

Theoretische Informatik I

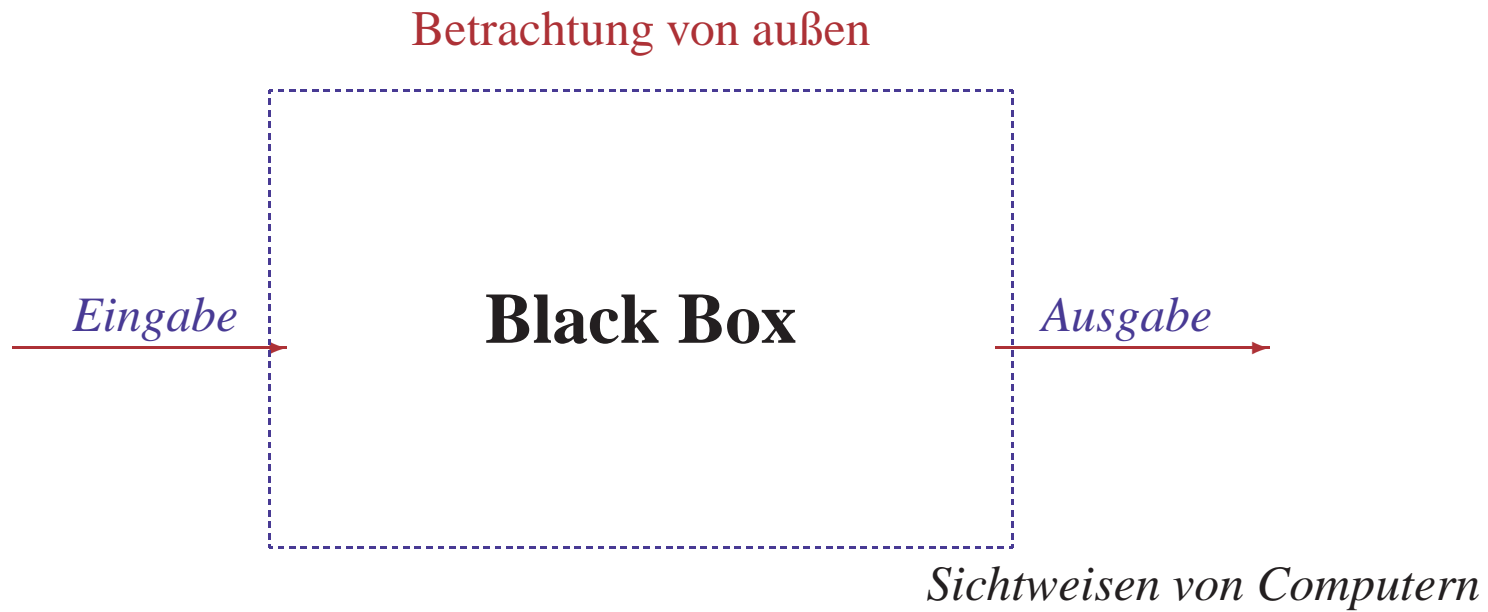
Einheit 2

Endliche Automaten & Reguläre Sprachen

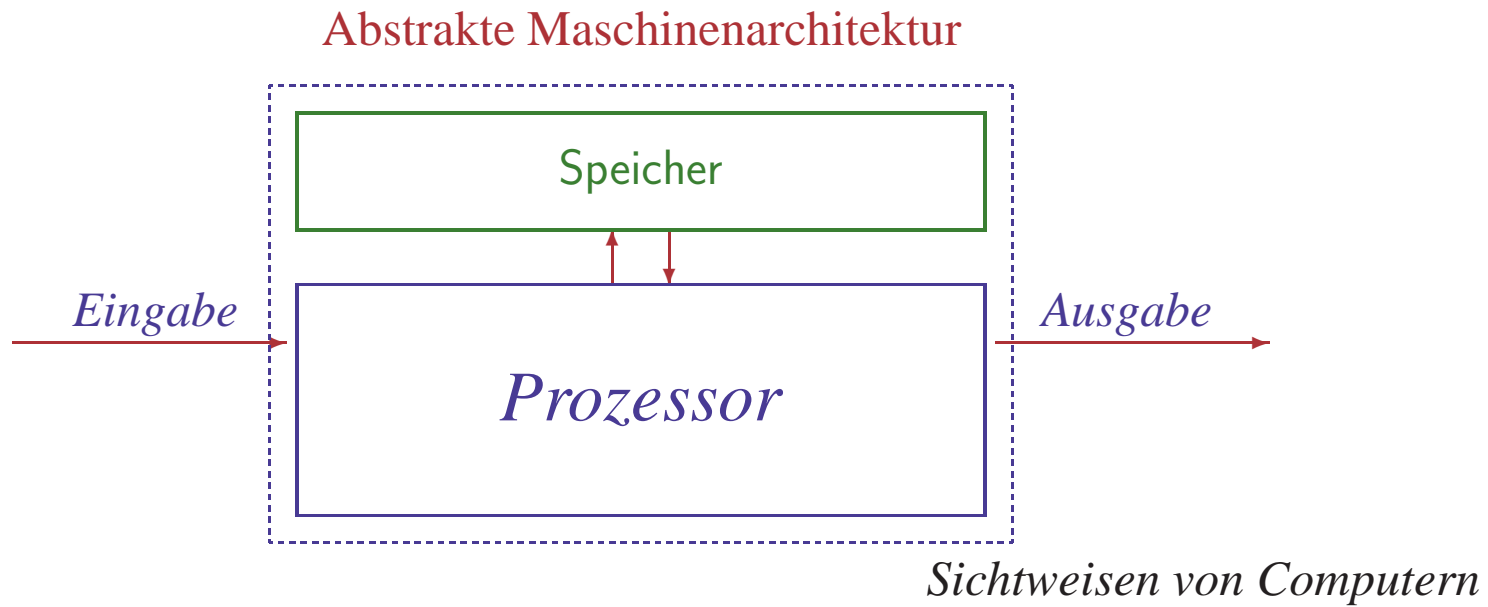


1. Deterministische endliche Automaten
2. Nichtdeterministische Automaten
3. Reguläre Ausdrücke
4. Grammatiken
5. Eigenschaften regulärer Sprachen

AUTOMATEN: DAS EINFACHSTE MASCHINENMODELL

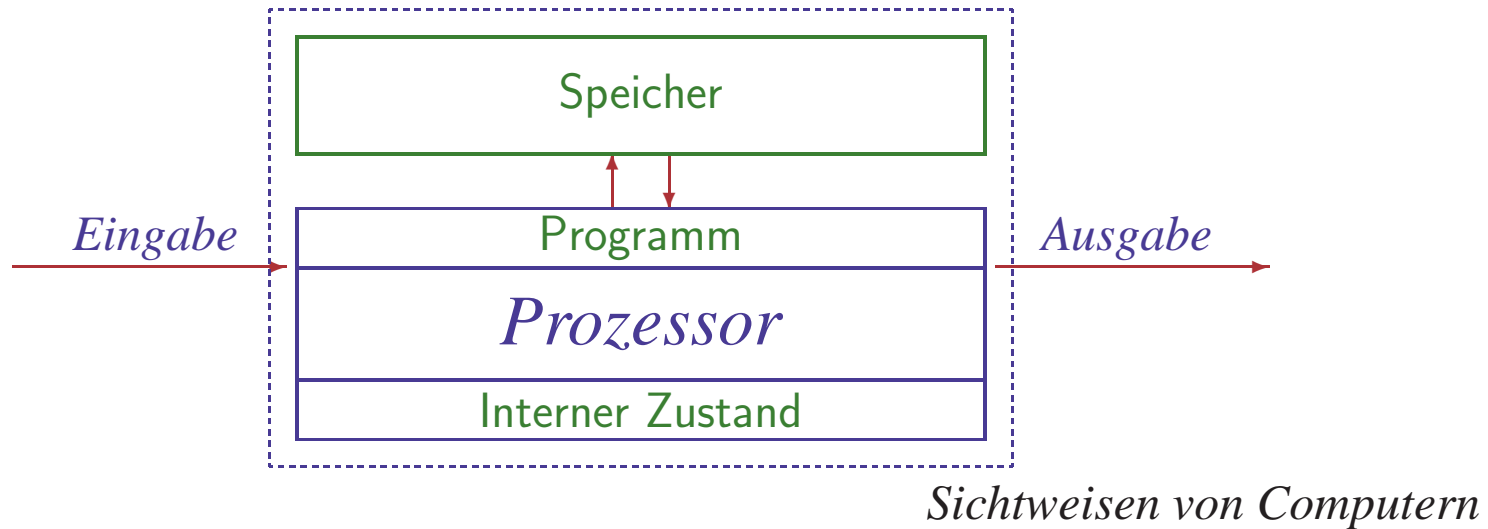


AUTOMATEN: DAS EINFACHSTE MASCHINENMODELL



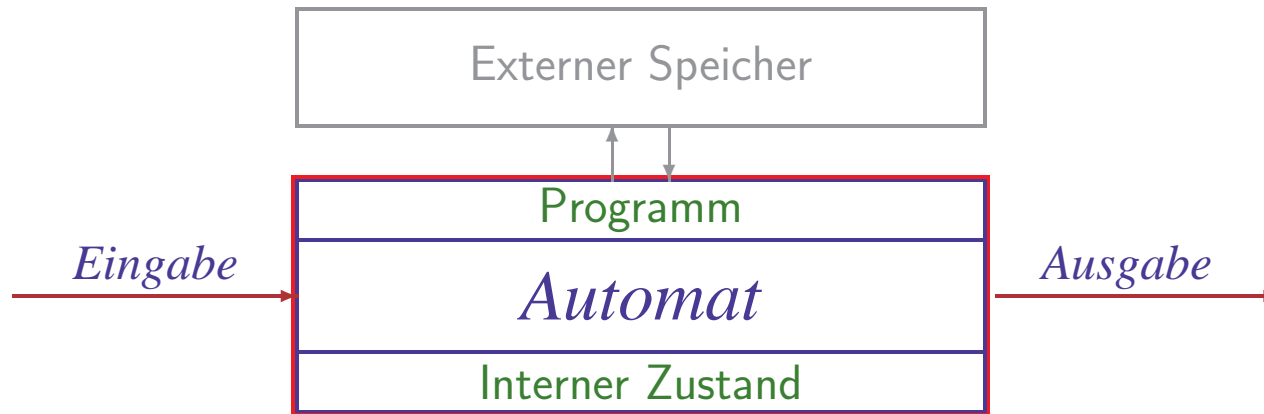
AUTOMATEN: DAS EINFACHSTE MASCHINENMODELL

Details des Berechnungsmoduls



AUTOMATEN: DAS EINFACHSTE MASCHINENMODELL

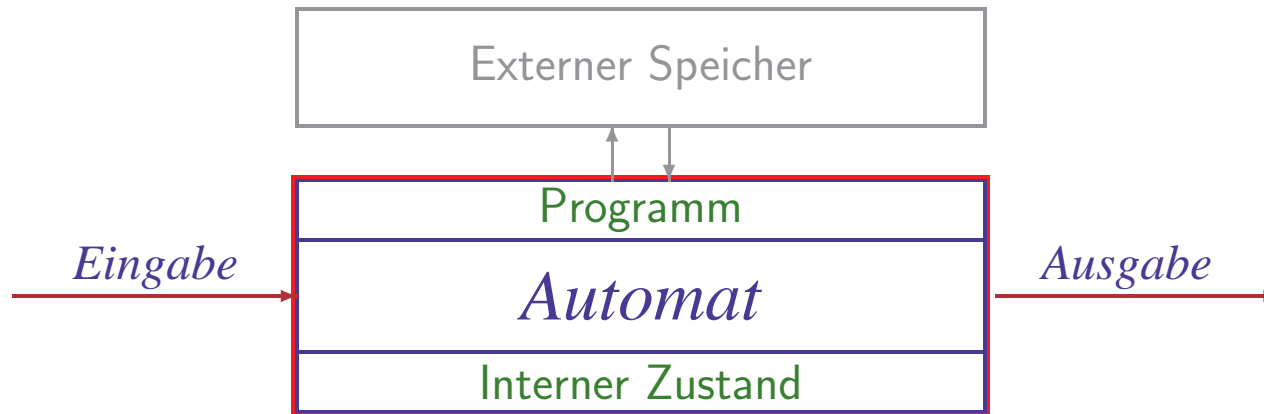
Aus der Sicht des Berechnungsmoduls



Sichtweisen von Computern

- **Automaten stehen im Kern jeder Berechnung**
 - Schnelle, direkte Verarbeitung von Eingaben
 - Keine interne Speicherung von Daten
 - Speicher sind Teil der Umgebung

AUTOMATEN: DAS EINFACHSTE MASCHINENMODELL



Sichtweisen von Computern

- **Automaten stehen im Kern jeder Berechnung**
 - Schnelle, direkte Verarbeitung von Eingaben
 - Keine interne Speicherung von Daten
 - Speicher sind Teil der Umgebung
- **Endliche Automaten sind leicht zu analysieren**
 - Jede Berechnung endet nach einer festen Anzahl von Schritten
 - Keine Schleifen oder Seiteneffekte

Grundlegendes und vielseitiges Modellierungskonzept für viele Arten von Hard- & Software

- **Steuerungsautomaten**
 - Alle Formen rein Hardware-gesteuerter automatischer Maschinen
Waschmaschinen, Autos, Unterhaltungselektronik, Ampelanlagen, Computerprozessoren
- **Entwurf und Überprüfung digitaler Schaltungen**
 - Entwicklungswerkzeuge & Testsoftware beschreiben endliches Verhalten
- **Lexikalische Analyse in Compilern**
 - Schnelle Identifizierung von Bezeichnern, Schlüsselwörtern, ...
- **Textsuche in umfangreichen Dokumenten**
 - Z.B. Suche nach Webseiten mithilfe von Schlüsselwörtern
- **Software mit endlichen Alternativen**
 - Kommunikationsprotokolle, Protokolle zum sicheren Datenaustausch ...

