# Theoretische Informatik I

## Einheit 4.2


## Modelle für Typ-0 & Typ-1 Sprachen


1. Nichtdeterministische Turingmaschinen
2. Äquivalenz zu Typ-0 Sprachen
3. Linear beschränkte Automaten
   und Typ-1 Sprachen

# Maschinenmodelle vs. Grammatiken

- **Ableitbarkeit $w \longrightarrow_G z$ ist nichtdeterministisch**
  - In $w$ können verschiedene Teilworte ersetzt werden
  - Auf ein Teilwort können verschiedene Regeln angewandt werden
  - Simulation erfordert nichtdeterministisches Maschinenmodell
- **Maschinenmodelle sind i.a. deterministisch**
  - Nichtdeterministische Modelle sind "unrealistisch" und nur für elegantere Modellierung geeignet
  - Nichtdeterministische Modelle sind evtl. deterministisch simulierbar aber nur mit exponentiellem Aufwand
- **Verwende nichtdeterministische Turingmaschinen**

  "Simultane" Behandlung vieler alternativer Konfigurationen
  - Zeige Äquivalenz zu deterministischen Turingmaschinen
  - Zeige Äquivalenz zu Typ-0 Grammatiken
  - Zeige Äquivalenz zu Typ-1 Grammatiken für eingeschränktes Modell

# Nichtdeterministische Turingmaschinen

- **Eine nichtdeterministische Turingmaschine (NTM) ist ein 7-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ mit**
  - $Q$ nichtleere endliche **Zustandsmenge**
  - $\Sigma$ endliches **Eingabealphabet**
  - $\Gamma \supseteq \Sigma$ endliches **Bandalphabet**
  - $\delta: Q \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$ endliche **Überführungsfunktion**
  - $q_0 \in Q$ **Startzustand**
  - $B \in \Gamma \setminus \Sigma$ **Leersymbol des Bands**
  - $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden** (End-)**Zuständen**

# Nichtdeterministische Turingmaschinen

- **Eine nichtdeterministische Turingmaschine (NTM) ist ein 7-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ mit**
  - $Q$ nichtleere endliche **Zustandsmenge**
  - $\Sigma$ endliches **Eingabealphabet**
  - $\Gamma \supseteq \Sigma$ endliches **Bandalphabet**
  - $\delta : Q \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$ endliche **Überführungsfunktion**
  - $q_0 \in Q$ **Startzustand**
  - $B \in \Gamma \setminus \Sigma$ **Leersymbol des Bands**
  - $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden** (End-)**Zuständen**
- **Definition von $\vdash^*$ und $L(M)$ analog zu DTM**
  - $(uZ, q, Xv) \vdash (u, p, ZYv)$, falls $(p, Y, L) \in \delta(q, X)$
  - $(u, q, Xv) \vdash (uY, p, v)$, falls $(p, Y, R) \in \delta(q, X)$

    $\vdots$
  - $\boldsymbol{L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F.\, \exists u, v \in \Gamma^*.\, (\epsilon, q_0, w) \vdash^* (u, p, v)\}}$

# Jede NTM ist durch eine DTM simulierbar

**Verarbeite alle Alternativen sequentiell**

# Jede NTM ist durch eine DTM simulierbar

## Verarbeite alle Alternativen sequentiell

- **Für $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ definiere Mengen $K_i^w$**
  - Menge der in $i$ Schritten erzeugbaren Konfigurationen bei Eingabe $w$

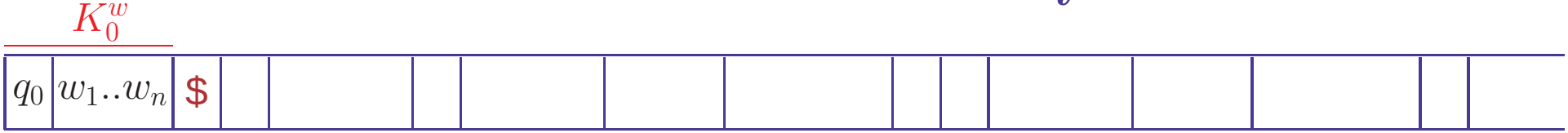
    $K_0^w := \{(\epsilon, q_0, w)\}$, $K_{i+1}^w := \{\kappa' \mid \exists \kappa \in K_i^w.\ \kappa \vdash \kappa'\}$
  - Es gilt $w \in L(M) \Leftrightarrow \exists i.\ \exists p \in F.\ \exists u, v \in \Gamma^*.\ (u, p, v) \in K_i^w$

