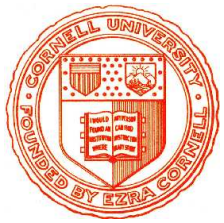
# Theoretische Informatik I

## Einheit 2.4



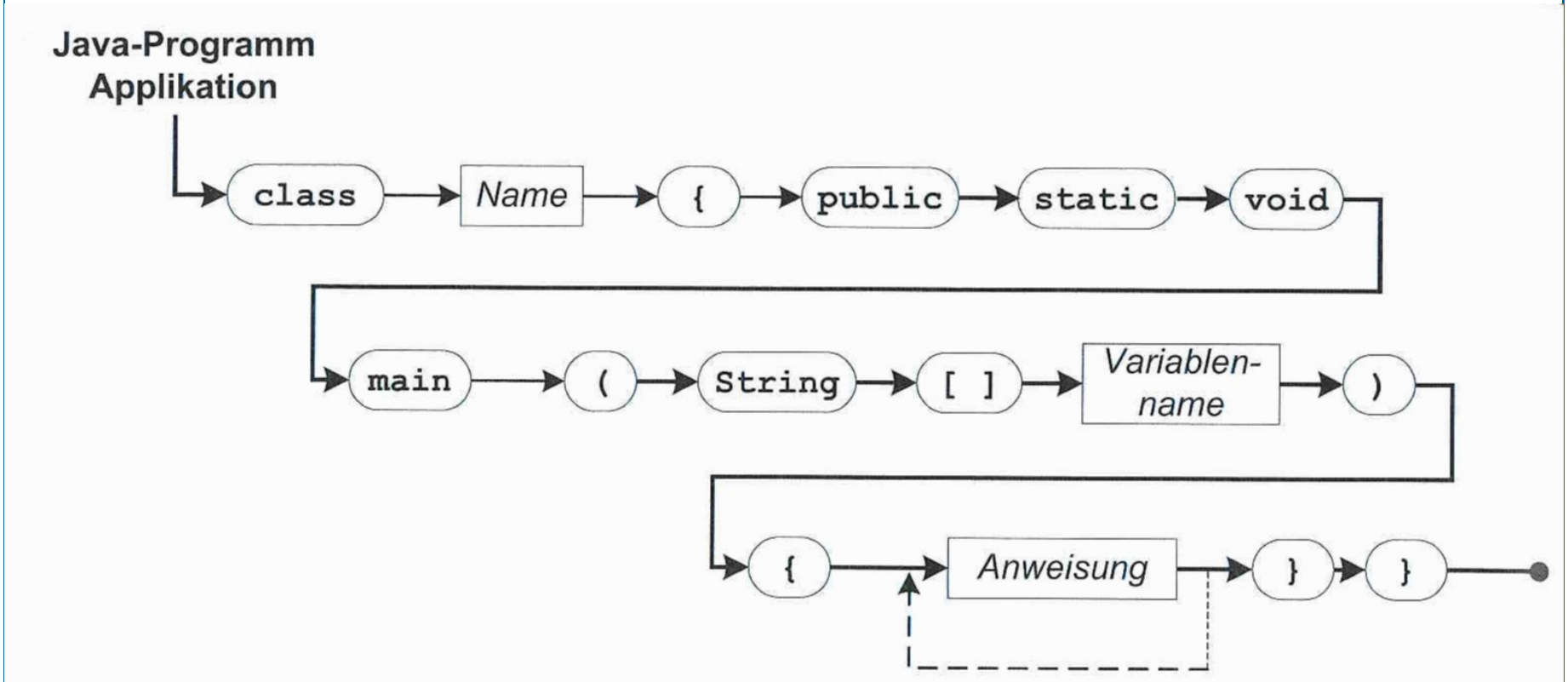

## Grammatiken

1. Arbeitsweise
2. Klassifizierung
3. Beziehung zu Automaten

# Beschreibungsformen für Sprachen

- **Mathematische Mengennotation**
  - Prädikate beschreiben Eigenschaften der Wörter
  - Extrem flexibel, nicht notwendig "berechenbar"
- **Endliche Automaten**
  - Beschreibung der Verarbeitung von Sprachen
  - Schwerpunkt ist Erkennen korrekter Wörter
- **Reguläre Ausdrücke**
  - Beschreibung der Struktur der Sprache
- **Grammatiken**
  - Produktionsregeln beschreiben Aufbau der Wörter
  - Auch für komplexere Strukturen als reguläre Sprachen
  - Gängig für die Beschreibung von Programmiersprachen