- **Generierte Sprache**

- Menge aller **möglichen** Ausgaben des Automaten

- **Erkannte Sprache**

- Menge aller Eingaben, die zur Ausgabe “ja” führen

- Alternativ: letzter Zustand des Automaten muß ein “Endzustand” sein

- **Sprachen endlicher Automaten sind einfach**

- Nur **sehr einfach** strukturierte Sprachen können beschrieben werden

- Durch endliche Automaten beschreibbare Sprachen heißen **regulär**

- **Automaten: erkennen von Wörtern**

- z.B. Wechselschalter: Verarbeitung von “Drück”-Eingaben

aus

ein

- **Zustände:** aus, ein

MODELLE ZUR BESCHREIBUNG REGULÄRER SPRACHEN

- **Automaten: erkennen von Wörtern**

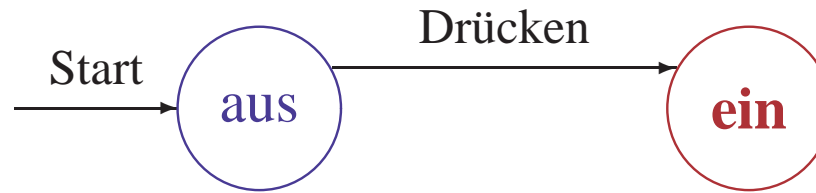
- z.B. Wechselschalter: Verarbeitung von “Drück”-Eingaben



- **Zustände:** aus, ein – **Startzustand:** aus

- **Automaten: erkennen von Wörtern**

- z.B. Wechselschalter: Verarbeitung von “Drück”-Eingaben

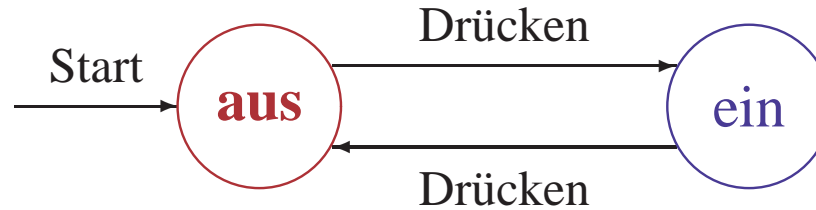


- **Zustände:** aus, ein – **Startzustand:** aus

- **Eingabesymbol:** Drücken eines Schalters

- **Automaten: erkennen von Wörtern**

- z.B. Wechselschalter: Verarbeitung von “Drück”-Eingaben

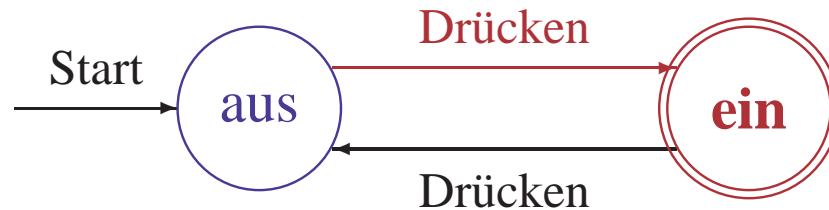


- **Zustände:** aus, ein – **Startzustand:** aus

- **Eingabesymbol:** Drücken eines Schalters

- **Automaten: erkennen von Wörtern**

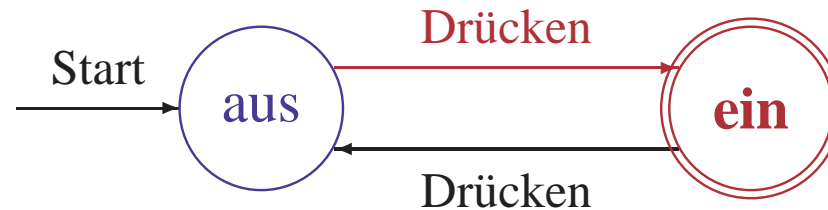
- z.B. Wechselschalter: Verarbeitung von “Drück”-Eingaben



- **Zustände:** aus, ein – **Startzustand:** aus – **Endzustand:** ein
- **Eingabesymbol:** Drücken eines Schalters
- Endzustand wird erreicht bei ungerader Anzahl von Drücken

- **Automaten: erkennen von Wörtern**

- z.B. Wechselschalter: Verarbeitung von “Drück”-Eingaben



- **Zustände:** aus, ein – **Startzustand:** aus – **Endzustand:** ein

- **Eingabesymbol:** Drücken eines Schalters

- Endzustand wird erreicht bei ungerader Anzahl von Drücken

- **Mathematische Mengennotation**

- z.B.: $\{w \in \{\text{Drücken}\}^* \mid \exists i \in \mathbb{N}. |w| = 2i + 1\}$, kurz $\{\text{Drücken}^{2i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$

- **Reguläre Ausdrücke: algebraische Strukturen**

- z.B.: $(\text{DrückenDrücken})^* \text{Drücken}$

- **Grammatiken: Vorschriften für Spracherzeugung**

- z.B.: $S \rightarrow \text{Drücken}$, $S \rightarrow S\text{DrückenDrücken}$

- Erzeugt nur ungerade Anzahl von Drücken-Symbolen

Theoretische Informatik I

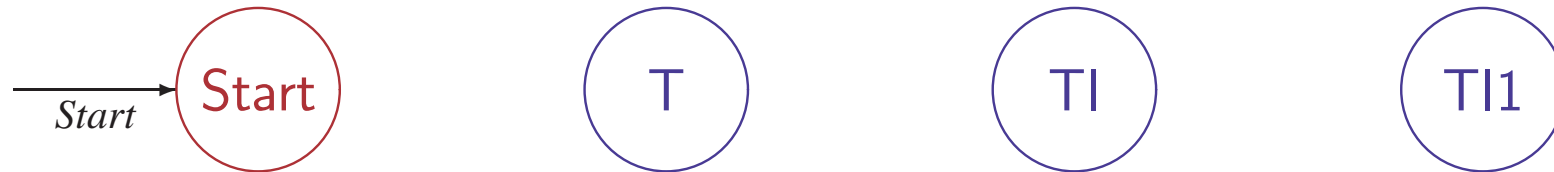
Einheit 2.1

Deterministische Endliche Automaten



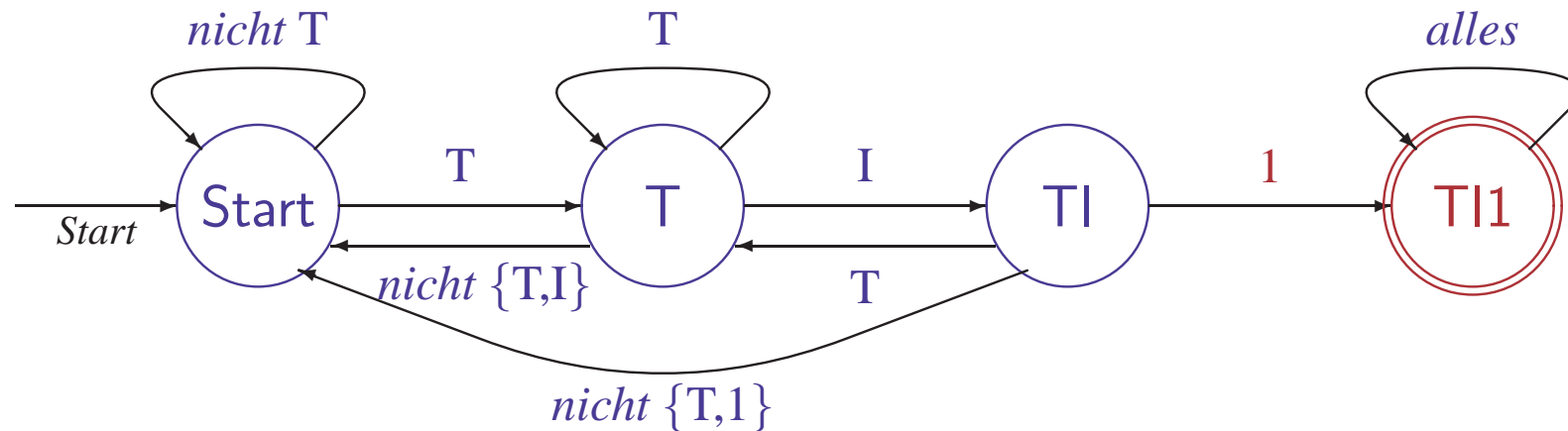
1. Arbeitsweise
2. Akzeptierte Sprache
3. Entwurf und Analyse
4. Automaten mit Ausgabe

ERKENNUNG VON WÖRTERN MIT AUTOMATEN



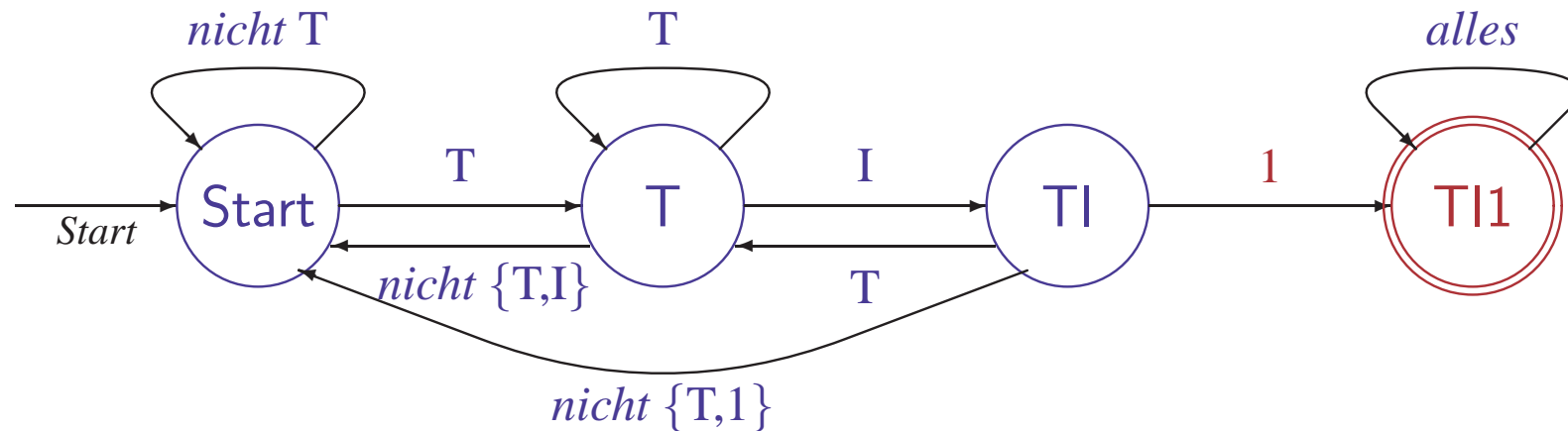
- Endliche Anzahl von **Zuständen**
- Ein **Startzustand**

ERKENNUNG VON WÖRTERN MIT AUTOMATEN



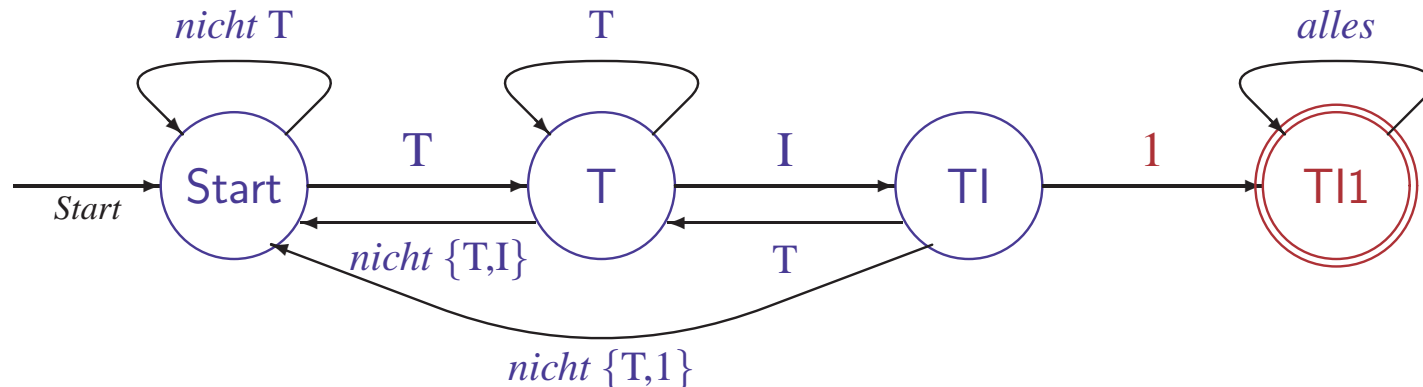
- Endliche Anzahl von **Zuständen**
- Ein **Startzustand**
- Regeln für **Zustandsübergänge**

ERKENNUNG VON WÖRTERN MIT AUTOMATEN



- Endliche Anzahl von **Zuständen**
- Ein **Startzustand**
- Regeln für **Zustandsübergänge**
- **Eingabealphabet:** $\{A, \dots, Z, a, \dots, z, 0, \dots, 9, ?, !, \dots\}$
- Ein oder mehrere akzeptierende **Endzustände**

ENDLICHE AUTOMATEN – MATHEMATISCH PRÄZISIERT



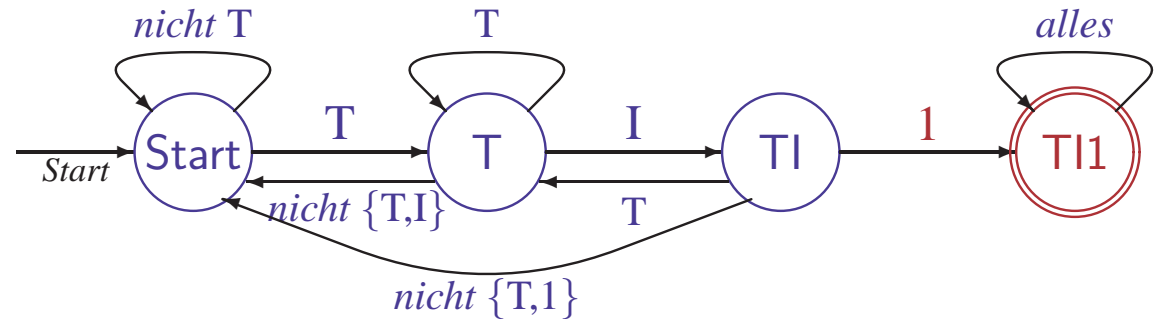
Ein **Deterministischer Endlicher Automat (DEA)**

ist ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ (endliches) **Eingabealphabet**
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ **Zustandsüberföhrungsfunktion**
- $q_0 \in Q$ **Startzustand** (Anfangszustand)
- $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden Zuständen** (Endzustände)
(Finale Zustände)

BESCHREIBUNG VON ENDLICHEN AUTOMATEN

• Übergangsdiagramm



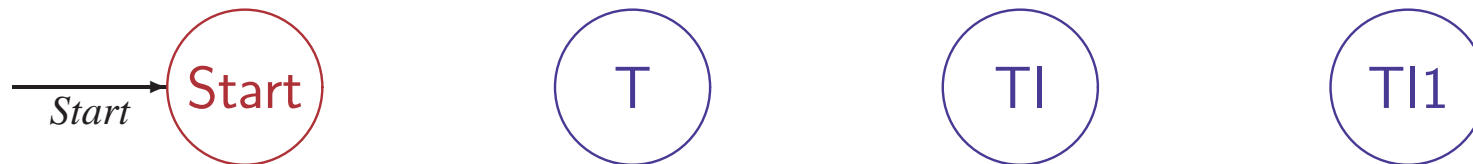
- Jeder Zustand in Q wird durch einen **Knoten** (Kreise) dargestellt
- Ist $\delta(q, a) = p$, so verläuft eine **Kante** von q nach p mit **Beschriftung** a (mehrere Beschriftungen derselben Kante möglich)
- q_0 wird durch einen mit *Start* beschrifteten Pfeil angezeigt
- Endzustände in F werden durch **doppelte Kreise** gekennzeichnet
- Σ meist **implizit** durch Diagramm bestimmt