# Jede NTM ist durch eine DTM simulierbar

## Verarbeite alle Alternativen sequentiell

- **Für $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ definiere Mengen $K_i^w$**
  - Menge der in $i$ Schritten erzeugbaren Konfigurationen bei Eingabe $w$

    $K_0^w := \{(\epsilon, q_0, w)\}$, $K_{i+1}^w := \{\kappa' \mid \exists \kappa \in K_i^w.\ \kappa \vdash \kappa'\}$
  - Es gilt $w \in L(M) \Leftrightarrow \exists i.\ \exists p \in F.\ \exists u, v \in \Gamma^*.\ (u, p, v) \in K_i^w$
- **Beschreibe DTM zur Erzeugung der $K_i^w$**




  - Arbeitsband beschreibt alle bisher erzeugten Konfigurationen der NTM

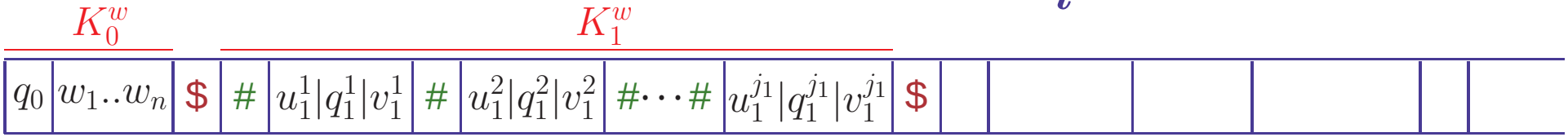
    Die aktuell betrachtete Konfiguration $\kappa$ wird markiert

# Jede NTM ist durch eine DTM simulierbar

## Verarbeite alle Alternativen sequentiell

- **Für $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ definiere Mengen $K_i^w$**
  - Menge der in $i$ Schritten erzeugbaren Konfigurationen bei Eingabe $w$

    $K_0^w := \{(\epsilon, q_0, w)\}$, $K_{i+1}^w := \{\kappa' \mid \exists \kappa \in K_i^w.\ \kappa \vdash \kappa'\}$
  - Es gilt $w \in L(M) \Leftrightarrow \exists i.\ \exists p \in F.\ \exists u, v \in \Gamma^*.\ (u, p, v) \in K_i^w$
- **Beschreibe DTM zur Erzeugung der $K_i^w$**



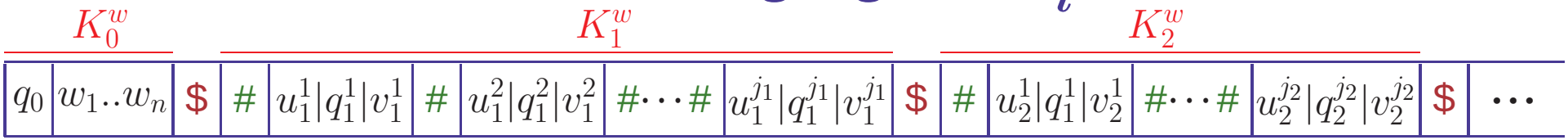

  - Arbeitsband beschreibt alle bisher erzeugten Konfigurationen der NTM
    Die aktuell betrachtete Konfiguration $\kappa$ wird markiert
  - Lesen: Extrahiere aus $\kappa$ das gelesene Symbol $X$ und Zustand $q$ der NTM
  - Verarbeiten: Erzeuge aus $\kappa$ und $\delta(q, X)$ alle Nachfolgekonfigurationen
    Lösche Markierung von $\kappa$ und markiere nächste Konfiguration auf Band

# Jede NTM ist durch eine DTM simulierbar

## Verarbeite alle Alternativen sequentiell

- **Für $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ definiere Mengen $K_i^w$**
  - Menge der in $i$ Schritten erzeugbaren Konfigurationen bei Eingabe $w$

    $K_0^w := \{(\epsilon, q_0, w)\}$, $K_{i+1}^w := \{\kappa' \mid \exists \kappa \in K_i^w.\ \kappa \vdash \kappa'\}$
  - Es gilt $w \in L(M) \Leftrightarrow \exists i.\ \exists p \in F.\ \exists u, v \in \Gamma^*.\ (u, p, v) \in K_i^w$
- **Beschreibe DTM zur Erzeugung der $K_i^w$**




