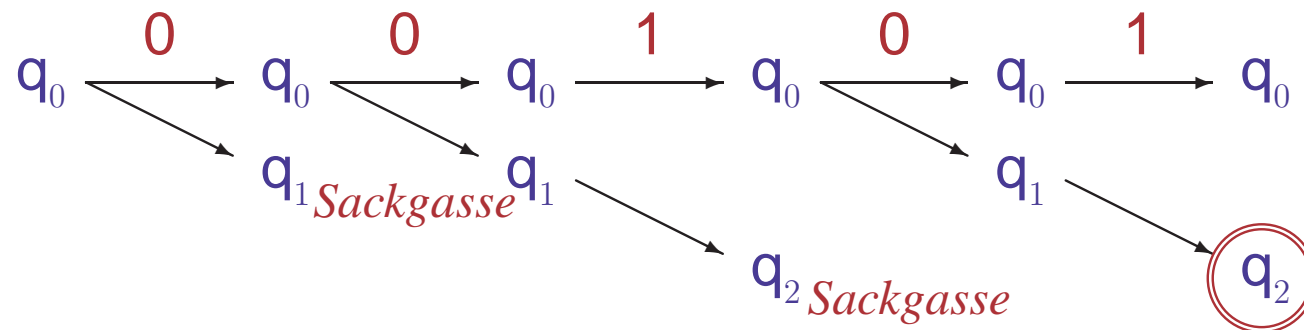
ARBEITSWEISE VON NEAs

Erkenne Strings, die mit 01 enden



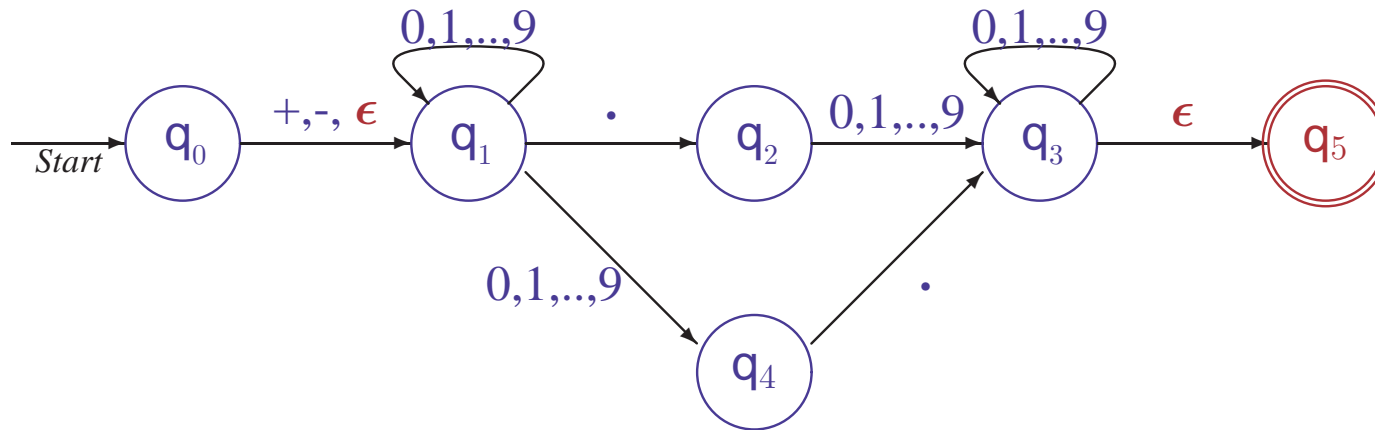
- (1) Jedes Teilwort kann in q_0 bleiben
- (2) Ein Teilwort muss mit 0 enden, um nach q_1 zu führen
- (3) Ein Teilwort muss mit 01 enden, um nach q_2 zu führen
- (4) In q_2 muss das Wort abgearbeitet sein

Beispiel: Abarbeitung von 00101



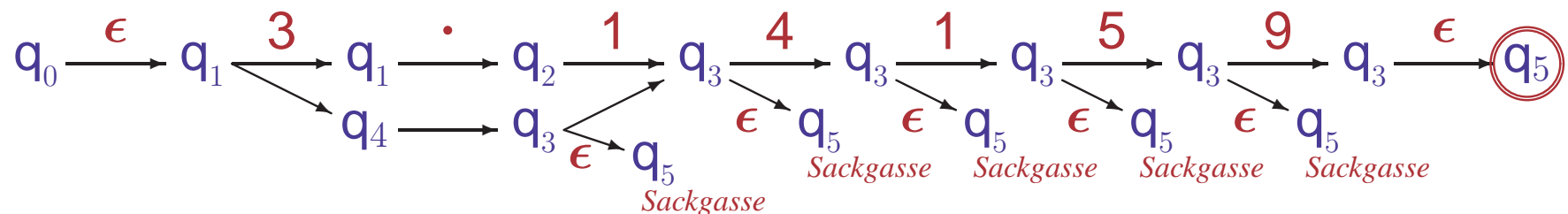
Ein Abarbeitungsweg führt zu einem akzeptierenden Zustand

ARBEITSWEISE VON NEAS MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN



- (1) Die Teilwörter $+$, $-$, und ϵ führen nach q_1
- (2) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^+$ mit $v \in \{+, -, \epsilon\}$ führen nach q_1 oder q_4
- (3) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^+.$ führen nach q_2 oder q_3
- (4) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^*.\{0..9\}^+$ führen nach q_3
- (5) Wörter die nach q_3 führen, führen auch zum Endzustand q_5

Beispiel: Abarbeitung von 3.14159



Ein Abarbeitungsweg mit ϵ -Übergängen führt zu einem Endzustand

ARBEITSWEISE VON ϵ -NEAS – PRÄZISIERT

- **Beschreibe ϵ -Hülle eines Zustands q**

- Die von q mit ϵ -Übergängen erreichbaren Zustände

- **Iterative Definition:** Kleinste Menge mit der Eigenschaft

$$q \in \epsilon\text{-Hülle}(q) \text{ und } p \in \epsilon\text{-Hülle}(q) \wedge r \in \delta(p, \epsilon) \Rightarrow r \in \epsilon\text{-Hülle}(q)$$

- **Erweiterte Überföhrungsfunktion $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$**

- Aufsammeln aller bei der Abarbeitung erreichbaren Zustände einschließlich derjenigen, die ohne Eingabe erreicht werden

- **Induktive Definition** (kaskadisches Aufsammeln von Zuständen)

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} \epsilon\text{-Hülle}(q) & \text{falls } w = \epsilon, \\ \bigcup_{q' \in \hat{\delta}(q, v)} \bigcup_{q'' \in \delta(q', a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') & \text{falls } w = v a \text{ (} a \in \Sigma \text{)} \end{cases} *$$

* d.h. $p \in \hat{\delta}(q, w)$ gdw. es gibt ein $q' \in \hat{\delta}(q, v)$ und $q'' \in \delta(q', a)$ so dass $p \in \epsilon\text{-Hülle}(q'')$