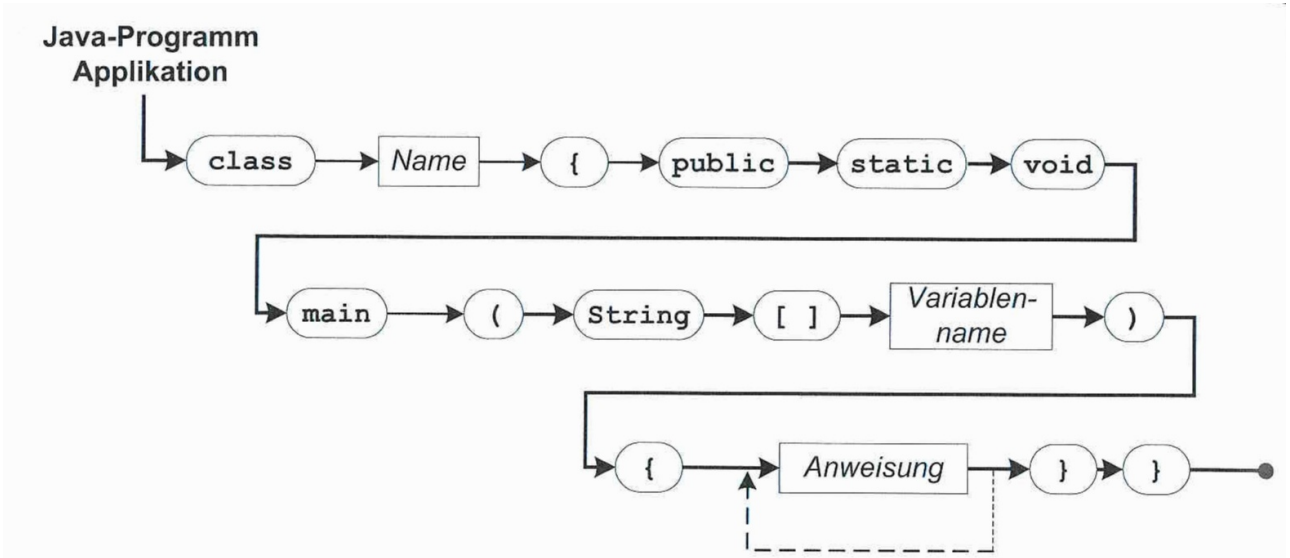
# Beispiel: Auszug der Grammatik von JAVA



# Komponenten von Grammatiken

- **Terminalsymbole: Alphabet der Sprache**
  - Symbole, aus denen die erzeugten Wörter bestehen sollen
  - Bei Programmiersprachen meist ASCII-Symbole ohne Kontrollzeichen
- **Variablen: Hilfsalphabet für Verarbeitung**
  - Beschreiben die syntaktischen Kategorien der Sprache
  - Bei JAVA z.B. Applikation, Name, Variablenname, Anweisung, ...
  - Andere Bezeichnung: Nichtterminale Symbole
- **Produktionen: Regeln zur Erzeugung von Wörtern**
  - Erklären wie syntaktischen Kategorien aufgebaut sind
  - Erklären Erzeugung von Wörtern der Sprache in den einzelnen Kategorien
  - z.B. "Eine Applikation beginnt mit `class` gefolgt von einem Namen, ..."
- **Startsymbol**
  - Erklärt welche syntaktische Kategorie beschrieben werden soll