  - Arbeitsband beschreibt alle bisher erzeugten Konfigurationen der NTM
    Die aktuell betrachtete Konfiguration $\kappa$ wird markiert
  - Lesen: Extrahiere aus $\kappa$ das gelesene Symbol $X$ und Zustand $q$ der NTM
  - Verarbeiten: Erzeuge aus $\kappa$ und $\delta(q, X)$ alle Nachfolgekonfigurationen
    Lösche Markierung von $\kappa$ und markiere nächste Konfiguration auf Band

Jede mögliche Konfiguration der NTM wird von der DTM aufgesucht

# Simulation von NTMs ist exponentiell

- **Größe der DTM linear mit Größe der NTM**
  - Zustandsüberführungstabelle wird durch Unterprogramme codiert
  - Berechnung der Nachfolgekonfigurationen auf einem Hilfsband

# Simulation von NTMs ist exponentiell

- **Größe der DTM linear mit Größe der NTM**
  - Zustandsüberführungstabelle wird durch Unterprogramme codiert
  - Berechnung der Nachfolgekonfigurationen auf einem Hilfsband
- **Rechenzeit wächst exponentiell**
  - Einzelschritte linear in Größe einer NTM Konfiguation simulierbar
    - Bestimmen einer Nachfolgekonfiguration ist “konstant”
    - Schreiben der Nachfolgekonfiguration linear (zwei Arbeitsbänder)

# Simulation von NTMs ist exponentiell

- **Größe der DTM linear mit Größe der NTM**
  - Zustandsüberführungstabelle wird durch Unterprogramme codiert
  - Berechnung der Nachfolgekonfigurationen auf einem Hilfsband
- **Rechenzeit wächst exponentiell**
  - Einzelschritte linear in Größe einer NTM Konfiguation simulierbar
    - Bestimmen einer Nachfolgekonfiguration ist "konstant"
    - Schreiben der Nachfolgekonfiguration linear (zwei Arbeitsbänder)

  Aber ...

  - Rechenzeit der NTM ist Länge des kürzesten akzeptierenden Pfades
  - Bei $k$ Alternativen pro Schritt muß die Simulation für $n$ Schritte der NTM im schlimmsten Fall bis zu $k^n$ Konfigurationen erzeugen

# Turingmaschinen als Maschinenmodell für $\mathcal{L}_0$

**Typ-0 Grammatiken und Turingmaschinen beschreiben dieselbe Klasse von Sprachen**

- **Grammatik $\longrightarrow$ Turingmaschine**

  Turingmaschine simuliert Anwendung der Produktionsregeln

  – Ableitbare Wörter werden schrittweise auf Hilfsband geschrieben

  – Wörter auf dem Hilfsband werden mit der Eingabe verglichen

  Maschine akzeptiert, wenn $w \in L(G)$, und terminiert sonst nicht

- **Turingmaschine $\longrightarrow$ Grammatik**

  Grammatik simuliert Konfigurationsübergänge der Turingmaschine

  – Erzeuge alle möglichen Eingabewörter und Anfangskonfigurationen

  – Codiere Konfigurationsübergänge von $M$ als Regeln

  – Simuliere Akzeptieren durch Löschen von Nonterminalsymbolen

  Grammatik generiert genau alle Wörter, die $M$ akzeptiert

## Satz: $L \in \mathcal{L}_0 \Rightarrow L$ semi-entscheidbar

**Zu jeder Grammatik $G = (V, T, P, S)$ kann eine NTM $M$ konstruiert werden mit $L(G) = L(M)$**

1. **Schreibe die Eingabe $w$ auf Hilfsband 1**
2. **Schreibe das Startsymbol $S$ auf Hilfsband 2**
3. **Simuliere eine Regelanwendung in $G$**
   - Wähle nichtdeterministisch ein Teilwort $u$ des Wortes auf Band 2
   - Wähle nichtdeterministisch eine Regel der Form $u \to v$ aus $P$
   - Verschiebe Symbole, die rechts von $u$ stehen, um $|v| - |u|$ Stellen
   - Ersetze $u$ durch $v$
4. **Vergleiche $w$ mit dem Wort auf Hilfsband 2**
   - Akzeptiere $w$, wenn die Worte gleich sind
   - Ansonsten fahre fort mit 3.