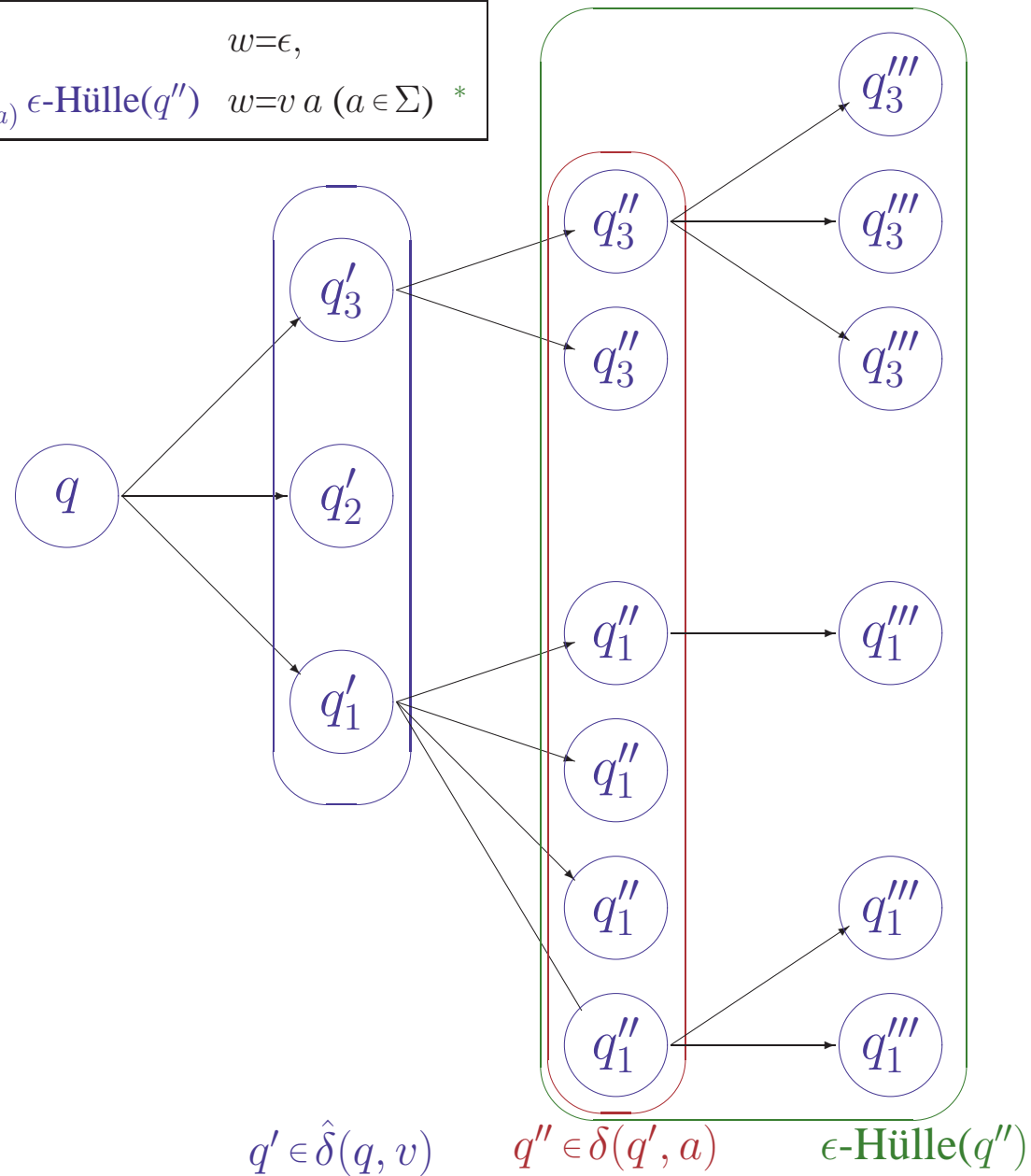
- **Von A akzeptierte Sprache**

- Menge der Eingaben w , für die $\hat{\delta}(q_0, w)$ einen Endzustand enthält

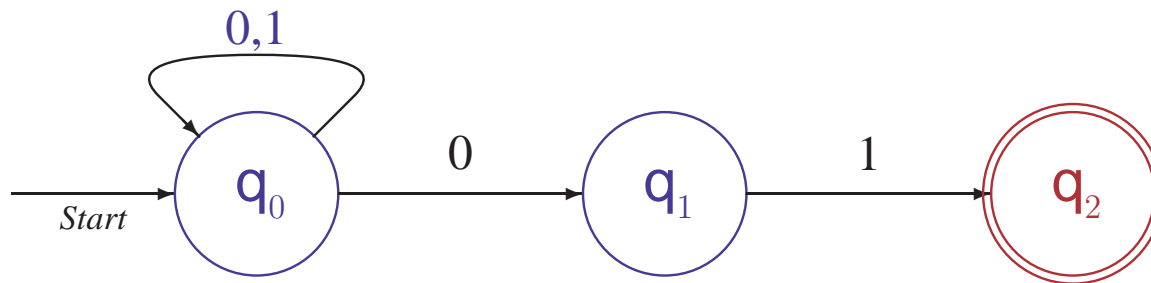
$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

ERWEITERTE ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} \epsilon\text{-Hülle}(q) & w = \epsilon, \\ \bigcup_{q' \in \hat{\delta}(q, v)} \bigcup_{q'' \in \delta(q', a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') & w = v a \ (a \in \Sigma)^* \end{cases}$$



ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION $\hat{\delta}$ (OHNE ϵ -ÜBERGÄNGE)