• Übergangstabelle

- Tabellarische Darstellung der Funktion δ
- Kennzeichnung von q_0 durch einen **Pfeil**
- Kennzeichnung von F durch **Sterne**
- Σ und Q meist **implizit** durch Tabelle bestimmt

		<i>T</i>	<i>I</i>	<i>1</i>	<i>sonst</i>
\rightarrow	<i>S</i>	<i>T</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>S</i>
	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>I</i>	<i>S</i>	<i>S</i>
	<i>I</i>	<i>T</i>	<i>S</i>	<i>1</i>	<i>S</i>
<i>*</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>

ARBEITSWEISE VON ENDLICHEN AUTOMATEN



- **Anfangssituation**

- Automat befindet sich im Startzustand q_0

ARBEITSWEISE VON ENDLICHEN AUTOMATEN



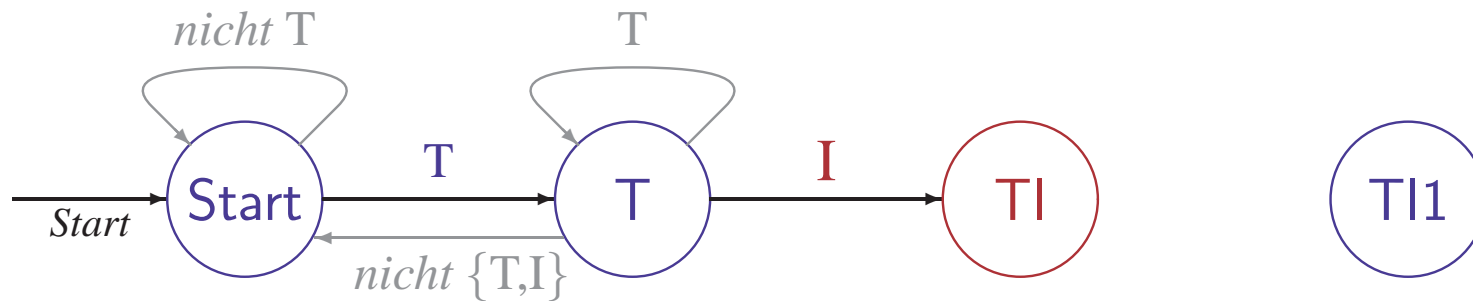
- **Anfangssituation**

- Automat befindet sich im Startzustand q_0

- **Arbeitsschritt**

- Im Zustand q lese Eingabesymbol a ,
- Bestimme $\delta(q,a)=p$ und wechsele in neuen Zustand p

ARBEITSWEISE VON ENDLICHEN AUTOMATEN



- **Anfangssituation**

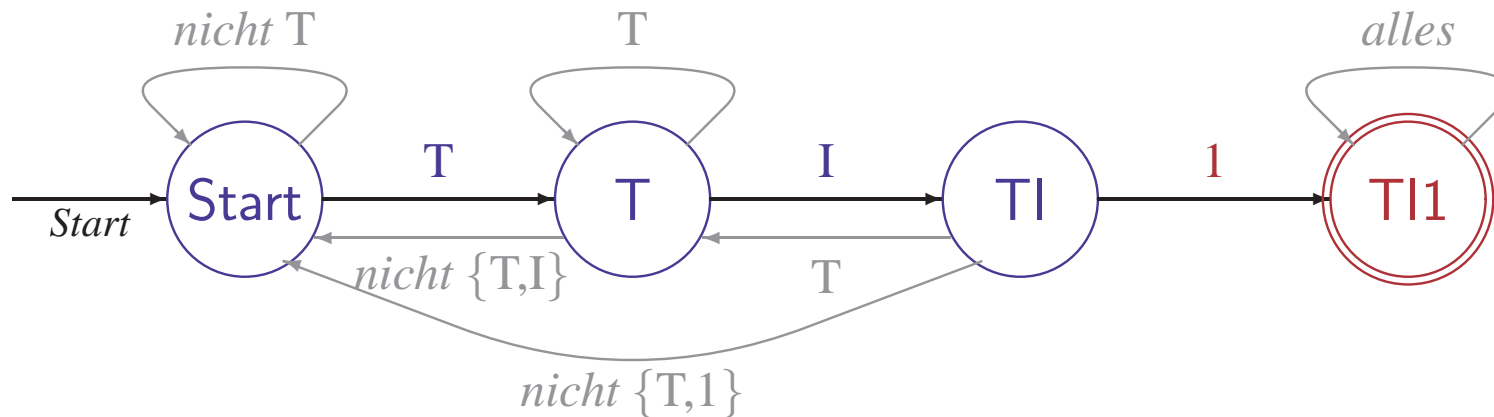
- Automat befindet sich im Startzustand q_0

- **Arbeitsschritt**

- Im Zustand q lese Eingabesymbol a ,

- Bestimme $\delta(q,a)=p$ und wechsele in neuen Zustand p

ARBEITSWEISE VON ENDLICHEN AUTOMATEN



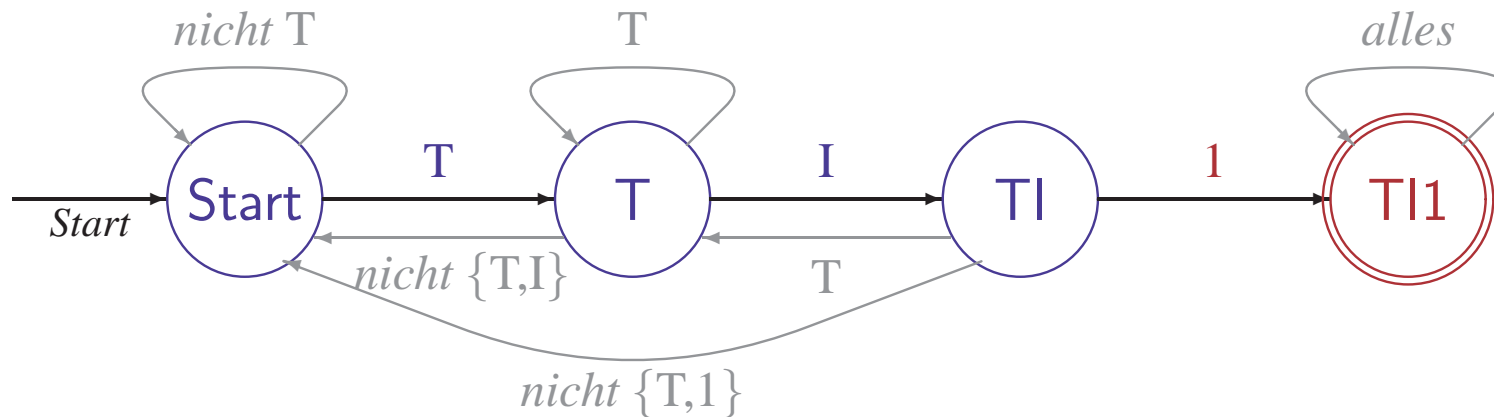
- **Anfangssituation**

- Automat befindet sich im Startzustand q_0

- **Arbeitsschritt**

- Im Zustand q lese Eingabesymbol a ,
- Bestimme $\delta(q,a)=p$ und wechsele in neuen Zustand p

ARBEITSWEISE VON ENDLICHEN AUTOMATEN



- **Anfangssituation**

- Automat befindet sich im Startzustand q_0

- **Arbeitschritt**

- Im Zustand q lese Eingabesymbol a ,

- Bestimme $\delta(q,a)=p$ und wechsele in neuen Zustand p

- **Terminierung und Ergebnis**

- Automat stoppt, wenn Eingabewort $w = a_1..a_n$ komplett gelesen ist

- Der Automat befindet sich jetzt in einem Zustand q_n

- Eingabe w wird akzeptiert, wenn $q_n \in F$, sonst wird w abgewiesen

- **Erweiterte Überföhrungsfunktion $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$**
 - Schrittweise Abarbeitung der Eingabe mit δ von links nach rechts
 - Informal: $\hat{\delta}(q, w_1w_2\dots w_n) = \delta(\dots(\delta(\delta(q, w_1), w_2), \dots), w_n)$
 - Mathematisch präzise Beschreibung benötigt **induktive Definition**

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} q & \text{falls } w = \epsilon, \\ \delta(\hat{\delta}(q, v), a) & \text{falls } w = va \text{ für ein } v \in \Sigma^*, a \in \Sigma \end{cases}$$

- **Erweiterte Überföhrungsfunktion $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$**
 - Schrittweise Abarbeitung der Eingabe mit δ von links nach rechts
 - Informal: $\hat{\delta}(q, w_1w_2\dots w_n) = \delta(\dots(\delta(\delta(q, w_1), w_2), \dots), w_n)$
 - Mathematisch präzise Beschreibung benötigt **induktive Definition**

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} q & \text{falls } w = \epsilon, \\ \delta(\hat{\delta}(q, v), a) & \text{falls } w = v a \text{ für ein } v \in \Sigma^*, a \in \Sigma \end{cases}$$

- **Von A akzeptierte Sprache**
 - Menge der Eingabewörter w , für die $\hat{\delta}(q_0, w)$ akzeptierender Zustand ist
 - $$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$
 - Auch: die **von A erkannte Sprache**

- **Erweiterte Überföhrungsfunktion $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$**
 - Schrittweise Abarbeitung der Eingabe mit δ von links nach rechts
 - Informal: $\hat{\delta}(q, w_1w_2\dots w_n) = \delta(\dots(\delta(\delta(q, w_1), w_2), \dots), w_n)$
 - Mathematisch präzise Beschreibung benötigt **induktive Definition**

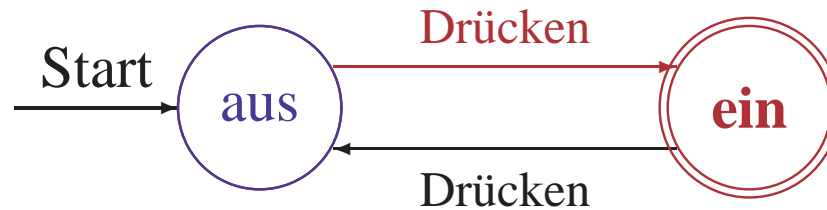
$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} q & \text{falls } w = \epsilon, \\ \delta(\hat{\delta}(q, v), a) & \text{falls } w = v a \text{ für ein } v \in \Sigma^*, a \in \Sigma \end{cases}$$

- **Von A akzeptierte Sprache**
 - Menge der Eingabewörter w , für die $\hat{\delta}(q_0, w)$ akzeptierender Zustand ist

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$

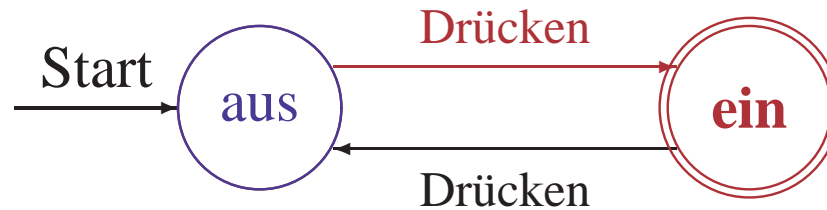
- Auch: die **von A erkannte Sprache**
- **Reguläre Sprache**
 - Sprache, die von einem DEA A akzeptiert wird

ANALYSE DER SPRACHE DES WECHSELSCHALTERS



- **Sprache: Eingaben, für die Automat eingeschaltet ist**
 - Teilmenge der Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{\text{Drücken}\}$

ANALYSE DER SPRACHE DES WECHSELSCHALTERS



- **Sprache: Eingaben, für die Automat eingeschaltet ist**

- Teilmenge der Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{\text{Drücken}\}$

- **Automat A ist ein Wechselschalter**

Nach n -fachem Drücken ist A aus(ein)geschaltet, wenn n (un)gerade ist

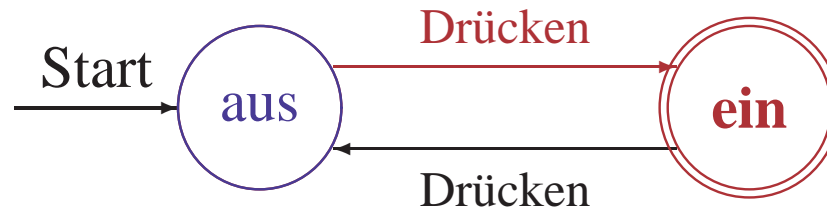
Zwei Eigenschaften sind zu zeigen:

- $S_1(n)$: Ist n gerade, so ist $\hat{\delta}(\text{aus}, \text{Drücken}^n) = \text{aus}$

- $S_2(n)$: Ist n ungerade, so ist $\hat{\delta}(\text{aus}, \text{Drücken}^n) = \text{ein}$

Beweis: simultane Induktion analog zu Einheit 1, Folie, Details auf nächster Folie

ANALYSE DER SPRACHE DES WECHSELSCHALTERS



- **Sprache: Eingaben, für die Automat eingeschaltet ist**

- Teilmenge der Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{\text{Drücken}\}$

- **Automat A ist ein Wechselschalter**

Nach n -fachem Drücken ist A aus(ein)geschaltet, wenn n (un)gerade ist

Zwei Eigenschaften sind zu zeigen:

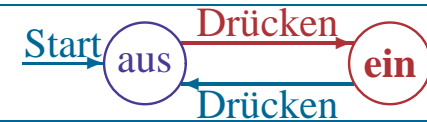
- $S_1(n)$: Ist n gerade, so ist $\hat{\delta}(\text{aus}, \text{Drücken}^n) = \text{aus}$

- $S_2(n)$: Ist n ungerade, so ist $\hat{\delta}(\text{aus}, \text{Drücken}^n) = \text{ein}$

Beweis: simultane Induktion analog zu Einheit 1, Folie, Details auf nächster Folie

- **Formale Beschreibung der Sprache von A**

$$L(A) = \{w \in \text{Drücken}^* \mid \hat{\delta}(\text{aus}, w) \in \{\text{ein}\}\} = \{\text{Drücken}^{2i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$$



Um zu zeigen, daß der Automat ein Wechselschalter ist, zeigen wir durch Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgenden beiden Aussagen gelten

$$S_1(n): n \text{ gerade} \Leftrightarrow \hat{\delta}(\text{aus}, \text{Drücken}^n) = \text{aus}$$

$$S_2(n): n \text{ ungerade} \Leftrightarrow \hat{\delta}(\text{aus}, \text{Drücken}^n) = \text{ein}$$

Induktionsanfang $n=0$:

$S_1(n)$: 0 ist gerade und $\hat{\delta}(\text{aus}, \text{Drücken}^0) = \hat{\delta}(\text{aus}, \epsilon) = \text{aus}$, also gilt Aussage $S_1(n)$.

