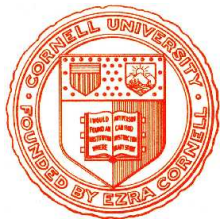
Kryptographie und Komplexität

Einheit 4.4



Semantische Sicherheit

1. Sicherheit partieller Informationen
2. Das Verfahren von Rabin
3. Sicherheit durch Randomisierung

Semantische Sicherheit

Es gibt viele Ziele für Angriffe auf Verfahren

- **Vollständiger Bruch des Verfahrens**
  - Angreifer ist in der Lage, den geheimen Schlüssel zu bestimmen
  - Danach kann jede beliebige Nachricht vom Angreifer genauso effizient entschlüsselt werden wie vom vorgesehenen Empfänger
- **Partieller Bruch des Verfahrens**
  - Angreifer kann mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit Schlüsseltexte in akzeptabler Zeit dechiffrieren, ohne den Schlüssel kennen zu müssen
- **Extraktion von Teilinformationen**
  - Angreifer kann aus Schlüsseltext spezifische Teilinformationen über den Klartext extrahieren
  - Äquivalent zum Ziel, die Chiffrierung bestimmter Klartexte von der beliebiger Strings zu unterscheiden (mit Wahrscheinlichkeit über 50%)
  - Ein System ist **semantisch sicher**, wenn dies nicht möglich ist

Extraktion partieller Informationen

- **Steckt Klartextinformation im Schlüsseltext?**
  - z.B.: *Ist Klartext x eine gerade Zahl oder größer als $n/2$?*
  - Information über einzelne Klartextbits kann sehr wertvoll sein und z.B. Antworten auf wichtige Ja/Nein Entscheidungen liefern
- **Nicht jede Information kann geheim bleiben**
  - z.B. ändert RSA Verschlüsselung den Wert des Jacobi Symbols nicht
    Ist $y = x^e \bmod n$ so ist $\left(\frac{y}{n}\right) = \left(\frac{x^e}{n}\right) = \left(\frac{x}{n}\right)^e = \left(\frac{x}{n}\right)$, da e ungerade ist
- **Extraktion von Teilinformation ist bei RSA genauso schwer wie partieller Bruch**
  - Das Problem der vollständigen Entschlüsselung von RSA ist reduzierbar auf die Berechnung von `parity` bzw `half` (Beweis folgt)
- **RSA Sicherheit gegen partiellen Bruch ungewiss**
  - Es gibt keinen Beweis, daß partieller Bruch von RSA genauso schwer wie Faktorisierung ist

Extraktion partieller Information bei RSA

Genauso schwer wie partieller Bruch

- **Breche Schlüsseltexte mit 'Orakel' `half`**
  - Sei $\texttt{half}(y) = \begin{cases} 1, & n{>}x{>}n/2 \\ 0, & x{<}n/2 \end{cases}$ und $\texttt{parity}(y) = \begin{cases} 1, & x \text{ ungerade} \\ 0, & x \text{ gerade} \end{cases}$ für $y = e_K(x)$
  - `half` und `parity` sind gleich schwer zu bestimmen

    $\texttt{half}(y)$ liefert das erste 'Bit' des Klartextes, $\texttt{parity}(y)$ das letzte
  - Wegen $(2x)^e \bmod n = 2^e{\cdot}x^e \bmod n$ liefert $\texttt{half}(2^e{\cdot}y)$ das zweite 'Bit', $\texttt{half}(2^{2e}{\cdot}y)$ das dritte, bis nach $\|n\|$ Iterationen der Klartext feststeht

  Wenn `half` lösbar wäre, kann RSA ohne Schlüssel dechiffriert werden
- **Verfahren berechnet x durch "Binärsuche"**
  - Setze $[l..r] := [0..n]$
  - Für $i := 0..\|n\|$ setze $[l..r] := [(l+r)/2..r]$, falls $\texttt{half}(2^{i\cdot e}{\cdot}y) = 1$

    $[l..r] := [l..(l+r)/2]$, falls $\texttt{half}(2^{i\cdot e}{\cdot}y) = 0$
  - Ergebnis nach $\|n\|$ Schritten ist $x = \lfloor r \rfloor$