• Abarbeitung von 00101

- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$

- 00101 wird akzeptiert da $\hat{\delta}(q_0, 00101) \cap F = \{q_2\}$

BESTIMMUNG DER ϵ -HÜLLE

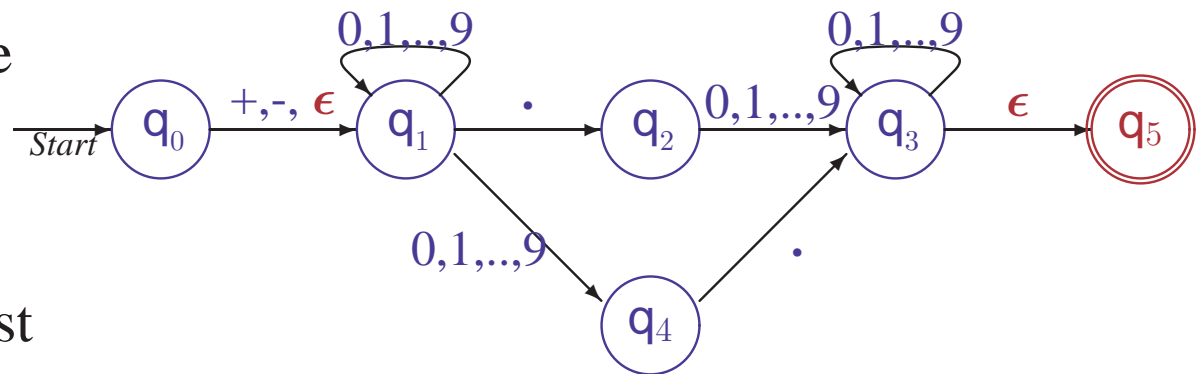
• Dezimalautomat

– Nur zwei ϵ -Übergänge

– ϵ -Hülle(q_0) = $\{q_0, q_1\}$

– ϵ -Hülle(q_3) = $\{q_3, q_5\}$

– ϵ -Hülle(q_i) = $\{q_i\}$ sonst



• Viele ϵ -Übergänge

– ϵ -Hülle(q_1) = $\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_6\}$

– ϵ -Hülle(q_2) = $\{q_2, q_3, q_6\}$

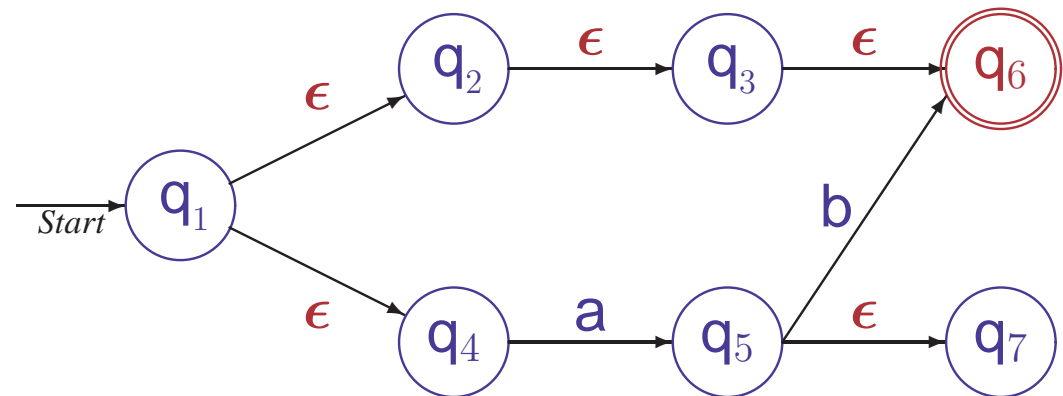
– ϵ -Hülle(q_3) = $\{q_3, q_6\}$

– ϵ -Hülle(q_4) = $\{q_4\}$

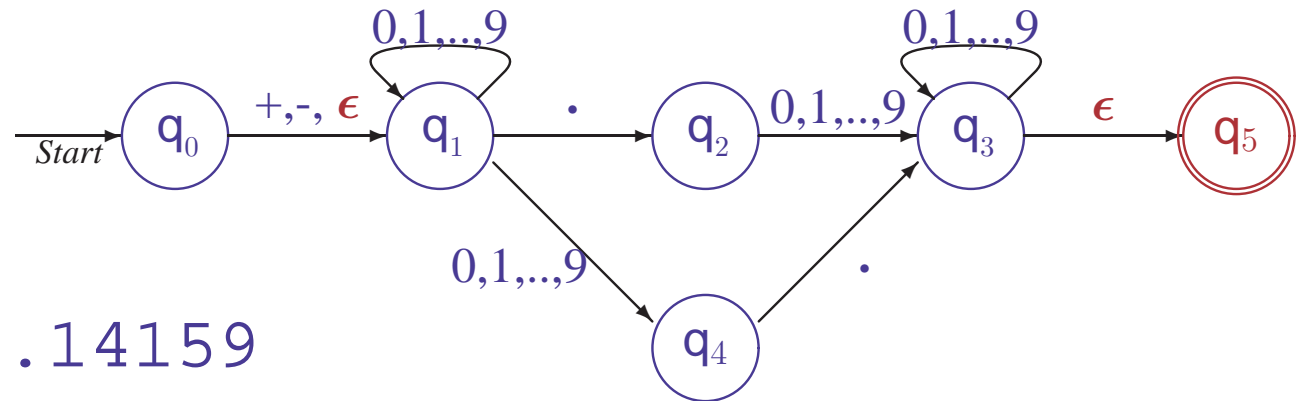
– ϵ -Hülle(q_5) = $\{q_5, q_7\}$

– ϵ -Hülle(q_6) = $\{q_6\}$

– ϵ -Hülle(q_7) = $\{q_7\}$



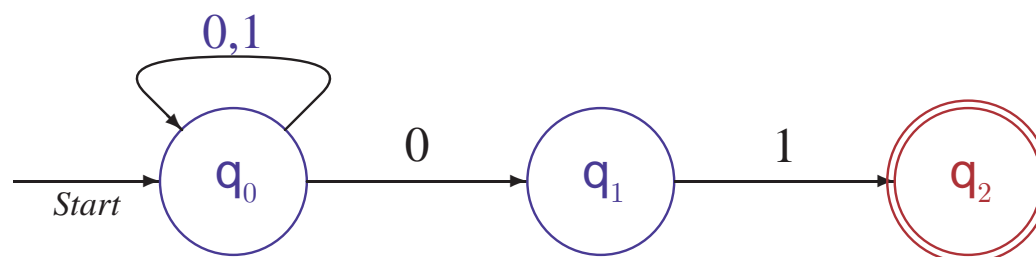
ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION $\hat{\delta}$ (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)



Abarbeitung von 3.14159

- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3) : \delta(q_0, 3) \cup \delta(q_1, 3) = \emptyset \cup \{q_1, q_4\} = \{q_1, q_4\}$
 $\hat{\delta}(q_0, 3) = \epsilon\text{-Hülle}(q_1) \cup \epsilon\text{-Hülle}(q_4) = \{q_1\} \cup \{q_4\} = \{q_1, q_4\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.) : \delta(q_1, .) \cup \delta(q_4, .) = \{q_2\} \cup \{q_3\} = \{q_2, q_3\}$
 $\hat{\delta}(q_0, 3.) = \epsilon\text{-Hülle}(q_2) \cup \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_2\} \cup \{q_3, q_5\} = \{q_2, q_3, q_5\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.1) : \delta(q_2, 1) \cup \delta(q_3, 1) \cup \delta(q_5, 1) = \{q_3\} \cup \{q_3\} \cup \emptyset = \{q_3\}$
 $\hat{\delta}(q_0, 3.1) = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_5\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.14) = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_5\}$
- ⋮
- $\hat{\delta}(q_0, \mathbf{3.14159}) = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_5\}$

NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (OHNE ϵ -ÜBERGÄNGE)



$$L(A) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ endet mit } 01\}$$

- **Zeige durch simultane Induktion für alle $w \in \{0, 1\}^*$**

- a) $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

- b) $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 0 endet

- c) $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 01 endet

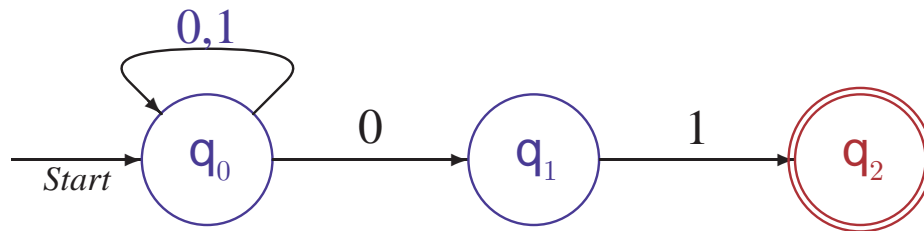
Dann folgt $w \in L(A) \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \cap \{q_2\} \neq \emptyset \Leftrightarrow w$ endet mit 01

- **Induktionsanfang $w = \epsilon$**

- Per Definition ist $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$. Also gilt Aussage a)

- w endet nicht mit 0 oder 01. Aussagen b) und c) gelten trivialerweise

NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE II (semiformal)



- a) $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$
- b) $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 0 endet
- c) $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 01 endet

• Induktionsschritt: $w = va$ für $v \in \{0, 1\}^*$, $a \in \{0, 1\}$

– Die Aussagen a), b), und c) seien für v gültig

a) Wegen $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ und $q_0 \in \delta(q_0, a)$ für $a \in \{0, 1\}$ folgt $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

b) Sei $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$. Wegen $q_1 \in \delta(q, a) \Leftrightarrow q=q_0 \wedge a=0$ muss w mit 0 enden

Wenn umgekehrt w mit 0 endet, dann ist $a=0$.

Wegen $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ und $q_1 \in \delta(q_0, a)$ folgt $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

c) Sei $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$. Wegen $q_2 \in \delta(q, a) \Leftrightarrow q=q_1 \wedge a=1$ muss w mit 1 enden und $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ gelten. Wegen b) für v endet v mit 0, also w mit 01

Wenn umgekehrt w mit 01 endet, dann ist $a=1$ und v endet mit 0.

Wegen $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ nach b) und $q_2 \in \delta(q_1, a)$ folgt $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

ARBEITSWEISE VON ϵ -NEAs – ALTERNATIVE BESCHREIBUNG MIT KONFIGURATIONENÜBERGÄNGEN

- **Definiere Konfigurationen**

- Formal dargestellt als Tupel $K = (q, w) \in Q \times \Sigma^*$

- **Definiere Konfigurationsübergangsrelation \vdash^***

- Wechsel zwischen Konfigurationen durch Abarbeitung von Wörtern

- $(q, aw) \vdash (p, w)$, falls $p \in \delta(q, a)$

- $(q, w) \vdash (p, w)$, falls $p \in \delta(q, \epsilon)$

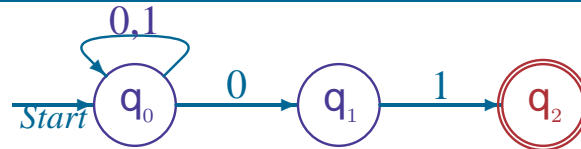
- $K_1 \vdash^* K_2$, falls $K_1 = K_2$ oder

- es gibt eine Konfiguration K mit $K_1 \vdash K$ und $K \vdash^* K_2$

- **Akzeptierte Sprache**

- Menge der Eingaben, für die \vdash^* zu akzeptierenden Zustand führt

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F. (q_0, w) \vdash^* (p, \epsilon)\}$$



$$L(A) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01\}$$

- **Zeige durch simultane Induktion für alle $w \in \{0, 1\}^*$**

$$S_1(w): (q_0, w) \vdash^* (q_0, \epsilon)$$

$$S_2(w): (q_0, w) \vdash^* (q_1, \epsilon) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v0$$

$$S_3(w): (q_0, w) \vdash^* (q_2, \epsilon) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01$$

$$\text{Dann folgt } w \in L(A) \Leftrightarrow (q_0, w) \vdash^* (q_2, \epsilon) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01$$

- **Induktionsanfang $w = \epsilon$**

– Per Definition gilt $(q_0, \epsilon) \vdash^* (q_0, \epsilon)$, $(q_0, \epsilon) \not\vdash^* (q_{1/2}, \epsilon)$ und $\epsilon \neq v0$, $\epsilon \neq v01$ ✓

- **Induktionsannahme: $S_1(w')$ – $S_3(w')$ sei gezeigt für $w' \in \{0, 1\}^*$**

- **Induktionsschritt: sei $w = w'a$ für ein beliebiges $a \in \{0, 1\}$**

$S_1(w)$: Wegen $S_1(w')$ und $q_0 \in \delta(q_0, a)$ folgt $(q_0, w) \vdash^* (q_0, \epsilon)$ ✓

$S_2(w)$: Wegen $q_1 \in \delta(q, a) \Leftrightarrow q = q_0 \wedge a = 0$ gilt

$$(q_0, w) \vdash^* (q_1, \epsilon) \Leftrightarrow (q_0, w'a) \vdash^* (q_0, a) \vdash (q_1, \epsilon) \Leftrightarrow \exists w' \in \{0, 1\}^*. w = w'0 \quad \checkmark$$

$S_3(w)$: Wegen $q_2 \in \delta(q, a) \Leftrightarrow q = q_1 \wedge a = 1$ gilt

$$(q_0, w) \vdash^* (q_2, \epsilon) \Leftrightarrow (q_0, w'a) \vdash^* (q_1, a) \vdash (q_1, \epsilon) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = w'1 = v01 \quad \checkmark$$

NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)

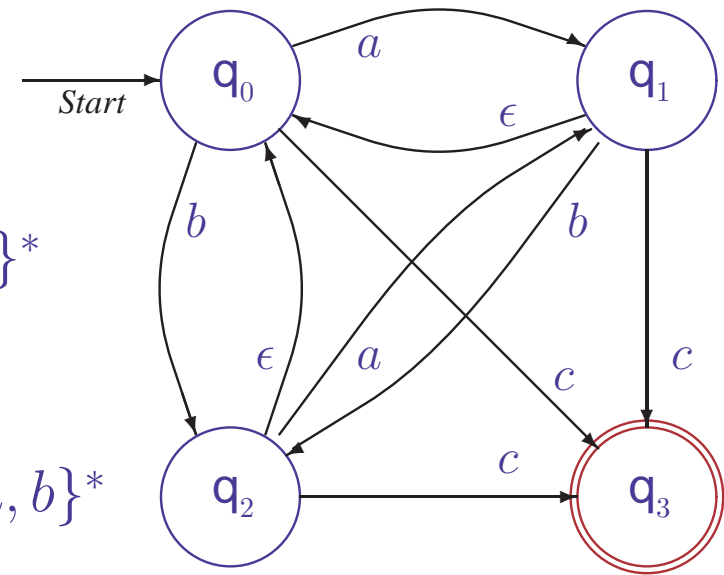
- **Mit welchen Wörtern werden die q_i erreicht?**

q_0 : Gleiche Wörter wie q_1 oder q_2 und ϵ , also $\{a, b\}^*$

q_1 : Letztes Symbol ist ein a , davor b 's oder a 's

q_2 : Letztes Symbol ist ein b , davor a 's oder b 's

q_3 : Letztes Symbol ist ein c , davor ein Wort aus $\{a, b\}^*$



- **Formuliere Aussage mit Konfigurationen**

$S_0(w)$: $(q_0, wv) \vdash^* (q_0, v) \Leftrightarrow w \in \{a, b\}^*$

$S_1(w)$: $(q_0, wv) \vdash^* (q_1, v) \Leftrightarrow w = ua$ für ein $u \in \{a, b\}^*$