$S_2(n)$: 0 ist nicht ungerade und $\hat{\delta}(\text{aus}, \text{Drücken}^0) \neq \text{ein}$, also gilt die Äquivalenz $S_2(n)$, da jeweils die rechte und linke Seite falsch ist.

Induktionsannahme: $S_1(m)$ und $S_2(m)$ seien für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$ gezeigt.

Induktionsschritt: Es sei $n = m+1$.

$S_1(n)$: Es ist $n = m+1$ gerade

$$\Leftrightarrow m \text{ ist ungerade}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\delta}(\text{aus}, \text{Drücken}^m) = \text{ein} \quad (\text{Induktionsannahme } S_2(m))$$

$$\Leftrightarrow \hat{\delta}(\text{aus}, \text{Drücken}^n) = \text{aus}$$

$S_2(n)$: Es ist $n = m+1$ ungerade

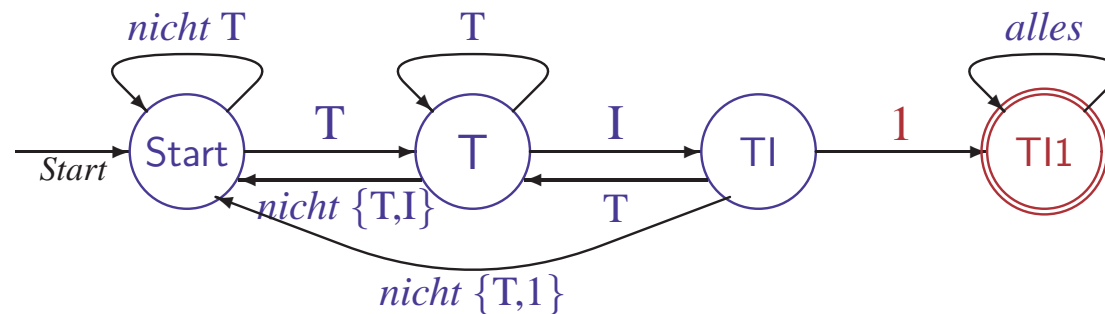
$$\Leftrightarrow m \text{ ist gerade}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\delta}(\text{aus}, \text{Drücken}^m) = \text{aus} \quad (\text{Induktionsannahme } S_1(m))$$

$$\Leftrightarrow \hat{\delta}(\text{aus}, \text{Drücken}^n) = \text{ein}$$

Aufgrund des Induktionsprinzips gilt $S_1(n)$ und $S_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

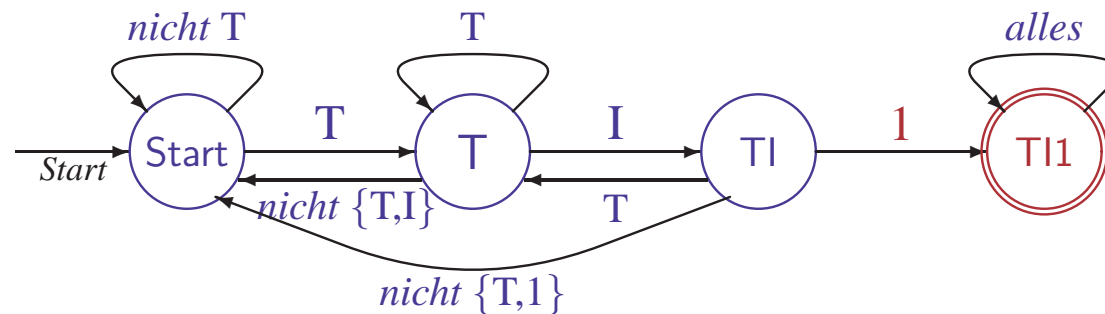
ANALYSE DER SPRACHE DES “TI1”-AUTOMATEN



- **Sprache: Eingaben, die den Zustand TI1 erreichen**

- Vermutung: Menge der Wörter, die TI1 als Teilwort enthalten
- Formale Beschreibung: $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^*. w = uTI1v\}$
- Zu beweisen ist also: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) \in \{TI1\} \Leftrightarrow \exists u, v \in \Sigma^*. w = uTI1v$

ANALYSE DER SPRACHE DES “TI1”-AUTOMATEN



- **Sprache: Eingaben, die den Zustand TI1 erreichen**

- Vermutung: Menge der Wörter, die TI1 als Teilwort enthalten
- Formale Beschreibung: $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^*. w = uTI1v\}$
- Zu beweisen ist also: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) \in \{TI1\} \Leftrightarrow \exists u, v \in \Sigma^*. w = uTI1v$

- **Beweis zeigt, welche Wörter welchen Zustand erreichen**

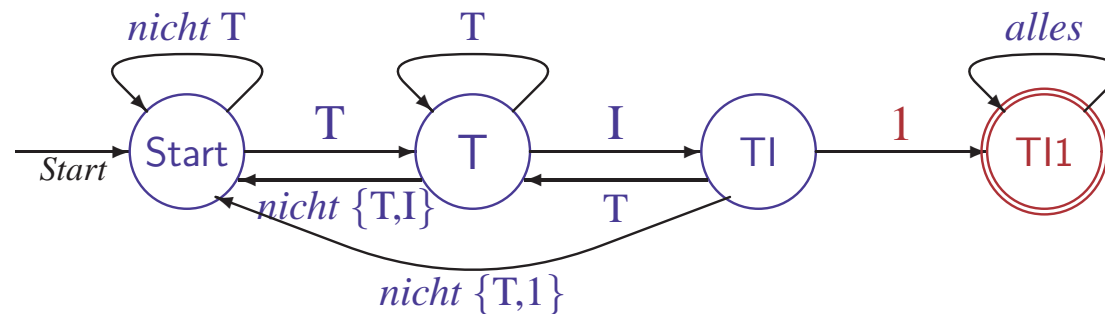
Beweise drei Eigenschaften durch simultane Induktion:

(nächste Folie)

- $S_3(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = TI \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = uTI$
- $S_2(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = T \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = uT$
- $S_1(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{Start}$ in allen anderen Fällen

Die Behauptung folgt dann aus S_3 (und einer Induktion innerhalb von TI1)

ANALYSE DER SPRACHE DES “TI1”-AUTOMATEN



- **Sprache: Eingaben, die den Zustand TI1 erreichen**

- Vermutung: Menge der Wörter, die TI1 als Teilwort enthalten
- Formale Beschreibung: $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^*. w = uTI1v\}$
- Zu beweisen ist also: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) \in \{TI1\} \Leftrightarrow \exists u, v \in \Sigma^*. w = uTI1v$

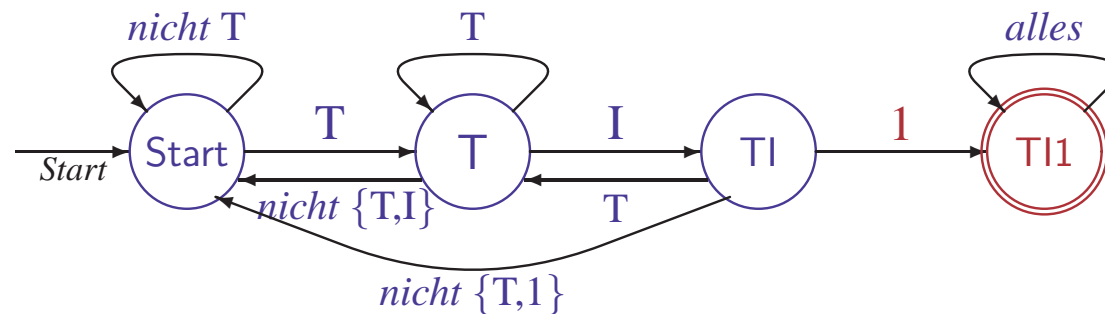
- **Beweis zeigt, welche Wörter welchen Zustand erreichen**

Beweise drei Eigenschaften durch simultane Induktion: (nächste Folie)

- $S_3(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = TI1 \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = uTI1$ fehlt da nicht etwas ?
- $S_2(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = T \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = uT$
- $S_1(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{Start} \Leftrightarrow \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq uTI1v \wedge w \neq uTI \wedge w \neq uT$

Die Behauptung folgt dann aus S_3 (und einer Induktion innerhalb von TI1)

ANALYSE DER SPRACHE DES “TI1”-AUTOMATEN



- **Sprache: Eingaben, die den Zustand TI1 erreichen**

- Vermutung: Menge der Wörter, die TI1 als Teilwort enthalten
- Formale Beschreibung: $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^*. w = uTI1v\}$
- Zu beweisen ist also: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) \in \{TI1\} \Leftrightarrow \exists u, v \in \Sigma^*. w = uTI1v$

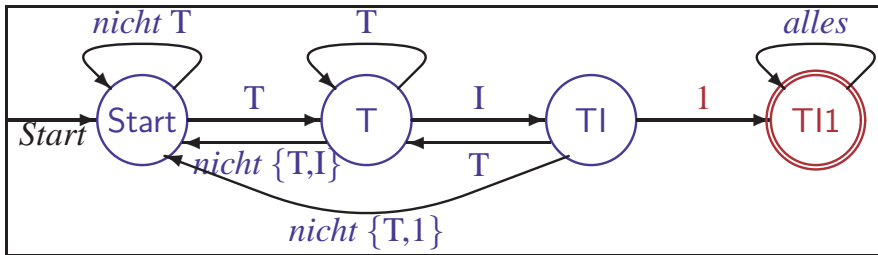
- **Beweis zeigt, welche Wörter welchen Zustand erreichen**

Beweise drei Eigenschaften durch simultane Induktion: (nächste Folie)

- $S_3(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = TI \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = uTI \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq uTI1v$
- $S_2(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = T \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = uT \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq uTI1v$
- $S_1(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{Start} \Leftrightarrow \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq uTI1v \wedge w \neq uTI \wedge w \neq uT$

Die Behauptung folgt dann aus S_3 (und einer Induktion innerhalb von TI1)

BEWEIS DER SPRACHE DES “TI1”-AUTOMATEN



Beweise durch simultane (strukturelle) Induktion:

$$S_3(w): \hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{TI} \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{TI} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v$$

$$S_2(w): \hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{T} \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{T} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v$$

$$S_1(w): \hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{Start} \Leftrightarrow \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \wedge w \neq u\text{TI} \wedge w \neq u\text{T}$$

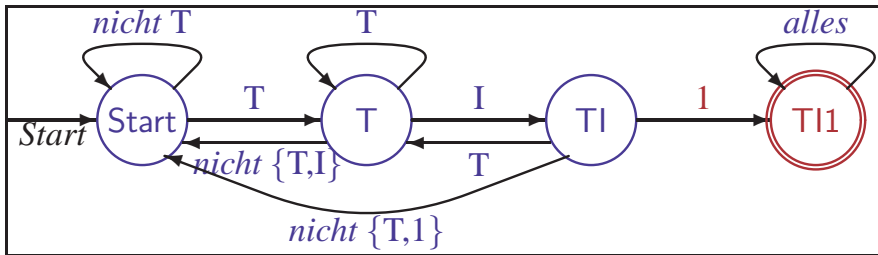
Induktionsanfang $w = \epsilon$:

$S_1(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, \epsilon) = \text{Start}$ gilt und $w = \epsilon$ hat keine der drei “verbotenen” Formen ✓

$S_2(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, \epsilon) = \text{T}$ gilt nicht und $w = \epsilon$ endet nicht mit T ✓

$S_3(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, \epsilon) = \text{TI}$ gilt nicht und $w = \epsilon$ endet nicht mit TI ✓

BEWEIS DER SPRACHE DES “TI1”-AUTOMATEN



Beweise durch simultane (strukturelle) Induktion:

$$S_3(w): \hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{TI} \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{TI} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v$$

$$S_2(w): \hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{T} \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{T} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v$$

$$S_1(w): \hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{Start} \Leftrightarrow \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \wedge w \neq u\text{TI} \wedge w \neq u\text{T}$$

Induktionsanfang $w = \epsilon$:

$S_1(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, \epsilon) = \text{Start}$ gilt und $w = \epsilon$ hat keine der drei “verbotenen” Formen ✓

$S_2(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, \epsilon) = \text{T}$ gilt nicht und $w = \epsilon$ endet nicht mit T ✓

$S_3(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, \epsilon) = \text{TI}$ gilt nicht und $w = \epsilon$ endet nicht mit TI ✓

Induktionsannahme: die Aussagen $S_1(w')$ – $S_3(w')$ seien für ein beliebiges $w' \in \Sigma^*$ gezeigt.

Induktionsschritt: Es sei $w = w'a$ für ein beliebiges $a \in \Sigma$.

$S_1(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{Start}$

$$\Leftrightarrow (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{Start} \wedge a \neq \text{T}) \vee (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{T} \wedge a \notin \{\text{T}, \text{I}\}) \vee (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{TI} \wedge a \notin \{\text{T}, 1\})$$

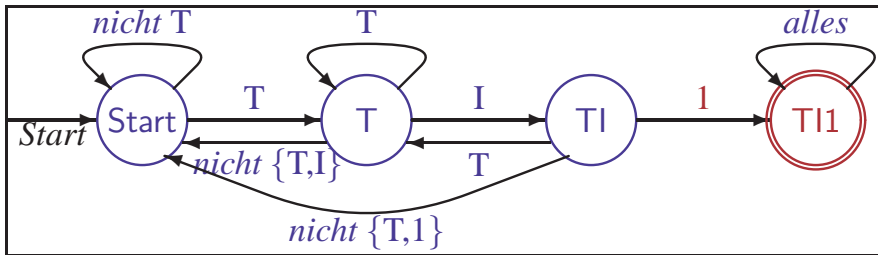
$$\Leftrightarrow \forall u, v \in \Sigma^*. w' \neq u\text{TI}1v \wedge w' \neq u\text{TI} \wedge w' \neq u\text{T} \wedge a \neq \text{T} \quad S_1(w')$$

$$\vee \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{T} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \wedge a \notin \{\text{T}, \text{I}\} \quad S_2(w')$$

$$\vee \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{TI} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \wedge a \notin \{\text{T}, 1\} \quad S_3(w')$$

$$\Leftrightarrow \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \wedge w \neq u\text{TI} \wedge w \neq u\text{T} \quad \checkmark$$

BEWEIS DER SPRACHE DES “TI1”-AUTOMATEN



Beweise durch simultane (strukturelle) Induktion:

$$S_3(w): \hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{TI} \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{TI} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v$$

$$S_2(w): \hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{T} \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{T} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v$$

$$S_1(w): \hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{Start} \Leftrightarrow \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \wedge w \neq u\text{TI} \wedge w \neq u\text{T}$$

Induktionsanfang $w = \epsilon$:

$S_1(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, \epsilon) = \text{Start}$ gilt und $w = \epsilon$ hat keine der drei “verbotenen” Formen ✓

$S_2(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, \epsilon) = \text{T}$ gilt nicht und $w = \epsilon$ endet nicht mit T ✓

$S_3(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, \epsilon) = \text{TI}$ gilt nicht und $w = \epsilon$ endet nicht mit TI ✓

Induktionsannahme: die Aussagen $S_1(w')$ – $S_3(w')$ seien für ein beliebiges $w' \in \Sigma^*$ gezeigt.