# Korrektheit der Konstruktion

- **$M$ simuliert Ableitbarkeit in $G$**
  - Nach $i$ Schritten steht auf Band 2 ein Wort $w_i$ mit $S \xrightarrow{i}_G w_i$
  - Wenn $M$ das Wort $w$ nach $i$ Schritten akzeptiert, dann gilt $w = w_i$

# Korrektheit der Konstruktion

- **$M$ simuliert Ableitbarkeit in $G$**
  - Nach $i$ Schritten steht auf Band 2 ein Wort $w_i$ mit $S \xrightarrow{i}_G w_i$
  - Wenn $M$ das Wort $w$ nach $i$ Schritten akzeptiert, dann gilt $w = w_i$
- **$M$ akzeptiert $L(G)$**
  - Es gilt $\boldsymbol{w \in L(G) \Leftrightarrow \exists i.\, S \xrightarrow{i}_G w}$
  - Wenn $M$ das Wort $w$ nach $i$ Schritten akzeptiert, dann gilt $S \xrightarrow{i}_G w$, also $w \in L(G)$
  - Wenn $S \xrightarrow{i}_G w$ gilt, dann kann $M$ in $i$ Schritten das Wort $w$ auf Band 2 erzeugen und akzeptieren, also $w \in L(M)$

# Korrektheit der Konstruktion

- **$M$ simuliert Ableitbarkeit in $G$**
  - Nach $i$ Schritten steht auf Band 2 ein Wort $w_i$ mit $S \xrightarrow{i}_G w_i$
  - Wenn $M$ das Wort $w$ nach $i$ Schritten akzeptiert, dann gilt $w = w_i$
- **$M$ akzeptiert $L(G)$**
  - Es gilt $\boldsymbol{w \in L(G) \Leftrightarrow \exists i.\, S \xrightarrow{i}_G w}$
  - Wenn $M$ das Wort $w$ nach $i$ Schritten akzeptiert, dann gilt $S \xrightarrow{i}_G w$, also $w \in L(G)$
  - Wenn $S \xrightarrow{i}_G w$ gilt, dann kann $M$ in $i$ Schritten das Wort $w$ auf Band 2 erzeugen und akzeptieren, also $w \in L(M)$
- **$M$ terminiert nicht immer**
  - Für $w \notin L(G)$ gilt $w \neq w_i$ für alle $i$

# Satz: $L$ semi-entscheidbar $\Rightarrow$ $L \in \mathcal{L}_0$

## Simuliere Abarbeitung der Turingmaschine

- **Idee: Generiere alle Konfigurationen von $M$**
  - Konfigurationen $(u,q,v)$ werden als Wörter $uqv$ codiert
  - Begrenzer # trennt Eingabe $w$ von Konfigurationen
  - Verarbeitung von $w$ simuliert durch Wörter der Form $w \# uqv \#$
- **Beschreibe Konfigurationsübergänge durch Regeln**
  - Regeln simulieren Vorschriften für Erzeugung von $\vdash$ aus $\delta$
- **Lege $w$ frei, wenn $M$ akzeptiert hat**
  - Entferne Wort nach #, wenn $M$ einen Endzustand erreicht
- **Grammatik erzeugt von $M$ akzeptierte Sprache**
  - $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F.\, \exists u, v \in \Gamma^*.\, (\epsilon, q_0, w) \vdash^* (u, p, v)\} = L(M)$

# Regeln der Grammatik $G$

- **Erzeugung von Anfangskonfigurationen**
  - Regeln zur Erzeugung aller Wörter der Form $w \# q_0 w \#$

# Regeln der Grammatik $G$

- **Erzeugung von Anfangskonfigurationen**
  - Regeln zur Erzeugung aller Wörter der Form $w \# q_0 w \#$
- **Simulation der Konfigurationsübergänge**
  - Regeln der Form $q\,X\,V \mapsto Y\,p\,V$ für $V \in \Gamma,\ \delta(q,X) = (p,Y,R)$
  - Regeln der Form $q\,X\,\# \mapsto Y\,p\,B\,\#$ für $\delta(q,X) = (p,Y,R)$
  - Regeln der Form $Z\,q\,X \mapsto p\,Z\,Y$ für $Z \in \Gamma,\ \delta(q,X) = (p,Y,L)$
  - Regeln der Form $\#\,q\,X \mapsto \#\,p\,B\,Y$ für $\delta(q,X) = (p,Y,L)$