$S_2(w)$: $(q_0, wv) \vdash^* (q_2, v) \Leftrightarrow w = ub$ für ein $u \in \{a, b\}^*$

$S_3(w)$: $(q_0, w) \vdash^* (q_3, \epsilon) \Leftrightarrow w = uc$ für ein $u \in \{a, b\}^*$

Formulierung ungeeignet für Induktionsbeweise

Besser: erlaube, daß nach Abarbeitung von w ein Restwort v noch ungelesen ist

Behauptung S_3 folgt unmittelbar aus S_0 – S_2

- **Es folgt $L(A) = \{w \mid (q_0, w) \vdash^* (q_3, \epsilon)\} = \{w \mid \exists u \in \{a, b\}^*. w = uc\}$**

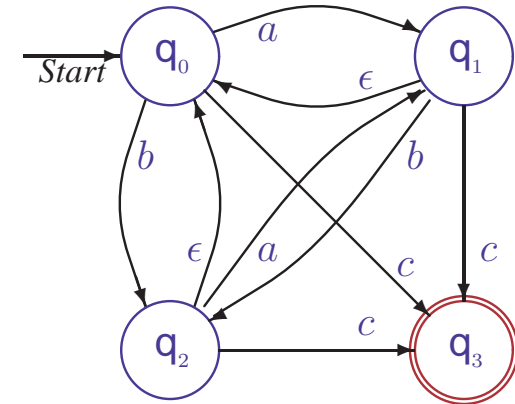
INDUKTIVER BEWEIS FÜR NEA'S MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN

- **Zeige simultan für alle Wörter $w, v \in \{a, b, c\}^*$:**

$$S_0(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_0, v) \Leftrightarrow w \in \{a, b\}^*$$

$$S_1(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_1, v) \Leftrightarrow w = ua \text{ für ein } u \in \{a, b\}^*$$

$$S_2(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_2, v) \Leftrightarrow w = ub \text{ für ein } u \in \{a, b\}^*$$



- **Induktionsanfang $w = \epsilon$**

– Per Definition gilt $(q_0, v) \vdash^* (q_0, v)$ und $w \in \{a, b\}^*$, und $w \neq ua, w \neq ub$ ✓

- **Induktionsannahme: $S_1(w') - S_3(w')$ sei gezeigt für $w' \in \{a, b, c\}^*$**

- **Induktionsschritt: sei $w = w'x$ für ein beliebiges $x \in \{a, b, c\}$**

$$S_1(w): (q_0, w'xv) \vdash^* (q_1, v) \Leftrightarrow (q_0, w'xv) \vdash^* (q_{0/2}, xv) \vdash (q_1, v)$$

$$(S_0(w'), S_1(w')) \Leftrightarrow (w' \in \{a, b\}^* \vee \exists u \in \{a, b\}^*. w = ub) \wedge x = a \quad \checkmark$$

$$S_2(w): (q_0, w'xv) \vdash^* (q_2, v) \Leftrightarrow (q_0, w'xv) \vdash^* (q_{0/1}, xv) \vdash (q_2, v)$$

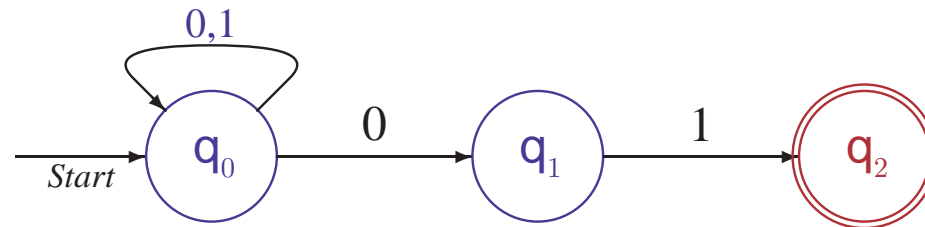
$$(S_0(w'), S_2(w')) \Leftrightarrow (w' \in \{a, b\}^* \vee \exists u \in \{a, b\}^*. w = ua) \wedge x = b \quad \checkmark$$

$$S_0(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_0, v) \Leftrightarrow (q_0, wv) \vdash^* (q_1, v) \vee (q_0, wv) \vdash^* (q_2, v)$$

$$(S_1(w), S_2(w)) \Leftrightarrow \exists u \in \{a, b\}^*. w = ua \vee \exists u \in \{a, b\}^*. w = ub \Leftrightarrow w \in \{a, b\}^* \quad \checkmark$$

- **Nichtdeterministische Automaten sind flexibler**
 - Man muss sich nicht auf eine genaue Verarbeitungsfolge festlegen
 - Man kann optionale Eingaben elegant verarbeiten
- **DEAs sind genauso ausdrucksstark wie ϵ -NEAs**
 - Man kann Mengen von ϵ -NEA-Zuständen als DEA Zustände codieren
 - Man kann mengenwertige Zustandsüberföhrungsfunktionen codieren
- **(Potenzmengen- oder) Teilmengenkonstruktion**
 - Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein nichtdeterministischer Automat
 - Konstruiere äquivalenten DEA $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ mit
 - $Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$
 - $q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0)$ (= $\{q_0\}$ bei NEAs)
 - $F_D = \{S \in Q_D \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$
 - $\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \hat{\delta}_N(q, a) = \{p \mid \exists q \in S. p \in \hat{\delta}_N(q, a)\}$ (erfaßt ϵ -Hülle)
 - Dann gilt $L(A_D) = L(A_N)$
 - Konstruktion benötigt $2^{|Q_N|}$ **Zustände** (Optimierung möglich)

TEILMENGENKONSTRUKTION AM BEISPIEL



Konstruierter deterministischer Automat

$$Q_D = \mathcal{P}(\{q_0, q_1, q_2\})$$

$$q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \{q_0\}$$

$$F_D = \{S \subseteq \{q_0, q_1, q_2\} \mid q_2 \in S\}$$

	0	1
\emptyset	\emptyset	\emptyset
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	\emptyset	$\{q_2\}$
$* \{q_2\}$	\emptyset	\emptyset
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$* \{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$* \{q_1, q_2\}$	\emptyset	$\{q_2\}$
$* \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Viele überflüssige Zustände (nur drei von $\{q_0\}$ erreichbar)