# Grammatiken – mathematisch präzisiert




**Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, T, P, S)$ mit**

- $V$ endliches **Hilfsalphabet**
- $T$ endliches **Terminalalphabet** mit $V \cap T = \emptyset$
- $P \subseteq \Gamma^+ \times \Gamma^*$ endliche Menge der **Produktionen** (wobei $\Gamma = V \cup T$)

  Schreibweise für Produktionen: $l \rightarrow r \in P$ statt $(l, r) \in P$
- $S \in V$ **Startsymbol**

## Arbeitsweise: Produktion von Wörtern der Zielsprache

- $G_1 = (\{S\},\ \{0,1\},\ P,\ S)$ **mit** $P = \{S \to S1,\ S \to S0,\ S \to \epsilon\}$

  **Erzeugung von Wörtern:**

  $S \to \epsilon$

  $S \to S0 \to \mathbf{0}$

  $S \to S0 \to S10 \to S010 \to S0010 \to \mathbf{0010}$

  – Nur Wörter über dem Terminalalphabet sind von Interesse

  – $\epsilon$, $0$, $0010$ gehören zur erzeugten Sprache

  – $S$, $S0$, $S10$, $S010$, $S0010$ sind nur "Zwischenschritte"

- $G_2 = (\{S, A, B, C\},\ \{0,1\},\ P,\ S)$ **mit**
  $P = \{S \to B,\ S \to CA0,\ A \to BBB,\ B \to C1,\ B \to 0,\ CC1 \to \epsilon\}$

  **Ableitungen:**

  $S \longrightarrow B \longrightarrow \mathbf{0}$ ✓

  $S \longrightarrow B \longrightarrow C1$ Erfolglos, kein Wort der Zielsprache erreichbar

  $S \longrightarrow CA0 \longrightarrow CBBB0 \longrightarrow CC1BB0 \longrightarrow BB0 \longrightarrow 0B0 \longrightarrow \mathbf{000}$ ✓

# Arbeitsweise von Grammatiken – präzisiert

- **Ableitungsrelation** $\longrightarrow \subseteq \Gamma^+ \times \Gamma^*$
  - $w \longrightarrow z \equiv \exists x, y \in \Gamma^*.\, \exists l \to r \in P.\, w = x\, l\, y \wedge z = x\, r\, y$

    Anwendung von Produktionen auf Wörter

- **Erweiterte Ableitungsrelation** $\overset{*}{\longrightarrow} \subseteq \Gamma^+ \times \Gamma^*$
  - $w \overset{0}{\longrightarrow} z \equiv w = z$
  - $w \overset{n+1}{\longrightarrow} z \equiv \exists u \in \Gamma^*.\, w \longrightarrow u \wedge u \overset{n}{\longrightarrow} z$
  - $w \overset{*}{\longrightarrow} z \equiv \exists n \in \mathbb{N}.\, w \overset{n}{\longrightarrow} z$
  - Grammatik durch optionalen Index $G$ ( $\overset{*}{\longrightarrow}_G$) spezifizierbar

- **Von $G$ erzeugte Sprache**
  - Menge der Terminalwörter, die aus $S$ abgeleitet werden können

$$L(G) \equiv \{w \in T^* \mid S \overset{*}{\longrightarrow} w\}$$

# Grammatik für $L = \{0^k 1^l \mid k \leq l\}$

- $G_3 = (\{S\}, \{0,1\}, P, S)$ **mit** $P = \{S \to S1,\ S \to 0S1,\ S \to \epsilon\}$
- **Zeige** $L(G_3) = L$ **per Induktion über Länge der Ableitung**
  - Ableitungen der Länge $0$ liefern keine Terminalwörter
  - Zeige: $\forall l \in \mathbb{N}.\ \forall w \in \{0,1\}^*.\ S \xrightarrow{l+1} w \Leftrightarrow (\exists k \leq l.\ w = 0^k 1^l)$
- **Basisfall**
  - $S \xrightarrow{1} w \ \Leftrightarrow\ (S \to w) \in P \ \Leftrightarrow\ w = \epsilon \ \Leftrightarrow\ \exists k \leq 0.\ w = 0^k 1^0$ ✓
- **Induktionsschritt**
  - Es gelte $\forall w \in \{0,1\}^*.\ S \xrightarrow{l+1} w \Leftrightarrow (\exists k \leq l.\ w = 0^k 1^l)$