Das Rabin Verschlüsselungsverfahren

'Sichere' Modifikation des RSA Verfahrens

- **Schlüsselerzeugung**
  - Wähle zwei große Primzahlen p und q, wobei $p, q \equiv 3 \bmod 4$
    (Zusatzbedingung theoretisch nicht erforderlich, erleichtert aber die Dechiffrierung)
  - Setze $n = p * q$ und lege n offen, halte p und q geheim
- **Verschlüsselungsverfahren**
  - Jeder Textblock wird als Binärdarstellung einer Zahl x interpretiert
  - Verschlüsselung wird Quadrieren modulo n: $\boldsymbol{e_K(x)} = x^2 \bmod n$
  - Entschlüsselung wird Quadratwurzel modulo n: $\boldsymbol{d_K(y)} = \sqrt{y} \bmod n$
    (Nichttriviale Operation, wenn p, q nicht bekannt)
- **System ist hauptsächlich von theoretischem Interesse**
  - Ein partieller Bruch des Systems ist genauso schwer wie Faktorisierung
  - Nach heutigem Stand der Technik semantisch sicher

Entschlüsselung im Rabin Verfahren

- **Die Gleichung $x^2 \equiv y \bmod p{\cdot}q$ hat 4 Lösungen**
  - y ist quadratischer Rest modulo p und modulo q
  - Es folgt $y^{(p-1)/2} \equiv 1 \bmod p$ und $y^{(q-1)/2} \equiv 1 \bmod q$
  - Damit $(\pm y^{(p+1)/4})^2 = y^{(p+1)/2} \equiv y \bmod p$ (analog für q)
  - Wegen $p, q \equiv 3 \bmod 4$ sind $\pm y^{(p+1)/4}$ und $\pm y^{(q+1)/4}$ wohldefiniert
  - Nach dem chinesischen Restsatz hat jedes Paar von Kongruenzen
    $$x \equiv \pm y^{(p+1)/4} \bmod p \quad \text{und} \quad x \equiv \pm y^{(q+1)/4} \bmod q$$
    jeweils eine eindeutige Lösung modulo n
  - Verschlüsselung ist nicht injektiv
- **Bestimmung des Klartextes** $\mathcal{O}(\|n\|^3)$
  - Berechne $y_p := q^{-1} \bmod p$ und $y_q := p^{-1} \bmod q$ a priori
  - Berechne $x_i := \pm q{\cdot}y_p{\cdot}y^{(p+1)/4} \pm p{\cdot}y_q{\cdot}y^{(q+1)/4} \bmod n$
  - Wähle nach Übertragung in Text den besten der vier Kandidaten aus
    Bei großen Blöcken gibt es i.a. nur einen einzigen sinnvollen

Nichtdeterministische Dechiffrierung ist Basis für Sicherheit des Verfahrens

Das Rabin Verfahren am Beispiel

- **Schlüsselerzeugung**
  - Wähle $p = 944123$ $q = 944147$
  - Dann ist $n = 891390898081$
  - Entschlüsselungskoeffizienten sind $y_p := p^{-1} \bmod q = 511400$
    und $y_q := q^{-1} \bmod p = 432734$
- **Verschlüsselung**
  - Alice verschlüsselt Klartext $x = 730581888230$
  - Ergebnis ist $y = x^2 \bmod n = 408240297532$
- **Entschlüsselung**
  - Bob berechnet $y^{(p+1)/4} \bmod p = 568209$, $y^{(q+1)/4} \bmod q = 576202$
  - Bob berechnet $\pm q{\cdot}y_p{\cdot}y^{(p+1)/4} \pm p{\cdot}y_q{\cdot}y^{(q+1)/4} \bmod n$ und erhält

    160809009851, 532577267684, 358813630397, 730581888230
  - Die letzte der vier Lösungskandidaten ist der Klartext

Sicherheit des Rabin Verfahrens

Berechnung des Klartextes x aus $y = x^2 \bmod n$ ist genauso schwer wie die Faktorisierung von $n = p \cdot q$

- **Faktorisierung liefert den Klartext**
  - Wenn Eve n faktorisieren kann, dann hat sie alle Informationen, die im Rabin Verfahren zur Entschlüsselung erforderlich sind
- **Quadratwurzelberechnung liefert Faktorisierung**
  - Wähle $a \in \{1 \ldots n-1\}$ zufällig
  - Ist $g = gcd(a, n) \neq 1$ dann ist g echter Teiler von n
  - Ansonsten berechne eine Quadratwurzel z von $a^2 \bmod n$
  - Wenn $z \not\equiv \pm a \bmod n$ so ist $gcd(z-a, n)$ echter Teiler von n

Für z gibt es vier Möglichkeiten

$$gcd(z-a, n) = \begin{cases} n & z \equiv a \bmod p \ \wedge \ z \equiv a \bmod q \\ p & z \equiv a \bmod p \ \wedge \ z \equiv -a \bmod q \\ q & z \equiv -a \bmod p \ \wedge \ z \equiv a \bmod q \\ 1 & z \equiv -a \bmod p \ \wedge \ z \equiv -a \bmod q \end{cases}$$