- **Optimierung: $Q_D \hat{=}$ erreichbare Zustände**

- Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein nichtdeterministischer Automat
- Konstruiere Zustandsmenge Q_D iterativ gleichzeitig mit δ_D

Start: $Q_0 := \{q_D\} = \{\epsilon\text{-Hülle}(q_0)\}$

Schritt: $Q_{i+1} := Q_i \cup \{\delta_D(S, a) \mid S \in Q_i, a \in \Sigma\}$

Dabei konstruiere die nötigen Werte $\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \hat{\delta}_N(q, a)$

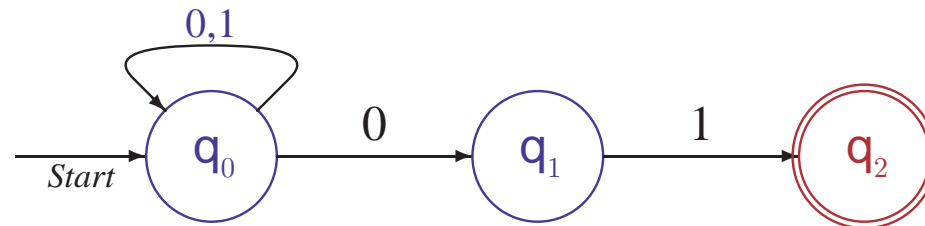
Abschluss: Wenn $Q_{i+1} = Q_i$, dann halte an und setze $Q_D := Q_i$

- Setze $q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0)$ und $F_D = \{S \in Q_D \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$
- DEA $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ enthält keine überflüssigen Zustände

- **ϵ -NEAs und DEAs akzeptieren dieselben Sprachen**

- Jeder DEA ist als “eindeutiger” ϵ -NEA beschreibbar

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR NEAs



- **Konstruktion von Zustandsmengen und (reduzierter) Überföhrungsfunktion**

	0	1
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
* $\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

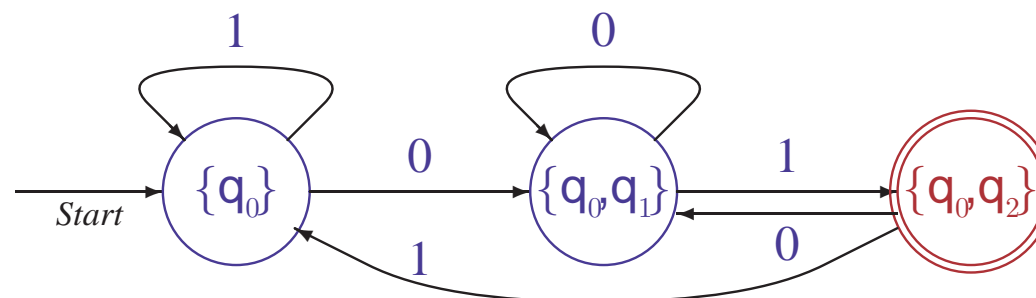
$$Q_0 := \{\{q_0\}\}$$

$$Q_1 := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}\}$$

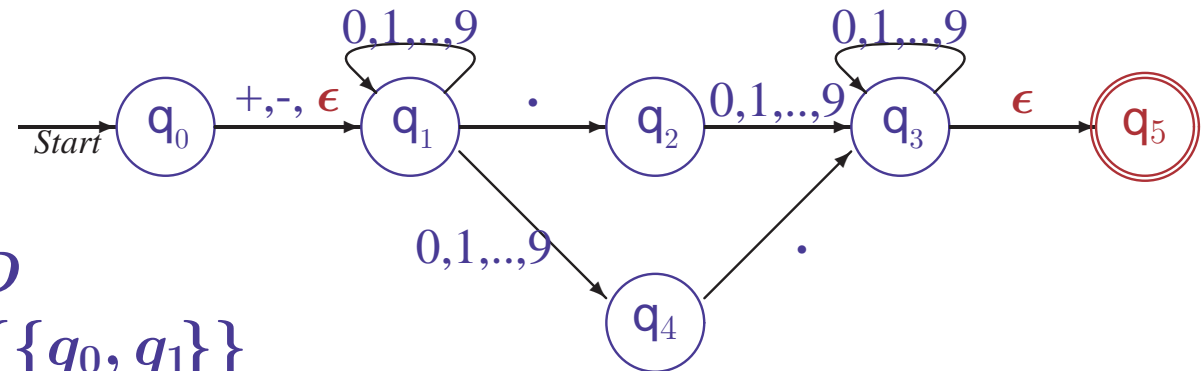
$$Q_2 := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}\}$$

$$Q_3 = Q_2, \text{ also } Q_D = Q_2,$$

- **Resultierender deterministischer Automat**



OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR ϵ -NEAs



• Konstruiere Q_D und δ_D

$$Q_0 = \{q_D\} = \{\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0)\} = \{\{q_0, q_1\}\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, +) = \{q_1\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, -) = \{q_1\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_1, q_4\}, \dots \delta_D(\{q_0, q_1\}, 9) = \{q_1, q_4\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, \cdot) = \{q_2\}$$

$$Q_1 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\} \}$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, +) = \delta_D(\{q_2\}, +) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, +) = \emptyset, \dots$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, 0) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, 0) = \{q_1, q_4\} \quad \delta_D(\{q_2\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \dots$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, \cdot) = \{q_2\}, \quad \delta_D(\{q_2\}, \cdot) = \emptyset \quad \delta_D(\{q_1, q_4\}, \cdot) = \{q_2, q_3, q_5\}$$

$$Q_2 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}, \emptyset, \{q_3, q_5\}, \{q_2, q_3, q_5\} \}$$

$$- \delta_D(\emptyset, +) = \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, +) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, +) = \emptyset, \dots$$

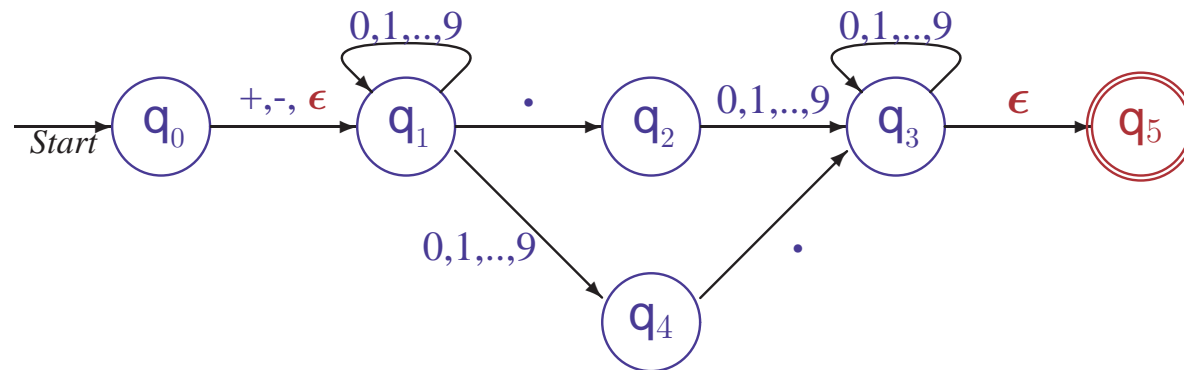
$$- \delta_D(\emptyset, 0) = \emptyset, \quad \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, 0) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \dots$$

$$- \delta_D(\emptyset, \cdot) = \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, \cdot) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, \cdot) = \emptyset$$