$$
\begin{aligned}
& S \xrightarrow{l+2} v \\
\Leftrightarrow\ & S \to S1 \xrightarrow{l+1} v \ \vee\ S \to 0S1 \xrightarrow{l+1} v \\
\Leftrightarrow\ & \exists w \in \{0,1\}^*.\ \ S \xrightarrow{l+1} w \ \wedge\ (v = w1 \vee v = 0w1) \\
\Leftrightarrow\ & \exists w \in \{0,1\}^*. \exists k \leq l.\ \ w = 0^k 1^l \ \wedge\ (v = w1 \vee v = 0w1) && \text{(Annahme)} \\
\Leftrightarrow\ & \exists k \leq l.\ \ v = 0^k 1^{l+1} \ \vee\ v = 0^{k+1} 1^{l+1} \\
\Leftrightarrow\ & \exists k \leq (l+1).\ \ v = 0^k 1^{l+1}
\end{aligned}
$$

✓

# Klassifizierung von Grammatiken

- **allgemein (Typ 0):** keine Einschränkung an die Produktionen
- **kontextsensitiv (Typ 1)**
  - nur Regeln der Form $x\,A\,y \to x\,z\,y$ oder $S \to \epsilon$ $\quad (x, y, z \in \Gamma^*, A \in V, z \neq \epsilon)$

    ($S \to \epsilon$ nur erlaubt, wenn $S$ nicht rechts in einer anderen Regel auftaucht)
- **expansiv**
  - nur Regeln der Form $x \to z$ mit $|x| \leq |z|$, oder $S \to \epsilon$ $\quad (x \in \Gamma^+, z \in (\Gamma - \{S\})^+)$
- **kontextfrei (Typ 2)**
  - nur Regeln der Form $A \to z$ $\quad (z \in \Gamma^*, A \in V)$
- **linear**
  - nur Regeln der Form $A \to \epsilon$ oder $A \to u\,B\,v$ $\quad (A, B \in V, u, v \in T^*)$
- **rechtslinear (Typ 3)**
  - nur Regeln der Form $A \to \epsilon$ oder $A \to a\,B$ $\quad (A, B \in V, a \in T)$

    Manche Bücher: nur Regeln der Form $A \to \epsilon$ oder $A \to v\,B$ $\quad (A, B \in V, v \in T^*)$
- **linkslinear**
  - nur Regeln der Form $A \to \epsilon$ oder $A \to B\,a$ $\quad (A, B \in V, a \in T)$

# Beispiele für Grammatikklassen

- **kontextsensitiv**: Regeln $x\,A\,y \to x\,z\,y$ oder $S \to \epsilon$
- **expansiv**: Regeln $x \to z$ mit $|x| \leq |z|$, oder $S \to \epsilon$
- **kontextfrei**: Regeln $A \to z$
- **linear**: Regeln $A \to \epsilon$ oder $A \to u\,B\,v$
- **rechtslinear**: Regeln $A \to \epsilon$ oder $A \to a\,B$
- **linkslinear**: Regeln $A \to \epsilon$ oder $A \to B\,a$