Induktionsschritt: Es sei $w = w'a$ für ein beliebiges $a \in \Sigma$.

$S_1(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{Start}$

$$\Leftrightarrow (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{Start} \wedge a \neq \text{T}) \vee (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{T} \wedge a \notin \{\text{T}, \text{I}\}) \vee (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{TI} \wedge a \notin \{\text{T}, \text{1}\})$$

$$\Leftrightarrow \forall u, v \in \Sigma^*. w' \neq u\text{TI}1v \wedge w' \neq u\text{TI} \wedge w' \neq u\text{T} \wedge a \neq \text{T} \quad S_1(w')$$

$$\vee \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{T} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \wedge a \notin \{\text{T}, \text{I}\} \quad S_2(w')$$

$$\vee \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{TI} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \wedge a \notin \{\text{T}, \text{1}\} \quad S_3(w')$$

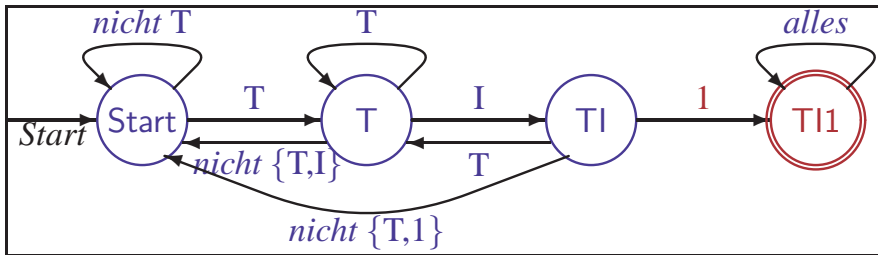
$$\Leftrightarrow \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \wedge w \neq u\text{TI} \wedge w \neq u\text{T} \quad \checkmark$$

$S_2(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{T}$

$$\Leftrightarrow (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{Start} \wedge a = \text{T}) \vee (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{T} \wedge a = \text{T}) \vee (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{TI} \wedge a = \text{T})$$

$$\Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{T} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \quad \text{mit } S_1(w'), S_2(w'), S_3(w') \quad \checkmark$$

BEWEIS DER SPRACHE DES “TI1”-AUTOMATEN



Beweise durch simultane (strukturelle) Induktion:

$$S_3(w): \hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{TI} \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{TI} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v$$

$$S_2(w): \hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{T} \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{T} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v$$

$$S_1(w): \hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{Start} \Leftrightarrow \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \wedge w \neq u\text{TI} \wedge w \neq u\text{T}$$

Induktionsanfang $w = \epsilon$:

$S_1(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, \epsilon) = \text{Start}$ gilt und $w = \epsilon$ hat keine der drei “verbotenen” Formen ✓

$S_2(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, \epsilon) = \text{T}$ gilt nicht und $w = \epsilon$ endet nicht mit T ✓

$S_3(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, \epsilon) = \text{TI}$ gilt nicht und $w = \epsilon$ endet nicht mit TI ✓

Induktionsannahme: die Aussagen $S_1(w')$ – $S_3(w')$ seien für ein beliebiges $w' \in \Sigma^*$ gezeigt.

Induktionsschritt: Es sei $w = w'a$ für ein beliebiges $a \in \Sigma$.

$S_1(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{Start}$

$$\Leftrightarrow (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{Start} \wedge a \neq \text{T}) \vee (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{T} \wedge a \notin \{\text{T}, \text{I}\}) \vee (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{TI} \wedge a \notin \{\text{T}, 1\})$$

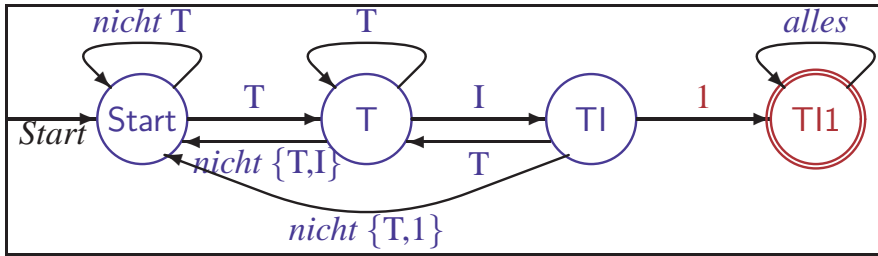
$$\Leftrightarrow \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \wedge w \neq u\text{TI} \wedge w \neq u\text{T} \quad \text{mit } S_1(w'), S_2(w'), S_3(w') \quad \checkmark$$

$S_2(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{T}$

$$\Leftrightarrow (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{Start} \wedge a = \text{T}) \vee (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{T} \wedge a = \text{T}) \vee (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{TI} \wedge a = \text{T})$$

$$\Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{T} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \quad \text{mit } S_1(w'), S_2(w'), S_3(w') \quad \checkmark$$

BEWEIS DER SPRACHE DES “TI1”-AUTOMATEN



Beweise durch simultane (strukturelle) Induktion:

$$S_3(w): \hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{TI} \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{TI} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v$$

$$S_2(w): \hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{T} \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{T} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v$$

$$S_1(w): \hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{Start} \Leftrightarrow \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \wedge w \neq u\text{TI} \wedge w \neq u\text{T}$$

Induktionsanfang $w = \epsilon$:

$S_1(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, \epsilon) = \text{Start}$ gilt und $w = \epsilon$ hat keine der drei “verbotenen” Formen ✓

$S_2(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, \epsilon) = \text{T}$ gilt nicht und $w = \epsilon$ endet nicht mit T ✓

$S_3(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, \epsilon) = \text{TI}$ gilt nicht und $w = \epsilon$ endet nicht mit TI ✓

Induktionsannahme: die Aussagen $S_1(w')$ – $S_3(w')$ seien für ein beliebiges $w' \in \Sigma^*$ gezeigt.

Induktionsschritt: Es sei $w = w'a$ für ein beliebiges $a \in \Sigma$.

$S_1(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{Start}$

$$\Leftrightarrow (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{Start} \wedge a \neq \text{T}) \vee (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{T} \wedge a \notin \{\text{T}, \text{I}\}) \vee (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{TI} \wedge a \notin \{\text{T}, \text{1}\})$$

$$\Leftrightarrow \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \wedge w \neq u\text{TI} \wedge w \neq u\text{T} \quad \text{mit } S_1(w'), S_2(w'), S_3(w') \quad \checkmark$$

$S_2(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{T}$

$$\Leftrightarrow (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{Start} \wedge a = \text{T}) \vee (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{T} \wedge a = \text{T}) \vee (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{TI} \wedge a = \text{T})$$

$$\Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{T} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \quad \text{mit } S_1(w'), S_2(w'), S_3(w') \quad \checkmark$$

$S_3(w)$: $\hat{\delta}(\text{Start}, w) = \text{TI}$

$$\Leftrightarrow (\hat{\delta}(\text{Start}, w') = \text{T} \wedge a = \text{I})$$

$$\Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w = u\text{TI} \wedge \forall u, v \in \Sigma^*. w \neq u\text{TI}1v \quad \text{mit } S_2(w') \quad \checkmark$$

Aufgrund des Induktionsprinzips gilt $S_1(w)$, $S_2(w)$ und $S_3(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$.

Erkenne, ob eine Binärzahl durch 3 teilbar ist

- **Binärzahl wird von links nach rechts gelesen**

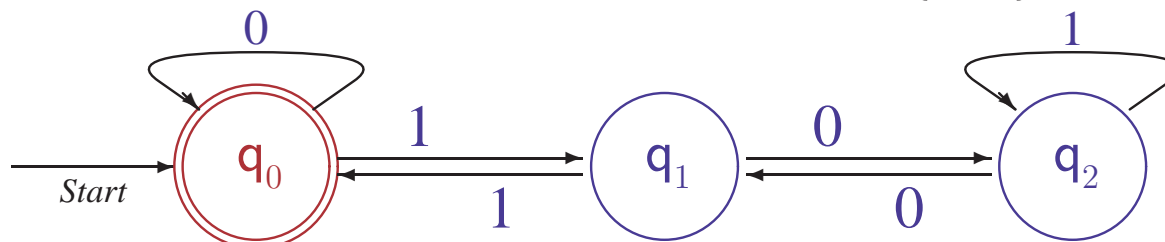
- Eingabewort $w = w_0..w_n$ entspricht der Zahl $n = r_b(w) = \sum_{j=0}^n w_j \cdot 2^{n-j}$

Erkenne, ob eine Binärzahl durch 3 teilbar ist

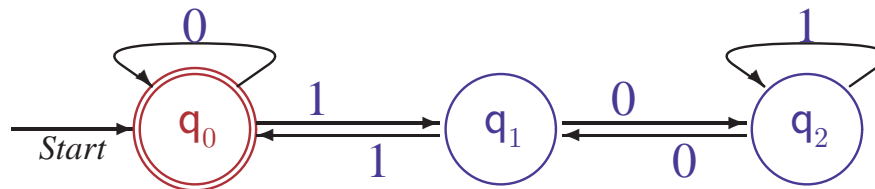
- **Binärzahl wird von links nach rechts gelesen**
 - Eingabewort $w = w_0..w_n$ entspricht der Zahl $n = r_b(w) = \sum_{j=0}^n w_j \cdot 2^{n-j}$
- **Konstruktion des Automaten aus induktiver Beweisidee**
 - Das Eingabewort $w = \epsilon$ entspricht der Zahl $n = 0$
 - Entspricht v der Zahl i , dann entspricht $w = va$ der Zahl $n = 2i+a$
 - Die Zahl n ist durch 3 teilbar wenn $n \bmod 3 = 0$ (Divisionsrest)
 - Wir wissen $2i+a \bmod 3 = 2(i \bmod 3) + a \bmod 3$

Erkenne, ob eine Binärzahl durch 3 teilbar ist

- **Binärzahl wird von links nach rechts gelesen**
 - Eingabewort $w = w_0..w_n$ entspricht der Zahl $n = r_b(w) = \sum_{j=0}^n w_j \cdot 2^{n-j}$
- **Konstruktion des Automaten aus induktiver Beweisidee**
 - Das Eingabewort $w = \epsilon$ entspricht der Zahl $n = 0$
 - Entspricht v der Zahl i , dann entspricht $w = va$ der Zahl $n = 2i+a$
 - Die Zahl n ist durch 3 teilbar wenn $n \bmod 3 = 0$ (Divisionsrest)
 - Wir wissen $2i+a \bmod 3 = 2(i \bmod 3) + a \bmod 3$
- **Drei Zustände sind erforderlich**
 - Zustand $q_i \hat{=}$ bisher gelesene Binärzahl hat Divisionsrest i (modulo 3)
 - Zustandsübergänge erhalten “Bedeutung”: $\delta(q_i, a) = q_{2i+a \bmod 3}$
 - Resultierender DEA über Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$

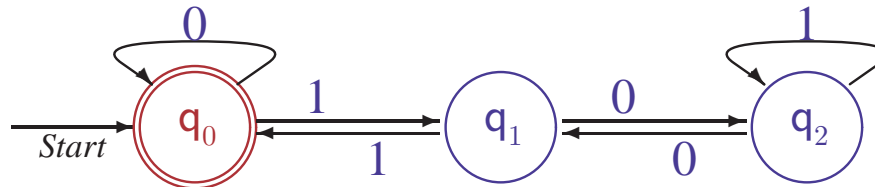


ZEIGE $L(A) = \{w \mid r_b(w) \bmod 3 = 0\}$



- **Zeige durch simultane strukturelle Induktion über w**
 - $S_j(w)$: $\hat{\delta}(q_0, w) = q_j \Leftrightarrow r_b(w) \bmod 3 = j$ für $j \in \{0, 1, 2\}$

ZEIGE $L(A) = \{w \mid r_b(w) \bmod 3 = 0\}$



- **Zeige durch simultane strukturelle Induktion über w**

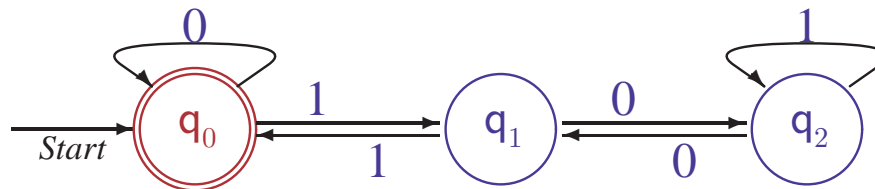
- $S_j(w)$: $\hat{\delta}(q_0, w) = q_j \Leftrightarrow r_b(w) \bmod 3 = j$ für $j \in \{0, 1, 2\}$

- **Induktionsanfang $w = \epsilon$:**

- Es ist $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = q_0$ und $r_b(\epsilon) \bmod 3 = 0$

- Damit gilt $S_0(w)$ und auch $S_1(w)$ und $S_2(w)$ (beide Seiten von \Leftrightarrow sind falsch) ✓

ZEIGE $L(A) = \{w \mid r_b(w) \bmod 3 = 0\}$



- **Zeige durch simultane strukturelle Induktion über w**

- $S_j(w)$: $\hat{\delta}(q_0, w) = q_j \Leftrightarrow r_b(w) \bmod 3 = j$ für $j \in \{0, 1, 2\}$

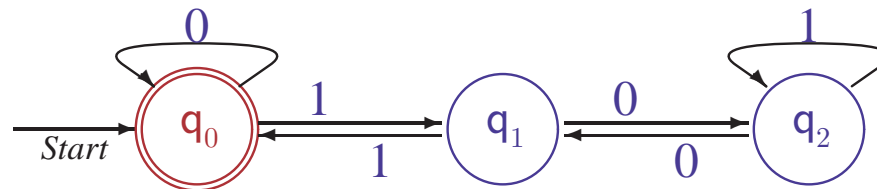
- **Induktionsanfang $w = \epsilon$:**

- Es ist $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = q_0$ und $r_b(\epsilon) \bmod 3 = 0$

- Damit gilt $S_0(w)$ und auch $S_1(w)$ und $S_2(w)$ (beide Seiten von \Leftrightarrow sind falsch) ✓

- **Induktionsannahme: $S_j(w')$ sei gezeigt für $w' \in \Sigma^*$ und $j \in \{0, 1, 2\}$**

ZEIGE $L(A) = \{w \mid r_b(w) \bmod 3 = 0\}$



• **Zeige durch simultane strukturelle Induktion über w**

– $S_j(w)$: $\hat{\delta}(q_0, w) = q_j \Leftrightarrow r_b(w) \bmod 3 = j$ für $j \in \{0, 1, 2\}$

• **Induktionsanfang $w = \epsilon$:**

– Es ist $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = q_0$ und $r_b(\epsilon) \bmod 3 = 0$