Da a zufällig ist, wird ein Teiler mit Wahrscheinlichkeit 1/2 gefunden

Liefert **"Las Vegas" Algorithmus zur Faktorisierung von n**

Sicherheit durch Randomisierung

- **Unterscheidbarkeit von Schlüsseltexten**
  - *Gegeben Verschlüsselungsfunktion f, zwei Klartexte x_1, x_2 und einen Schlüsseltext y mit der Eigenschaft $y{=}f(x_i)$ für ein i. Bestimme i mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit weniger als 50%*
  - Allgemeinste Form der Extraktion von Information aus Schlüsseltexten
  - Kann ein Angreifer Schlüsseltexte nicht in polynomieller Zeit unterscheiden, so kann er keinerlei Information über den Klartext aus einem Schlüsseltext extrahieren
  - Semantische Sicherheit $\hat{=}$ Nichtunterscheidbarkeit von Schlüsseltexten
- **Nichtunterscheidbarkeit braucht Randomisierung**
  - Wenn die Verschlüsselungsfunktion f deterministisch ist, kann ein Angreifer $f(x_1)$ und $f(x_2)$ in polynomieller Zeit ausrechnen
  - Ein deterministisches Verfahren kann nicht semantisch sicher sein
  - Moderne Versionen von RSA ergänzen Zufallskomponenten

Semantisch sichere Verschlüsselung

- **Randomisierung der Verschlüsselungsfunktion f**
  - Verschlüsselung: $(y_1, y_2) := e_K(x) = (f(r), G(r) \oplus x)$
  - Entschlüsselung: $d_K(y_1, y_2) := G(f^{-1}(y_1)) \oplus y_2$

    r beliebige Zufallszahl

    G 'zufallstreue' Expansionsfunktion (dargestellt als riesige Tabelle)

    f Einwegfunktion (nicht in polynomieller Zeit umkehrbar)
- **Intuitive Begründung der Sicherheit**
  - Um Information über x zu erhalten, braucht man Information zu $G(r)$
  - $G(r)$ kann nur berechnet werden, wenn r vollständig bekannt ist

    Teile von r reichen nicht aus, um Teile von $G(r)$ zu bestimmen
  - r kann nur bestimmt werden, wenn $f^{-1}(y_1)$ vollständig berechnet wird

    $f^{-1}(y_1)$ kann nicht in polynomieller Zeit berechnet werden

Detaillierter Beweis siehe Stinson §5.9.2

Semantisch sichere Version von RSA

- **Einfache Variante**
  - Verschlüsselung: $(y_1, y_2) := e_K(x) = (r^e \bmod n, G(r) \oplus x)$
  - Entschlüsselung: $d_K(y_1, y_2) := G(y_1^d \bmod n) \oplus y_2$
- **PKCS# Standard**
  - Verschlüsselung: $y := e_K(x) = ((x \oplus G(r)) \circ (r \oplus H(x \oplus G(r))))^e \bmod n$

    $r \in \{0,1\}^k$ beliebige Zufallszahl

    $G: \{0,1\}^k \to \{0,1\}^l$ Expansionsfunktion

    $H: \{0,1\}^l \to \{0,1\}^m$ Kompressionsfunktion

    Klartextlänge $\|x\| = l$, RSA Blocklänge $\|n\| = l+k+1$

    Klartext wird zu $y_1 = x \oplus G(r)$ randomisiert

    Zufallszahl wird zu $y_2 = r \oplus H(y_1)$ maskiert
  - Entschlüsselung: Berechne $y_1 \circ y_2 := y^d \bmod n$

    Bestimme $r = H(y_1) \oplus y_2$ und berechne $x = y_1 \oplus G(r)$

RSA im Rückblick

- **Ältestes/bedeutendstes Public-Key Verfahren**
  - Ver-/Entschlüsselung ist Potenzieren mit e bzw. d modulo n
  - Rahmenbedingung $d = e^{-1} \bmod \varphi(n)$
  - n zusammengesetzt aus zwei großen Primzahlen p und q
  - n, e liegt offen, d, p und q bleiben geheim
- **Schlüsselerzeugung benötigt Primzahltests**
  - Schnellste Verfahren sind probabilistisch (Miller-Rabin)
- **Sicherheit basiert auf Faktorisierungsproblem**
  - Schlüsselangriff äquivalent zu Lösung des Faktorisierungsproblems
  - Faktorisierung ist subexponentiell $\mathcal{O}(e^{1.92 \cdot \|n\|^{1/3} \cdot (\log(\|n\|))^{2/3}})$
  - Sicherheit nur noch für Schlüsselgröße über 1024 Bit
  - Semantische Sicherheit nur mithilfe von Randomisierung