- $G_1 = (\{S\},\ \{0,1\},\ P,\ S)$ **mit** $P = \{S \to S1,\ S \to S0,\ S \to \epsilon\}$
  – linkslinear, kontextfrei, nicht expansiv, nicht kontextsensitiv ($S$ rechts, $S \to \epsilon$)
- $G_2 = (\{S, A, B, C\},\ \{0,1\},\ P,\ S)$ **mit**
  $P = \{S \to B,\ S \to CA0,\ A \to BBB,\ B \to C1,\ B \to 0,\ CC1 \to \epsilon\}$
  – allgemein (keine anderen Bedingungen erfüllt)
- $G_3 = (\{S\},\ \{0,1\},\ P,\ S)$ **mit** $P = \{S \to S1,\ S \to 0S1,\ S \to \epsilon\}$
  – linear, kontextfrei, nicht expansiv, nicht kontextsensitiv
- $G_4 = (\{S, A, B, C\},\ \{a, b, c\},\ P,\ S)$ **mit** $P = \{S \to aCBC,$
  $S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$
  – expansiv, nicht kontextfrei, nicht kontextsensitiv

# Sprachklassen

- **Typ-0 Sprachen**
  - Sprachen der Form $L = L(G)$ für eine beliebige Grammatik $G$
- **Typ-1 Sprachen (kontextsensitive Sprachen)**
  - Sprachen der Form $L = L(G)$ für eine kontextsensitive Grammatik $G$
  - $L$ ist kontextsensitiv g.d.w. $L = L(G)$ für eine expansive Grammatik $G$
- **Typ-2 Sprachen (kontextfreie Sprachen)**
  - Sprachen der Form $L = L(G)$ für eine kontextfreie Grammatik $G$
- **Lineare Sprachen**
  - Sprachen der Form $L = L(G)$ für eine lineare Grammatik $G$
- **Typ-3 Sprachen (reguläre Sprachen)**
  - Sprachen der Form $L = L(G)$ für eine rechtslineare Grammatik $G$
  - $L$ ist regulär g.d.w. $L = L(G)$ für eine linkslineare Grammatik $G$

$$\mathcal{L}_i \equiv \{ L \mid L \text{ ist Sprache vom Typ } i \}$$

# Typ-3 Sprachen vs. reguläre Sprachen

**Wie hängen Grammatiken und Automaten zusammen?**

- **Automaten verarbeiten Eingabewörter**
  - Jedes Symbol wird in einem Schritt abgearbeitet
  - Symbol bestimmt, ob Automat im Zustand bleibt oder wechselt
- **Grammatiken erzeugen Wörter**
  - Hilfssymbole werden im Endeffekt in Terminalwörter umgewandelt
  - Nichtlineare Grammatiken erzeugen mehrere Symbole gleichzeitig
  - Ableitungen in rechts-/linkslinearen Grammatiken erzeugen pro Schritt ein Terminalsymbol und verwenden jeweils nur ein Hilfssymbol
- **Wie kann man umwandeln?**
  - Konstruiere zu jedem DEA eine äquivalente rechtslineare Grammatik
  - Konstruiere zu jeder rechtslinearen Grammatik einen äquivalenten DEA

$\mapsto$ $\mathcal{L}_3 = \{ L \mid L \text{ ist regulär} \}$

# Umwandlung von DEAs in Typ-3 Grammatiken

**Für jeden DEA $A$ gibt es eine Typ-3 Grammatik $G$ mit $L(G) = L(A)$**

- **Gegeben DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$**
  - Wandle Abarbeitung von Symbolen in Erzeugung durch Grammatik um
  - Setze $G := (Q, \Sigma, P, q_0)$ mit $P = \{q \to aq' \mid \delta(q,a) = q'\} \cup \{q \to \epsilon \mid q \in F\}$
  - $G$ ist per Konstruktion rechtslinear, also vom Typ 3

- **Zeige $L(G) = L(A)$**

$$
\begin{aligned}
& w = w_1..w_n \in L(G) \\
\Leftrightarrow \quad & q_0 \overset{*}{\longrightarrow} w_1..w_n \\
\Leftrightarrow \quad & \exists q_1,..,q_n \in Q.\ q_0 \longrightarrow w_1 q_1 \longrightarrow w_1 w_2 q_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow w_1..w_n q_n \longrightarrow w_1..w_n \\
\Leftrightarrow \quad & \exists q_1,..,q_n \in Q.\ q_0, w_1..w_n \vdash q_1, w_2..w_n \vdash \ldots \vdash q_{n-1}, w_n \vdash q_n, \epsilon \ \wedge\ q_n \in F \\
\Leftrightarrow \quad & \exists q_n \in F.\ q_0, w_1..w_n \overset{*}{\vdash} q_n, \epsilon \\
\Leftrightarrow \quad & w \in L(A)
\end{aligned}
$$