# Regeln der Grammatik $G$

- **Erzeugung von Anfangskonfigurationen**
  - Regeln zur Erzeugung aller Wörter der Form $w \# q_0 w \#$
- **Simulation der Konfigurationsübergänge**
  - Regeln der Form $q\,X\,V \mapsto Y\,p\,V$ für $V \in \Gamma,\ \delta(q,X) = (p,Y,R)$
  - Regeln der Form $q\,X\,\# \mapsto Y\,p\,B\,\#$ für $\delta(q,X) = (p,Y,R)$
  - Regeln der Form $Z\,q\,X \mapsto p\,Z\,Y$ für $Z \in \Gamma,\ \delta(q,X) = (p,Y,L)$
  - Regeln der Form $\#\,q\,X \mapsto \#\,p\,B\,Y$ für $\delta(q,X) = (p,Y,L)$
- **Schlußregeln für Endzustände**
  - Regeln der Form $Z\,q \mapsto q$ für $Z \in \Gamma,\ q \in F$
  - Regeln der Form $q\,Z \mapsto q$ für $Z \in \Gamma,\ q \in F$
  - Regeln der Form $\#\,q\,\# \mapsto \epsilon$ für $q \in F$

# Regeln der Grammatik $G$

- **Erzeugung von Anfangskonfigurationen**
  - Regeln zur Erzeugung aller Wörter der Form $w \# q_0 w \#$
- **Simulation der Konfigurationsübergänge**
  - Regeln der Form $q\,X\,V \mapsto Y\,p\,V$ für $V \in \Gamma,\ \delta(q,X) = (p,Y,R)$
  - Regeln der Form $q\,X\,\# \mapsto Y\,p\,B\,\#$ für $\delta(q,X) = (p,Y,R)$
  - Regeln der Form $Z\,q\,X \mapsto p\,Z\,Y$ für $Z \in \Gamma,\ \delta(q,X) = (p,Y,L)$
  - Regeln der Form $\#\,q\,X \mapsto \#\,p\,B\,Y$ für $\delta(q,X) = (p,Y,L)$
- **Schlußregeln für Endzustände**
  - Regeln der Form $Z\,q \mapsto q$ für $Z \in \Gamma,\ q \in F$
  - Regeln der Form $q\,Z \mapsto q$ für $Z \in \Gamma,\ q \in F$
  - Regeln der Form $\#\,q\,\# \mapsto \epsilon$ für $q \in F$

**Detailbeweise z.B. in Erk-Priese, Seite 199–201**

# Linear beschränkte Automaten

**Welches Modell paßt zu Typ-1 Sprachen?**

# Linear beschränkte Automaten

## Welches Modell paßt zu Typ-1 Sprachen?

- **Typ-1 Sprachen werden "expansiv" erzeugt**
  - In jeder Ableitung $S \longrightarrow w_1 \longrightarrow w_2 \ldots \longrightarrow w$ eines Wortes $w \in L(G)$ ist keines der $w_i$ länger als $w$ (Ausnahme $w = \epsilon$)
  - Turingmaschine braucht maximal $|w|$ Bandzellen zur Simulation

# Linear beschränkte Automaten

## Welches Modell paßt zu Typ-1 Sprachen?

- **Typ-1 Sprachen werden "expansiv" erzeugt**
  - In jeder Ableitung $S \longrightarrow w_1 \longrightarrow w_2 \ldots \longrightarrow w$ eines Wortes $w \in L(G)$ ist keines der $w_i$ länger als $w$ (Ausnahme $w = \epsilon$)
  - Turingmaschine braucht maximal $|w|$ Bandzellen zur Simulation
- **Beschränke NTMs auf linearen Bandverbrauch**
  - Das Arbeitsband ist nur halbseitig unendlich
  - Anfangskonfigurationen haben die Form $(\epsilon, q_0, w\#)$
  - $\#$ ist ein spezielles Bandende-Symbol, das niemals überlaufen oder überschrieben werden darf