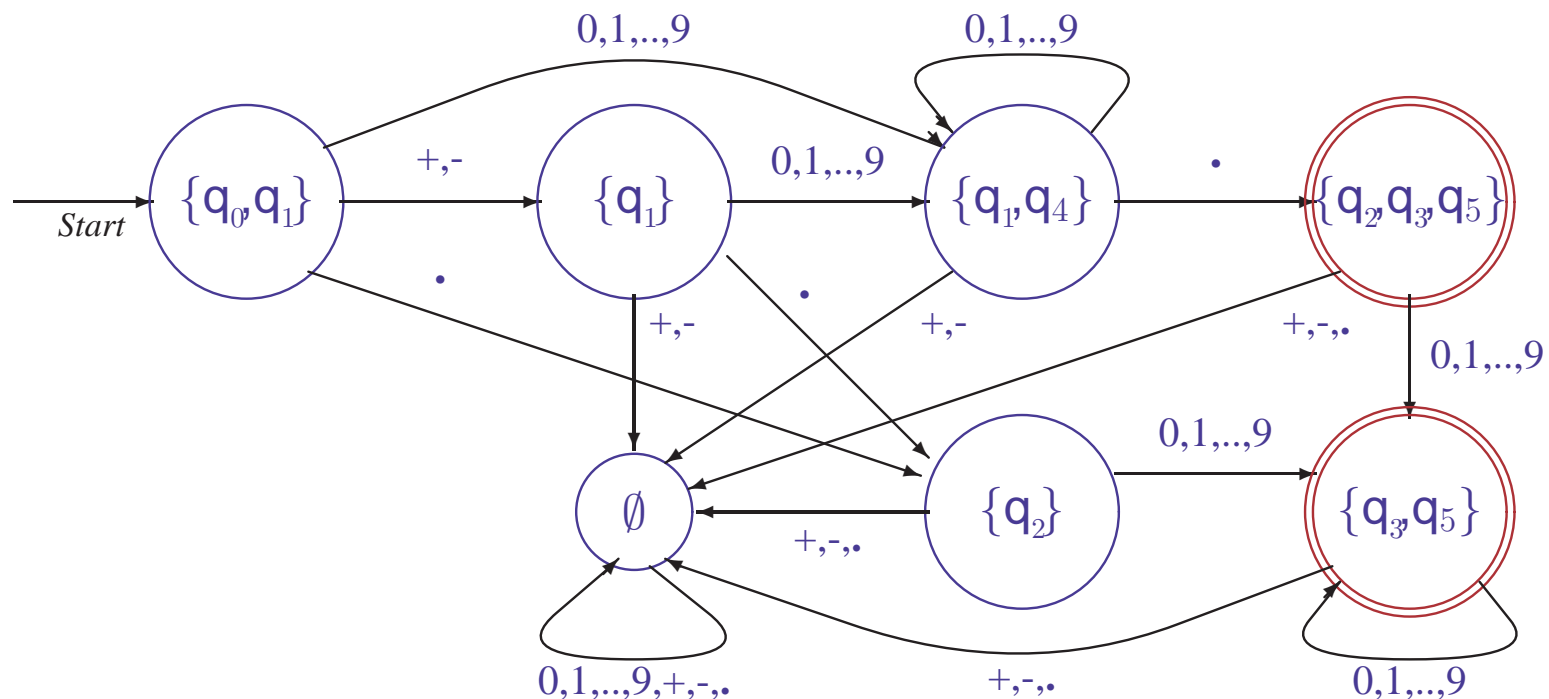
$$Q_3 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}, \emptyset, \{q_3, q_5\}, \{q_2, q_3, q_5\} \} = Q_2 =: Q_D$$