✓

# Umwandlung von Typ-3 Grammatiken in NEAs

**Für jede Typ-3 Grammatik $G$ gibt es einen NEA $A$ mit $L(A) = L(G)$**

- **Gegeben Grammatik $G = (V, T, P, S)$**
  - Wandle Erzeugung von Symbolen in Abarbeitung durch NEA um
  - Setze $A := (V, T, \delta, S, F)$ mit $\delta(X, a) = \{X' \mid X \to aX' \in P\}$ und $F = \{X \in V \mid X \to \epsilon \in P\}$

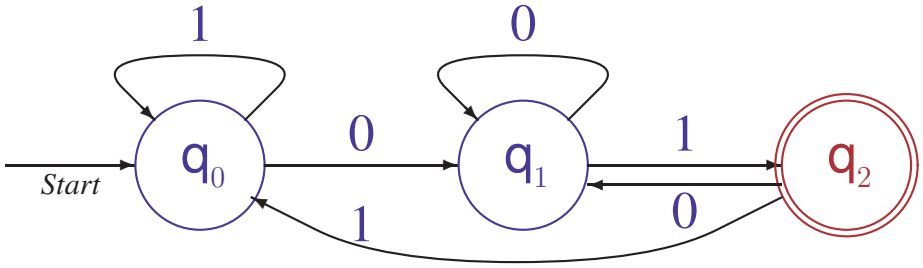
- **Zeige $L(A) = L(G)$**

$$
\begin{aligned}
& w = w_1..w_n \in L(A) \\
\Leftrightarrow\ & \exists X_n \in F. \quad S, w_1..w_n \overset{*}{\vdash} X_n, \epsilon \\
\Leftrightarrow\ & \exists X_1, .., X_n \in V.\ S, w_1..w_n \vdash X_1, w_2..w_n \vdash \ldots \vdash X_n, \epsilon \ \wedge\ X_n \in F \\
\Leftrightarrow\ & \exists X_1, .., X_n \in V.\ S \longrightarrow w_1X_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow w_1..w_nX_n \longrightarrow w_1..w_n \\
\Leftrightarrow\ & S \overset{*}{\longrightarrow} w \\
\Leftrightarrow\ & w \in L(G)
\end{aligned}
$$

✓

# Umwandlungen am Beispiel

- **Konvertiere DEA für** `(0+1)*01`
  - $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ mit




- **Erzeugte Grammatik**
  - $G = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, P, q_0)$ mit

    $P = \{q_0 \to 1q_0,\ q_0 \to 0q_1,\ \ q_1 \to 1q_2,\ q_1 \to 0q_1,\ \ q_2 \to 1q_0,\ q_2 \to 0q_1,\ q_2 \to \epsilon\}$

- **Umwandlung von $G$ in einen NEA**
  - Transformation erzeugt ursprünglichen Automaten

# Die Chomsky Hierarchie

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$$

- **Wichtige Vertreter der Klassen**
  - $\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_3$: $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
  - $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2$: $\{0^n 1^n 2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
  - $\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1$: $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ *$w$ ist Code eines Programms, das bei Eingabe $w$ anhält* $\}$
- **Zugehörige Automatenmodelle**
  - $\mathcal{L}_0$: Turingmaschine
  - $\mathcal{L}_1$: linear platzbeschränkte nichtdeterministische Turingmaschine
  - $\mathcal{L}_2$: nichtdeterministischer endlicher Automat mit Kellerspeicher
  - $\mathcal{L}_3$: endlicher Automat

Mehr in zukünftigen Vorlesungen