– Damit gilt $S_0(w)$ und auch $S_1(w)$ und $S_2(w)$ (beide Seiten von \Leftrightarrow sind falsch) ✓

• **Induktionsannahme: $S_j(w')$ sei gezeigt für $w' \in \Sigma^*$ und $j \in \{0, 1, 2\}$**

• **Induktionsschritt: sei $w = w'a$ für ein beliebiges $a \in \Sigma$**

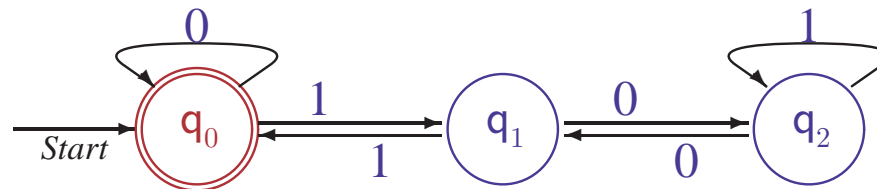
$$\hat{\delta}(q_0, w) = q_j$$

$$\Leftrightarrow \exists i. \hat{\delta}(q_0, w') = q_i \wedge \delta(q_i, a) = q_j$$

$$\Leftrightarrow \exists i. r_b(w') \bmod 3 = i \wedge j = 2i + a \bmod 3$$

$$\Leftrightarrow r_b(w) \bmod 3 = 2r_b(w') + a \bmod 3 = 2(r_b(w') \bmod 3) + a \bmod 3 = j \quad \checkmark$$

ZEIGE $L(A) = \{w \mid r_b(w) \bmod 3 = 0\}$



- **Zeige durch simultane strukturelle Induktion über w**
 - $S_j(w)$: $\hat{\delta}(q_0, w) = q_j \Leftrightarrow r_b(w) \bmod 3 = j$ für $j \in \{0, 1, 2\}$
- **Induktionsanfang $w = \epsilon$:**
 - Es ist $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = q_0$ und $r_b(\epsilon) \bmod 3 = 0$
 - Damit gilt $S_0(w)$ und auch $S_1(w)$ und $S_2(w)$ (beide Seiten von \Leftrightarrow sind falsch) ✓
- **Induktionsannahme: $S_j(w')$ sei gezeigt für $w' \in \Sigma^*$ und $j \in \{0, 1, 2\}$**
- **Induktionsschritt: sei $w = w'a$ für ein beliebiges $a \in \Sigma$**
 - $\hat{\delta}(q_0, w) = q_j$
 - $\Leftrightarrow \exists i. \hat{\delta}(q_0, w') = q_i \wedge \delta(q_i, a) = q_j$
 - $\Leftrightarrow \exists i. r_b(w') \bmod 3 = i \wedge j = 2i + a \bmod 3$
 - $\Leftrightarrow r_b(w) \bmod 3 = 2r_b(w') + a \bmod 3 = 2(r_b(w') \bmod 3) + a \bmod 3 = j$ ✓
- **Damit gilt $S_j(w)$ für alle $w \in \Sigma^*$ und $j \in \{0, 1, 2\}$ und es folgt**

$$L(A) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) = q_0\} = \{w \mid r_b(w) \bmod 3 = 0\}$$

- **Konfiguration:** ‘Gesamtzustand’ von Automaten
 - Mehr als $q \in Q$: auch die noch unverarbeitete Eingabe zählt
 - Formal dargestellt als Tupel $K = (q, w) \in Q \times \Sigma^*$

- **Konfiguration: ‘Gesamtzustand’ von Automaten**
 - Mehr als $q \in Q$: auch die noch unverarbeitete Eingabe zählt
 - Formal dargestellt als Tupel $K = (q, w) \in Q \times \Sigma^*$
- **Konfigurationsübergangsrelation \vdash^***
 - Wechsel zwischen Konfigurationen durch Abarbeitung von Wörtern
 - $(q, aw) \vdash (p, w)$, falls $\delta(q, a) = p$
 - $K_1 \vdash^* K_2$, falls $K_1 = K_2$ oder
es gibt eine Konfiguration K mit $K_1 \vdash K$ und $K \vdash^* K_2$

- **Konfiguration:** ‘Gesamtzustand’ von Automaten
 - Mehr als $q \in Q$: auch die noch unverarbeitete Eingabe zählt
 - Formal dargestellt als Tupel $K = (q, w) \in Q \times \Sigma^*$
- **Konfigurationsübergangsrelation** \vdash^*
 - Wechsel zwischen Konfigurationen durch Abarbeitung von Wörtern
 - $(q, aw) \vdash (p, w)$, falls $\delta(q, a) = p$
 - $K_1 \vdash^* K_2$, falls $K_1 = K_2$ oder
es gibt eine Konfiguration K mit $K_1 \vdash K$ und $K \vdash^* K_2$
- **Akzeptierte Sprache**
 - Menge der Eingaben, für die \vdash^* zu akzeptierendem Zustand führt
$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F. (q_0, w) \vdash^* (p, \epsilon)\}$$

Für DEAs weniger intuitiv, aber leichter zu verallgemeinern

DEA FÜR $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält gerade Anzahl von } 0 \text{ und } 1\}$

Codiere Anzahl der gelesener 0/1 im Zustand

$q_0 \hat{=} (\text{gerade, gerade})$ $q_1 \hat{=} (\text{gerade, ungerade})$

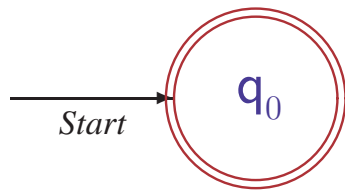
$q_2 \hat{=} (\text{ungerade, gerade})$ $q_3 \hat{=} (\text{ungerade, ungerade})$

DEA FÜR $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält gerade Anzahl von } 0 \text{ und } 1\}$

Codiere Anzahl der gelesener 0/1 im Zustand

$q_0 \hat{=} (\text{gerade, gerade})$ $q_1 \hat{=} (\text{gerade, ungerade})$

$q_2 \hat{=} (\text{ungerade, gerade})$ $q_3 \hat{=} (\text{ungerade, ungerade})$

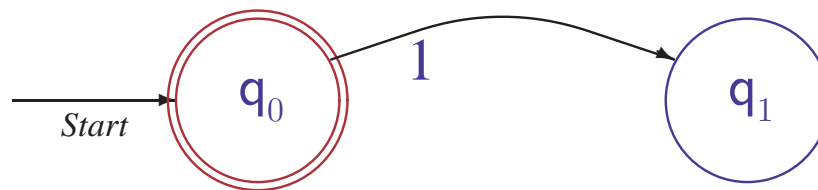


DEA FÜR $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält gerade Anzahl von } 0 \text{ und } 1\}$

Codiere Anzahl der gelesener 0/1 im Zustand

$q_0 \hat{=} (\text{gerade, gerade})$ $q_1 \hat{=} (\text{gerade, ungerade})$

$q_2 \hat{=} (\text{ungerade, gerade})$ $q_3 \hat{=} (\text{ungerade, ungerade})$

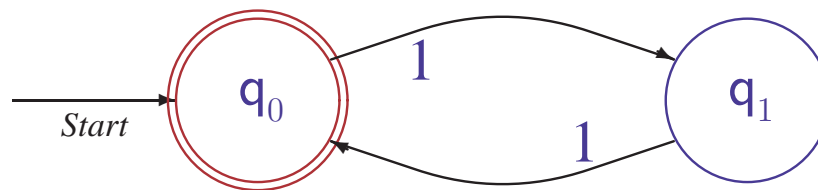


DEA FÜR $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält gerade Anzahl von } 0 \text{ und } 1\}$

Codiere Anzahl der gelesener 0/1 im Zustand

$q_0 \hat{=} (\text{gerade, gerade})$ $q_1 \hat{=} (\text{gerade, ungerade})$

$q_2 \hat{=} (\text{ungerade, gerade})$ $q_3 \hat{=} (\text{ungerade, ungerade})$

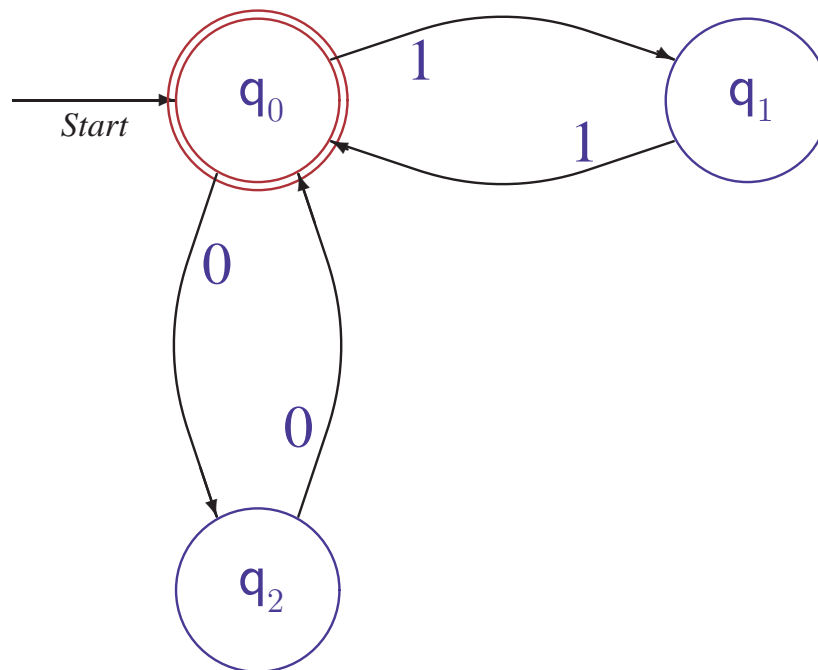


DEA FÜR $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält gerade Anzahl von } 0 \text{ und } 1\}$

Codiere Anzahl der gelesener 0/1 im Zustand

$q_0 \hat{=} (\text{gerade, gerade})$ $q_1 \hat{=} (\text{gerade, ungerade})$

$q_2 \hat{=} (\text{ungerade, gerade})$ $q_3 \hat{=} (\text{ungerade, ungerade})$

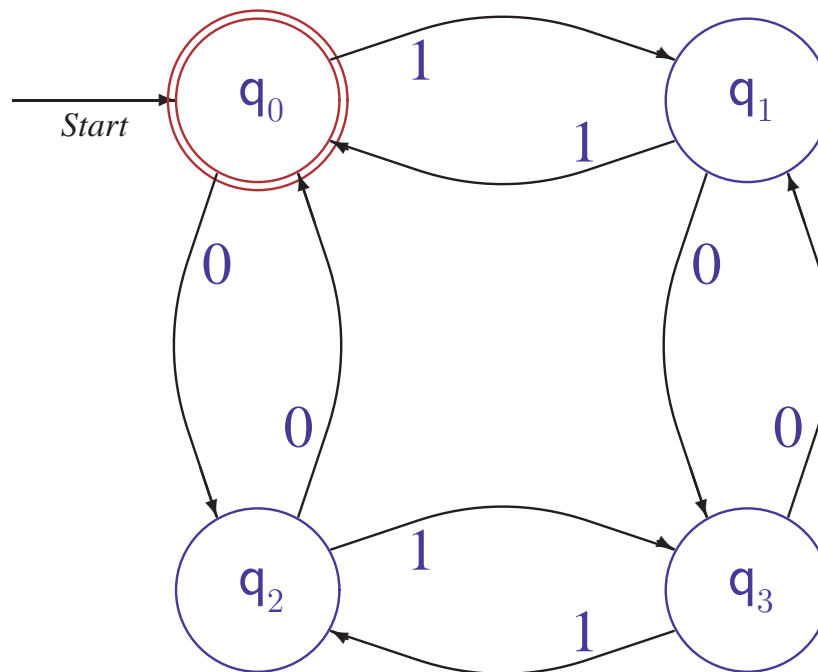


DEA FÜR $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält gerade Anzahl von } 0 \text{ und } 1\}$

Codiere Anzahl der gelesener 0/1 im Zustand

$q_0 \hat{=} (\text{gerade, gerade})$ $q_1 \hat{=} (\text{gerade, ungerade})$

$q_2 \hat{=} (\text{ungerade, gerade})$ $q_3 \hat{=} (\text{ungerade, ungerade})$



Korrektheit: gegenseitige strukturelle Induktion

KORREKTHEITSBEWWEIS MIT KONFIGURATIONEN

- Zeige simultan für alle Wörter $w, v \in \{0, 1\}^*$:

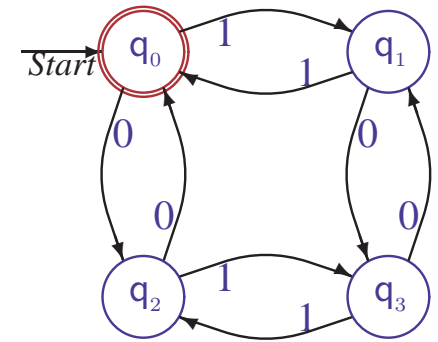
(1) $(q_0, wv) \vdash^* (q_0, v) \Leftrightarrow$ es gilt $g_0(w)$ und $g_1(w)$

(2) $(q_0, wv) \vdash^* (q_1, v) \Leftrightarrow$ es gilt $g_0(w)$ und $u_1(w)$

(3) $(q_0, wv) \vdash^* (q_2, v) \Leftrightarrow$ es gilt $u_0(w)$ und $g_1(w)$

(4) $(q_0, wv) \vdash^* (q_3, v) \Leftrightarrow$ es gilt $u_0(w)$ und $u_1(w)$

$g_0(w) \hat{=} w$ hat gerade Anzahl von Nullen, $u_0(w) \hat{=} w$ hat ungerade Anzahl von Nullen, ...



KORREKTHEITSBEWWEIS MIT KONFIGURATIONEN

- Zeige simultan für alle Wörter $w, v \in \{0, 1\}^*$:

(1) $(q_0, wv) \vdash^* (q_0, v) \Leftrightarrow$ es gilt $g_0(w)$ und $g_1(w)$

(2) $(q_0, wv) \vdash^* (q_1, v) \Leftrightarrow$ es gilt $g_0(w)$ und $u_1(w)$

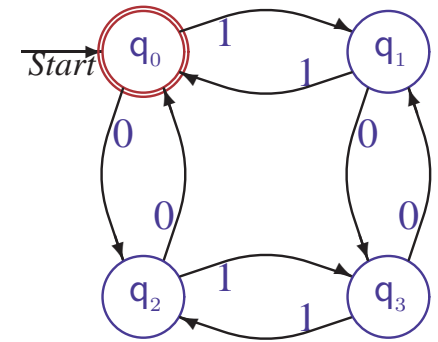
(3) $(q_0, wv) \vdash^* (q_2, v) \Leftrightarrow$ es gilt $u_0(w)$ und $g_1(w)$

(4) $(q_0, wv) \vdash^* (q_3, v) \Leftrightarrow$ es gilt $u_0(w)$ und $u_1(w)$

$g_0(w) \hat{=} w$ hat gerade Anzahl von Nullen, $u_0(w) \hat{=} w$ hat ungerade Anzahl von Nullen, ...