# Linear beschränkte Automaten

## Welches Modell paßt zu Typ-1 Sprachen?

- **Typ-1 Sprachen werden "expansiv" erzeugt**
  - In jeder Ableitung $S \longrightarrow w_1 \longrightarrow w_2 \ldots \longrightarrow w$ eines Wortes $w \in L(G)$ ist keines der $w_i$ länger als $w$ (Ausnahme $w = \epsilon$)
  - Turingmaschine braucht maximal $|w|$ Bandzellen zur Simulation
- **Beschränke NTMs auf linearen Bandverbrauch**
  - Das Arbeitsband ist nur halbseitig unendlich
  - Anfangskonfigurationen haben die Form $(\epsilon, q_0, w\#)$
  - $\#$ ist ein spezielles Bandende-Symbol, das niemals überlaufen oder überschrieben werden darf
- **Formal: linear beschränkter Automat (LBA)**
  - NTM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ mit halbseitig unendlichem Band und ausgezeichnetem Symbol $\# \in \Gamma \setminus (\Sigma \cup \{B\})$ und der Einschränkung $\delta(q,\#) \subseteq \{(p,\#,L) | p \in Q\}$ für alle $q \in Q$

# Linear beschränkter Automat für $\{0^n 1^n 2^n | n \in \mathbb{N}\}$

1. **Anfangskonfiguration ist $(\epsilon, q_0, w\#)$**
2. **Wenn das Band leer ist, akzeptiere die Eingabe**
3. **Ansonsten ersetze die erste 0 durch $B$**
   – Wenn keine 0 unter dem Kopf steht, halte an ohne zu akzeptieren
4. **Gehe rechts zur ersten 1; ersetze diese durch $B$**
   – Vor der 1 dürfen nur Nullen oder Blanks kommen (!)
   – Wenn keine 1 vorkommt, halte an ohne zu akzeptieren
5. **Gehe rechts zur ersten 2; ersetze diese durch $B$**
   – Vor der 2 dürfen nur noch Einsen oder Blanks kommen (!)
   – Wenn keine 2 am Ende steht, halte an ohne zu akzeptieren
6. **Laufe zurück zum Anfang des restlichen Wortes**
   – Fahre fort mit Schritt 2

---

**Optimierung: Schließe Lücken durch Verschieben**

– Verfahren funktioniert analog auch für $\{0^n 1^n 2^n 3^n 4^n | n \in \mathbb{N}\}$

# LBAs sind Maschinenmodell für Typ-1 Sprachen

$$\mathcal{L}_1 = \{L \mid L = L(M) \text{ für einen LBA } M\}$$

- **Beweise für $\mathcal{L}_0$ können modifiziert werden**

# LBAs sind Maschinenmodell für Typ-1 Sprachen

$$\mathcal{L}_1 = \{ L \mid L = L(M) \text{ für einen LBA } M \}$$

- **Beweise für $\mathcal{L}_0$ können modifiziert werden**
- **Typ-1 Grammatik $\longrightarrow$ LBA**

  Turingmaschine simuliert Anwendung der Produktionsregeln
  - Ableitbare Wörter werden schrittweise erzeugt und mit $w$ verglichen
  - Beschränkung der Simulation auf Regelanwendungen, die Wörter mit maximaler Länge $|w|$ erzeugen

  **Maschine ist linear beschränkter Automat**
  - Linkes und rechtes Ende des Bandes wird niemals überschritten
  - Lineare Simulation der Hilfsbänder mit größerem Bandalphabet

# LBAs sind Maschinenmodell für Typ-1 Sprachen

$$\mathcal{L}_1 = \{L \mid L = L(M) \text{ für einen LBA } M\}$$

- **Beweise für $\mathcal{L}_0$ können modifiziert werden**
- **Typ-1 Grammatik $\longrightarrow$ LBA**

  Turingmaschine simuliert Anwendung der Produktionsregeln
  - Ableitbare Wörter werden schrittweise erzeugt und mit $w$ verglichen
  - Beschränkung der Simulation auf Regelanwendungen, die Wörter mit maximaler Länge $|w|$ erzeugen

  **Maschine ist linear beschränkter Automat**
  - Linkes und rechtes Ende des Bandes wird niemals überschritten
  - Lineare Simulation der Hilfsbänder mit größerem Bandalphabet
- **LBA $\longrightarrow$ Typ-1 Grammatik**
  - LBA muß bei Eingabe $w$ das Band nicht mehr erweitern
  - Simuliere Verarbeitung der Eingabe $w$ mit Wörtern der Form $(w_1, u_1)..(w_i, u_i)(w_{i+1}, q)(w_{i+1}, v_1)..(w_n, v_j)$ statt $w \# uqv \#$
  - Kürzende Grammatikregeln können jetzt expansiv formuliert werden