ERZEUGTER DEA FÜR DEZIMALZÄHLERKENNUNG

Ursprünglicher ϵ -NEA

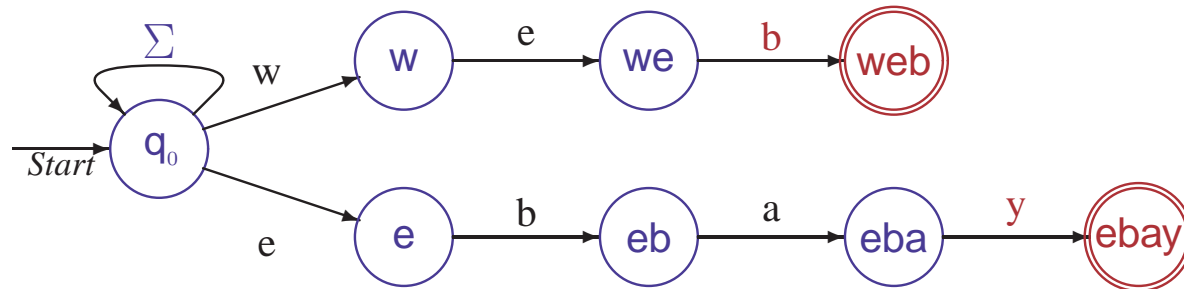


Generierter DEA

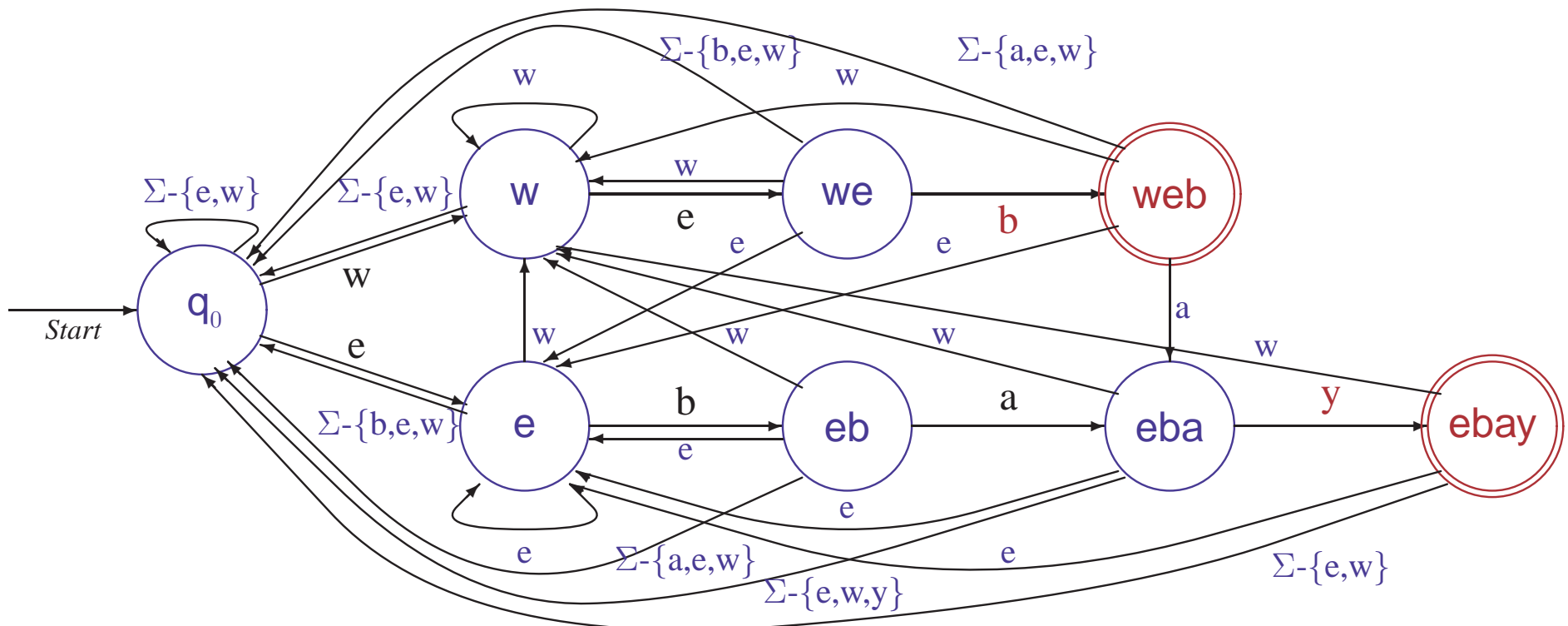


DETERMINISTISCHE AUTOMATEN FÜR TEXTANALYSE

Ursprünglicher ϵ -NEA



Generierter DEA



OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION: KORREKTHEIT

Für den konstruierten DEA gilt $L(A_D) = L(A_N)$

Zeige: $\hat{\delta}_D(q_D, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$ für alle $w \in \Sigma^*$

Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau der Wörter aus Σ^*

– **Basisfall:** Sei $w = \epsilon$:

$$\hat{\delta}_D(q_D, \epsilon) = q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \hat{\delta}_N(q_0, \epsilon)$$

– **Induktionsschritt:** Sei $w = va$ für ein $v \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$:

– **Induktionsannahme:** Es gelte $\hat{\delta}_D(q_D, v) = \hat{\delta}_N(q_0, v)$

Dann gilt $\hat{\delta}_D(q_D, w)$

$$= \delta_D(\hat{\delta}_D(q_D, v), a)$$

(Definition $\hat{\delta}$ deterministisch)

$$= \delta_D(\hat{\delta}_N(q_0, v), a)$$

(Induktionsannahme)

$$= \bigcup_{q' \in \hat{\delta}_N(q_0, v)} \delta_N(q', a)$$

$$(\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta_N(q, a))$$

$$= \bigcup_{q' \in \hat{\delta}_N(q_0, v)} \bigcup_{q'' \in \delta_N(q', a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'')$$

(Definition $\hat{\delta}_N(q', a)$)

$$= \hat{\delta}_N(q_0, w)$$

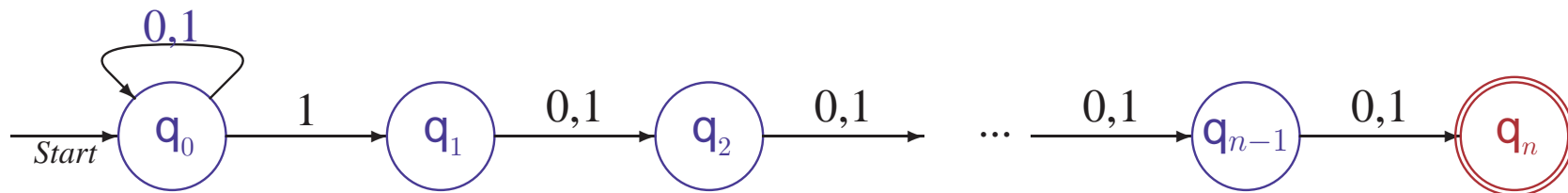
(Definition $\hat{\delta}_N(q', va)$)

Es folgt $L(A_D) = \{w \mid \hat{\delta}_D(q_D, w) \in F_D\} = \{w \mid \hat{\delta}_N(q_0, w) \cap F_N \neq \emptyset\} = L(A_N)$

TEILMENGENKONSTRUKTION: GRÖSSE DES DEA

- A_D kann so klein sein wie A_N
 - Nur wenige Teilmengen von Q_N werden wirklich erreicht
- A_D kann exponentiell größer werden

HMU §2.3.6



- $L(A_N) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{das } n\text{-te Zeichen vor dem Ende ist eine } 1\}$
- **Jeder DEA A für $L(A_N)$ benötigt mindestens 2^n Zustände**
- **Beweis:** Es gibt 2^n Wörter der Länge n in $\{0, 1\}^*$

Hat A weniger als 2^n Zustände, so gibt es $w = a_1..a_n$ und $v = b_1..b_n$

mit $w \neq v$ und $\hat{\delta}_A(q_0, w) = \hat{\delta}_A(q_0, v)$ **(Schubfachprinzip)**

Sei $a_i \neq b_i$. Für $q = \delta_A(q_0, w0^{i-1}) = \delta_A(q_0, v0^{i-1})$ folgt $q \in F$ und $q \notin F$

- **Deterministische Endliche Automaten (DEA)**
 - Endliche Menge von **Zuständen**, endliche Menge von **Eingabesymbolen**
 - Ein fester **Startzustand**, null oder mehr **akzeptierende Zustände**
 - **Überföhrungsfunktion** bestimmt Änderung des Zustands bei Abarbeitung der Eingabe
 - **Erkannte Sprache**: Eingaben, deren Abarbeitung in einem akzeptierenden Zustand endet
- **Automaten mit Ausgabe (Mealy/Moore-Automat)**
 - Wie DEA, mit zusätzlicher **Ausgabefunktion**
 - Gegenseitige Simulation möglich
- **Nichtdeterministische Automaten (ϵ -NEA / NEA)**
 - Wie DEA, aber mit **mengenwertiger Überföhrungsfunktion** und **Zustandsüberföhrung bei leerer Eingabe**
 - Durch **Teilmengenkonstruktion** in äquivalenten DEA transformierbar