- Basisfall $w = \epsilon$:

– Per Definition gilt $(q_0, v) \vdash^* (q_0, v)$ und $g_0(w)$ und $g_1(w)$



KORREKTHEITSBEWWEIS MIT KONFIGURATIONEN

- **Zeige simultan für alle Wörter $w, v \in \{0, 1\}^*$:**

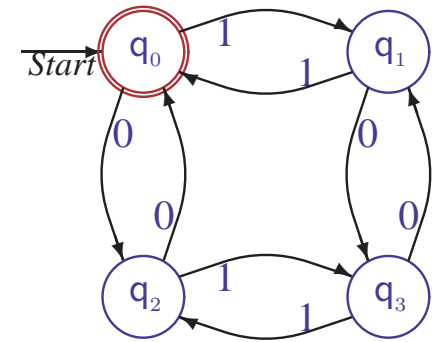
(1) $(q_0, wv) \vdash^* (q_0, v) \Leftrightarrow$ es gilt $g_0(w)$ und $g_1(w)$

(2) $(q_0, wv) \vdash^* (q_1, v) \Leftrightarrow$ es gilt $g_0(w)$ und $u_1(w)$

(3) $(q_0, wv) \vdash^* (q_2, v) \Leftrightarrow$ es gilt $u_0(w)$ und $g_1(w)$

(4) $(q_0, wv) \vdash^* (q_3, v) \Leftrightarrow$ es gilt $u_0(w)$ und $u_1(w)$

$g_0(w) \hat{=}$ w hat gerade Anzahl von Nullen, $u_0(w) \hat{=}$ w hat ungerade Anzahl von Nullen, ...



- **Basisfall $w = \epsilon$:**

– Per Definition gilt $(q_0, v) \vdash^* (q_0, v)$ und $g_0(w)$ und $g_1(w)$ ✓

- **Schrittfall $w = ua$ für ein $u \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$:**

(1) Es gelte $(q_0, wv) \vdash^* (q_0, v)$.

Dann gilt $(q_0, uav) \vdash^* (p, av) \vdash (q_0, v)$ für einen Zustand p .

Falls $a = 0$, dann ist $p = q_2$ und nach (3) folgt $u_0(u)$ und $g_1(u)$.

Falls $a = 1$, dann ist $p = q_1$ und nach (2) folgt $g_0(u)$ und $u_1(u)$.

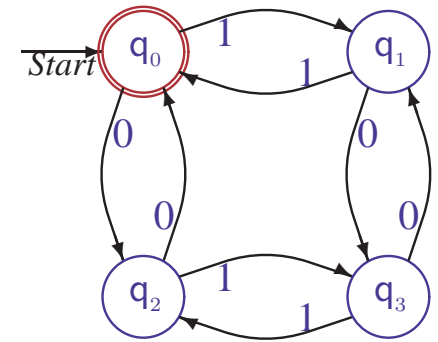
Für $w = ua$ folgt somit $g_0(w)$ und $g_1(w)$. ✓

Gegenrichtung durch Umkehrung des Arguments. (2), (3), (4) analog.

KORREKTHEITSBEWWEIS MIT KONFIGURATIONEN

- Zeige simultan für alle Wörter $w, v \in \{0, 1\}^*$:

- (1) $(q_0, wv) \vdash^* (q_0, v) \Leftrightarrow$ es gilt $g_0(w)$ und $g_1(w)$
- (2) $(q_0, wv) \vdash^* (q_1, v) \Leftrightarrow$ es gilt $g_0(w)$ und $u_1(w)$
- (3) $(q_0, wv) \vdash^* (q_2, v) \Leftrightarrow$ es gilt $u_0(w)$ und $g_1(w)$
- (4) $(q_0, wv) \vdash^* (q_3, v) \Leftrightarrow$ es gilt $u_0(w)$ und $u_1(w)$



$g_0(w) \hat{=}$ w hat gerade Anzahl von Nullen, $u_0(w) \hat{=}$ w hat ungerade Anzahl von Nullen, ...

- **Basisfall** $w = \epsilon$:

– Per Definition gilt $(q_0, v) \vdash^* (q_0, v)$ und $g_0(w)$ und $g_1(w)$ ✓

- **Schrittfall** $w = ua$ für ein $u \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$:

(1) Es gelte $(q_0, wv) \vdash^* (q_0, v)$.

Dann gilt $(q_0, uav) \vdash^* (p, av) \vdash (q_0, v)$ für einen Zustand p .

Falls $a = 0$, dann ist $p = q_2$ und nach (3) folgt $u_0(u)$ und $g_1(u)$.

Falls $a = 1$, dann ist $p = q_1$ und nach (2) folgt $g_0(u)$ und $u_1(u)$.

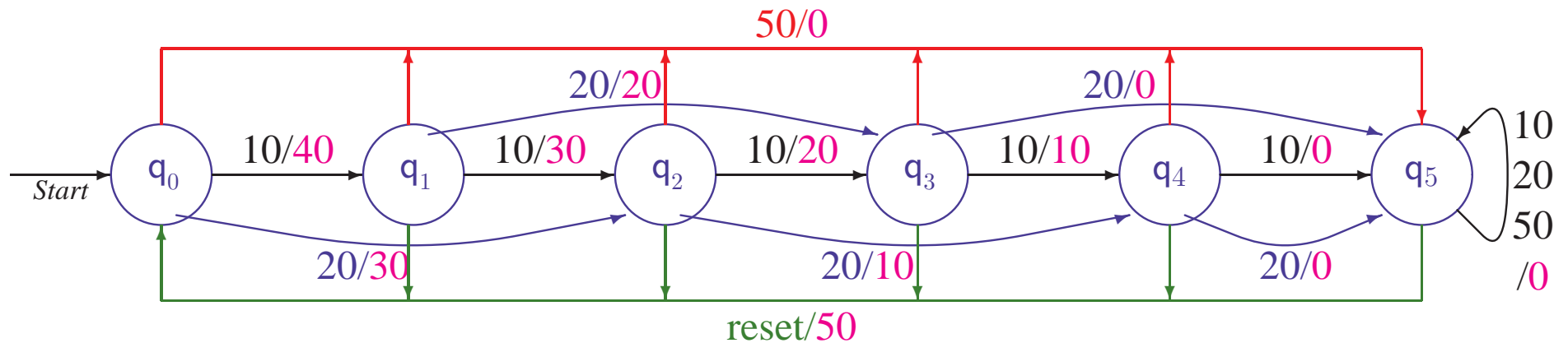
Für $w = ua$ folgt somit $g_0(w)$ und $g_1(w)$. ✓

Gegenrichtung durch Umkehrung des Arguments. (2), (3), (4) analog.

- Es folgt $w \in L(A) \Leftrightarrow (q_0, w) \vdash^* (q_0, \epsilon) \Leftrightarrow g_0(w) \wedge g_1(w) \Leftrightarrow w \in L$

ENDLICHE AUTOMATEN MIT AUSGABEFUNKTION

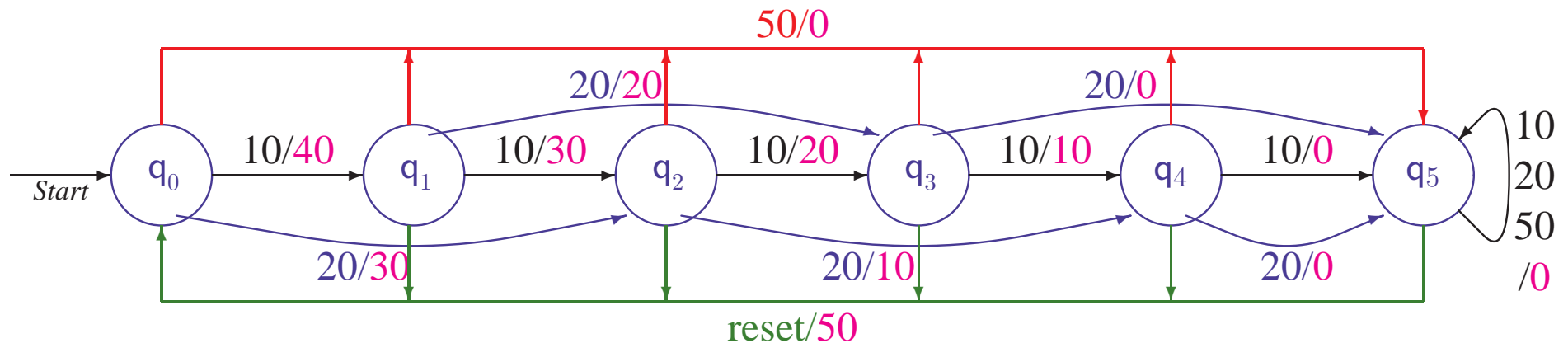
• 50c Kaffeeautomat mit Restbetragsanzeige



– Münzeinwurf führt zu Zustandsänderung und erzeugt Ausgabe

ENDLICHE AUTOMATEN MIT AUSGABEFUNKTION

• 50c Kaffeeautomat mit Restbetragsanzeige



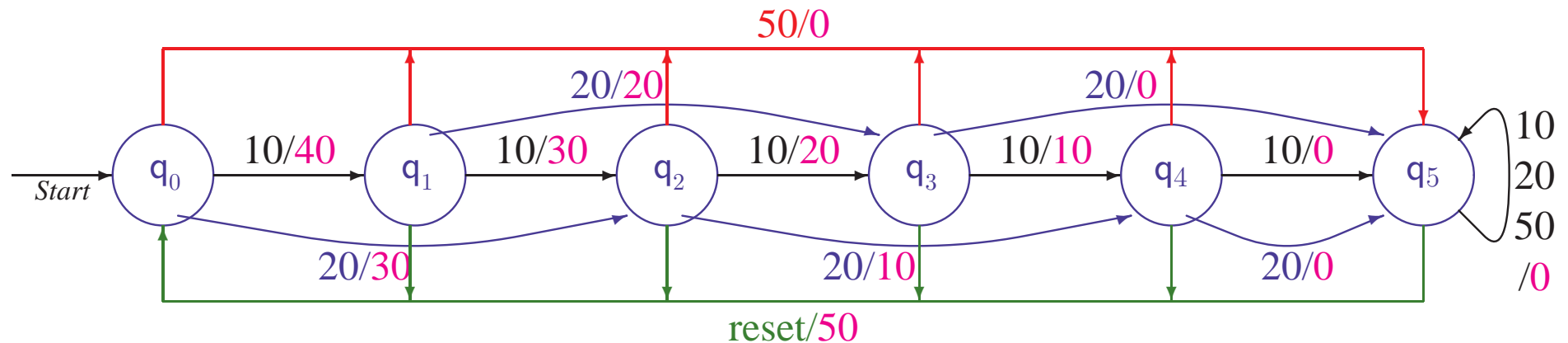
– Münzeinwurf führt zu Zustandsänderung und erzeugt Ausgabe

• Formalisierungen von Automaten mit Ausgabe

- **Mealy-Automaten:** Ausgabefunktion abhängig von Eingabe & Zustand
- **Moore-Automaten:** Ausgabefunktion nur von Zustand abhängig

ENDLICHE AUTOMATEN MIT AUSGABEFUNKTION

• 50c Kaffeeautomat mit Restbetragsanzeige



– Münzeinwurf führt zu Zustandsänderung und erzeugt Ausgabe

• Formalisierungen von Automaten mit Ausgabe

– **Mealy-Automaten**: Ausgabefunktion abhängig von Eingabe & Zustand

– **Moore-Automaten**: Ausgabefunktion nur von Zustand abhängig

• Automaten mit Ausgabe sind keine echte Erweiterung

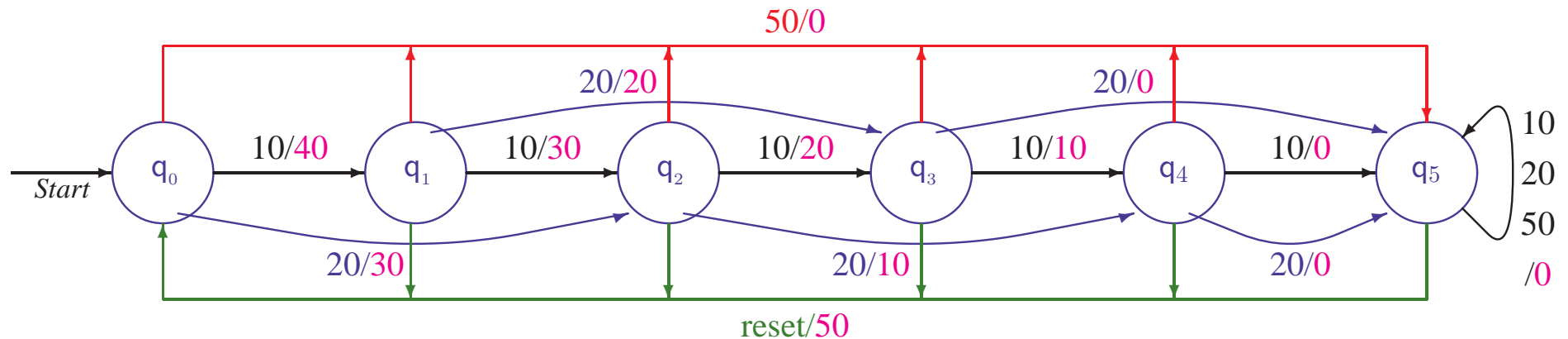
– Mealy- und Moore-Automaten sind äquivalent

– DEAs können Mealy-/Moore-Automaten simulieren und umgekehrt

Mehr dazu im Anhang

ANHANG

MEALY-AUTOMATEN – MATHEMATISCH PRÄZISIERT



Ein **Mealy-Automat** ist ein 6-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ (endliches) **Eingabealphabet**
- Δ (endliches) **Ausgabealphabet**
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ **Zustandsüberföhrungsfunktion**
- $\lambda: Q \times \Sigma \rightarrow \Delta$ **Ausgabefunktion**
- $q_0 \in Q$ **Startzustand**

- **Anfangssituation:** Automat im Startzustand q_0
- **Arbeitschritt**
 - Im Zustand q lese Eingangssymbol a ,
 - Bestimme $\delta(q,a)=p$ und wechsele in neuen Zustand p
 - Bestimme $x = \lambda(q,a)$ und gebe dieses Symbol aus
- **Terminierung:** Eingabewort $w = a_1..a_n$ ist komplett gelesen
- **Ausgabewort:** Verkettung der ausgegebenen Symbole $x_1..x_n$

-
- **Erweiterte Ausgabefunktion** $\hat{\lambda} : Q \times \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$
 - Schrittweise Erzeugung der Ausgabe mit Abarbeitung der Eingabe
 - Formal: Induktive Definition

$$\hat{\lambda}(q, w) = \begin{cases} \epsilon & \text{falls } w=\epsilon, \\ \hat{\lambda}(q, v) \circ \lambda(\hat{\delta}(q, v), a) & \text{falls } w=va \text{ für ein } a \in \Sigma \end{cases}$$

- **Von M berechnete Funktion:** $f_M(w) = \hat{\lambda}(q_0, w)$

MEALY-AUTOMAT FÜR (INVERSE) BINÄRADDITION

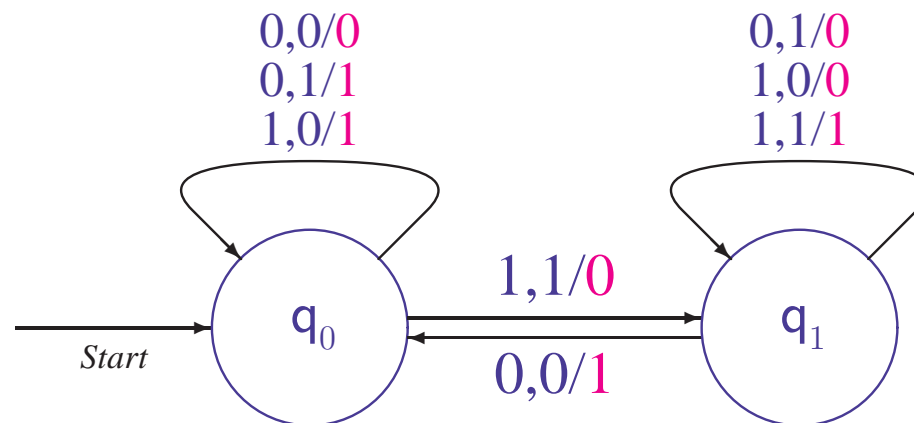
- **Addition von Bitpaaren von rechts nach links**
 - Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$
 - Ausgabealphabet $\Delta = \{0, 1\}$

MEALY-AUTOMAT FÜR (INVERSE) BINÄRADDITION

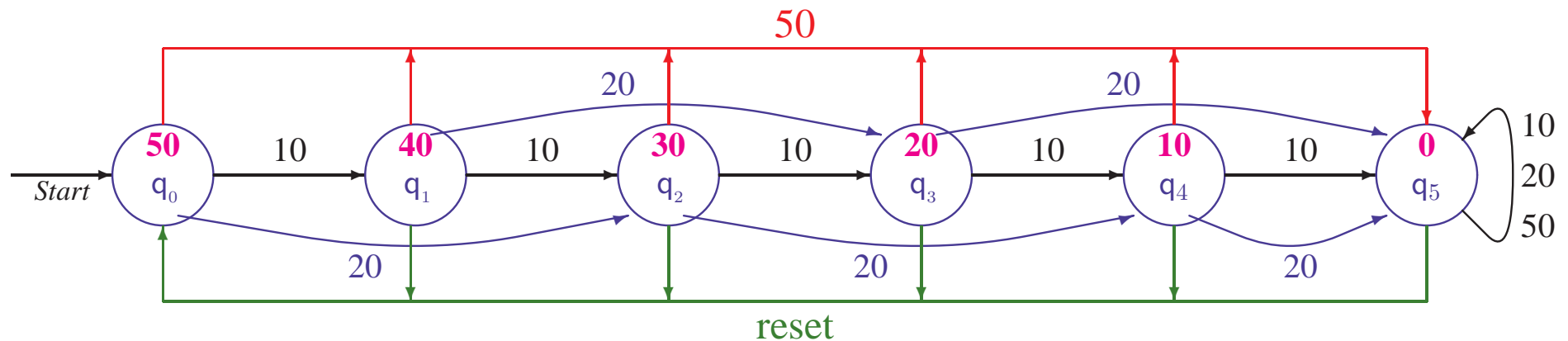
- **Addition von Bitpaaren von rechts nach links**
 - Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$
 - Ausgabealphabet $\Delta = \{0, 1\}$
- **Zwei Zustände sind erforderlich**
 - Zustand q_0 : A kann Addition zweier Bits direkt ausführen
 - Zustand q_1 : A hat bei Addition einen Übertrag zu berücksichtigen

MEALY-AUTOMAT FÜR (INVERSE) BINÄRADDITION

- **Addition von Bitpaaren von rechts nach links**
 - Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$
 - Ausgabealphabet $\Delta = \{0, 1\}$
- **Zwei Zustände sind erforderlich**
 - Zustand q_0 : A kann Addition zweier Bits direkt ausführen
 - Zustand q_1 : A hat bei Addition einen Übertrag zu berücksichtigen
- **Zugehöriger Mealy-Automat**



MOORE-AUTOMATEN – MATHEMATISCH PRÄZISIERT



Ein **Moore-Automat** ist ein 6-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ (endliches) **Eingabealphabet**
- Δ (endliches) **Ausgabealphabet**
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ **Zustandsübergangsfunktion**
- $\lambda: Q \rightarrow \Delta$ **Ausgabefunktion**
- $q_0 \in Q$ **Startzustand**

- **Anfangssituation:** Automat im Startzustand q_0 , Ausgabe $x_0 = \lambda(q_0)$
 - **Arbeitschritt**
 - Im Zustand q lese Eingabesymbol a ,
 - Bestimme $\delta(q,a)=p$ und wechsele in neuen Zustand p
 - Bestimme $x = \lambda(p)$ und gebe dieses Symbol aus
 - **Terminierung:** Eingabewort $w = a_1..a_n$ ist komplett gelesen
 - **Ausgabewort:** Verkettung der ausgegebenen Symbole $x_0x_1..x_n$
-

- **Anfangssituation:** Automat im Startzustand q_0 , Ausgabe $x_0 = \lambda(q_0)$
- **Arbeitsschritt**
 - Im Zustand q lese Eingabesymbol a ,
 - Bestimme $\delta(q,a)=p$ und wechsele in neuen Zustand p
 - Bestimme $x = \lambda(p)$ und gebe dieses Symbol aus
- **Terminierung:** Eingabewort $w = a_1..a_n$ ist komplett gelesen
- **Ausgabewort:** Verkettung der ausgegebenen Symbole $x_0x_1..x_n$

-
- **Erweiterte Ausgabefunktion $\hat{\lambda} : Q \times \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$**
 - Schrittweise Erzeugung der Ausgabe mit Abarbeitung der Eingabe
 - Formal: Induktive Definition

$$\hat{\lambda}(q, w) = \begin{cases} \lambda(q) & \text{falls } w=\epsilon, \\ \hat{\lambda}(q, v) \circ \lambda(\delta(q, v a)) & \text{falls } w=va \text{ für ein } a \in \Sigma \end{cases}$$

- **Von M berechnete Funktion: $f_M(w) = \hat{\lambda}(q_0, w)$**

MOORE-AUTOMAT FÜR DIVISIONSREST

- **Eingabe einer Bitfolge von links nach rechts**
 - Bisher eingegebene Bitfolge ist Binärdarstellung einer Zahl n
 - Ausgabe ist jeweils “ $n \bmod 3$ ”
 - Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, Ausgabealphabet $\Delta = \{0, 1, 2\}$

MOORE-AUTOMAT FÜR DIVISIONSREST

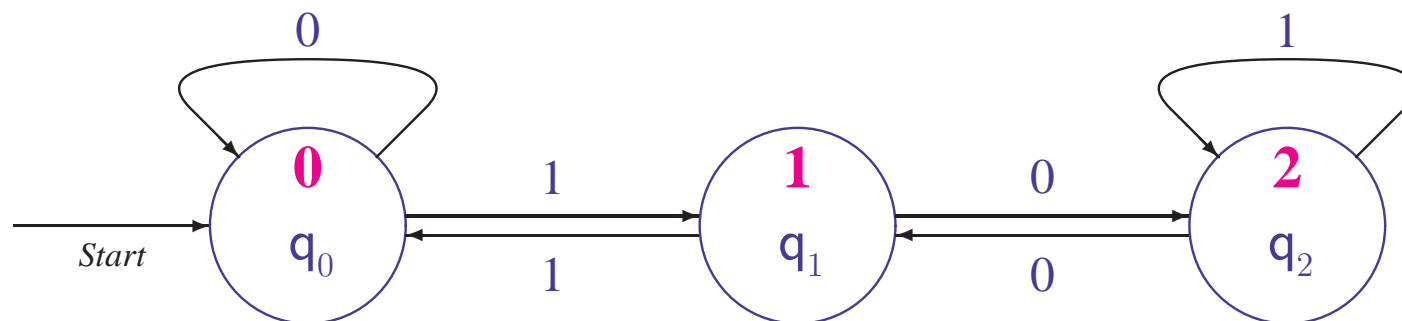
- **Eingabe einer Bitfolge von links nach rechts**
 - Bisher eingegebene Bitfolge ist Binärdarstellung einer Zahl n
 - Ausgabe ist jeweils “ $n \bmod 3$ ”
 - Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, Ausgabealphabet $\Delta = \{0, 1, 2\}$
- **Drei Zustände sind erforderlich**
 - Zustand q_0 : Bisheriger Divisionsrest ist 0 (Ausgabe 0)
 - Zustand q_1 : Bisheriger Divisionsrest ist 1 (Ausgabe 1)
 - Zustand q_2 : Bisheriger Divisionsrest ist 2 (Ausgabe 2)

MOORE-AUTOMAT FÜR DIVISIONSREST

- **Eingabe einer Bitfolge von links nach rechts**
 - Bisher eingegebene Bitfolge ist Binärdarstellung einer Zahl n
 - Ausgabe ist jeweils “ $n \bmod 3$ ”
 - Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, Ausgabealphabet $\Delta = \{0, 1, 2\}$
- **Drei Zustände sind erforderlich**
 - Zustand q_0 : Bisheriger Divisionsrest ist 0 (Ausgabe 0)
 - Zustand q_1 : Bisheriger Divisionsrest ist 1 (Ausgabe 1)
 - Zustand q_2 : Bisheriger Divisionsrest ist 2 (Ausgabe 2)
 - Zustandsübergangsregel $\delta(q_i, j) = q_{2*i+j \bmod 3}$

MOORE-AUTOMAT FÜR DIVISIONSREST

- **Eingabe einer Bitfolge von links nach rechts**
 - Bisher eingegebene Bitfolge ist Binärdarstellung einer Zahl n
 - Ausgabe ist jeweils “ $n \bmod 3$ ”
 - Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, Ausgabealphabet $\Delta = \{0, 1, 2\}$
- **Drei Zustände sind erforderlich**
 - Zustand q_0 : Bisheriger Divisionsrest ist 0 (Ausgabe 0)
 - Zustand q_1 : Bisheriger Divisionsrest ist 1 (Ausgabe 1)
 - Zustand q_2 : Bisheriger Divisionsrest ist 2 (Ausgabe 2)
 - Zustandsüberführungsregel $\delta(q_i, j) = q_{2*i+j \bmod 3}$
- **Zugehöriger Moore-Automat**



MOORE-AUTOMATEN SIND ÄQUIVALENT ZU DEAs

Gegenseitige Simulation ist möglich

- **Jede Sprache L ist als Funktion beschreibbar**

- $\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ **charakteristische Funktion** von L

- Charakteristische Funktionen akzeptierter Sprachen sind berechenbar

Satz: L **regulär** $\Leftrightarrow \chi_L$ **“Moore-berechenbar”**

- **Jede Funktion f ist als Menge beschreibbar**

- **graph**(f) = $\{(w, v) \mid f(w) = v\}$

- **graph**^{*}(f) = $\{(w_1, v_0, v_1) \dots (w_n, v_n) \mid f(w_1 \dots w_n) = v_0 \dots v_n\}$

- DEAs können Graphen berechneter Funktionen akzeptieren

Satz: f **Moore-berechenbar** \Leftrightarrow **graph**^{*}(f) **reguläre Sprache**

BEWEIS DER ÄQUIVALENZ (SKIZZE)

- **L regulär $\Leftrightarrow \chi_L$ “Moore-berechenbar”**

- Zu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ konstruiere $M = (Q, \Sigma, \{0,1\}, \delta, \lambda, q_0)$

mit $\lambda(q) = \begin{cases} 1 & \text{falls } q \in F, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- Dann ist $w \in L(A)$ genau dann, wenn $f_M(w) = v1$ für ein $v \in \{0, 1\}^*$

$\chi_L(w)$ ist das letzte Ausgabesymbol von $f_M(w)$

BEWEIS DER ÄQUIVALENZ (SKIZZE)

- **L regulär $\Leftrightarrow \chi_L$ “Moore-berechenbar”**

- Zu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ konstruiere $M = (Q, \Sigma, \{0,1\}, \delta, \lambda, q_0)$

- mit $\lambda(q) = \begin{cases} 1 & \text{falls } q \in F, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- Dann ist $w \in L(A)$ genau dann, wenn $f_M(w) = v1$ für ein $v \in \{0, 1\}^*$

- $\chi_L(w)$ ist das letzte Ausgabesymbol von $f_M(w)$

- **f Moore-berechenbar $\Leftrightarrow \text{graph}^*(f)$ regulär**

- Zu $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$ konstruiere $A = (Q \cup \{q_s, q_f\}, \Sigma', \delta', q_s, Q)$

- mit $\Sigma' = \Sigma \times (\Delta \cup \{\lambda(q_0)\}) \times \Delta$

- $\delta'(q, (a, b)) = \begin{cases} \delta(q_0, a) & \text{falls } q=q_s, b = (\lambda(q_0), \lambda(\delta(q_0, a))), \\ \delta(q, a) & \text{falls } \lambda(\delta(q, a)) = b, \\ q_f & \text{sonst} \end{cases}$

- Dann $f_M(w_1..w_n) = v_0..v_n$ genau dann, wenn $(w_1, v_0, v_1)..(w_n, v_n) \in L(A)$

BEWEIS DER ÄQUIVALENZ (SKIZZE)

- **L regulär $\Leftrightarrow \chi_L$ “Moore-berechenbar”**

- Zu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ konstruiere $M = (Q, \Sigma, \{0,1\}, \delta, \lambda, q_0)$

$$\text{mit } \lambda(q) = \begin{cases} 1 & \text{falls } q \in F, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dann ist $w \in L(A)$ genau dann, wenn $f_M(w) = v1$ für ein $v \in \{0, 1\}^*$

$\chi_L(w)$ ist das letzte Ausgabesymbol von $f_M(w)$

- **f Moore-berechenbar $\Leftrightarrow \text{graph}^*(f)$ regulär**

- Zu $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$ konstruiere $A = (Q \cup \{q_s, q_f\}, \Sigma', \delta', q_s, Q)$

mit $\Sigma' = \Sigma \times (\Delta \cup \{\lambda(q_0)\}) \times \Delta$

$$\delta'(q, (a, b)) = \begin{cases} \delta(q_0, a) & \text{falls } q=q_s, b = (\lambda(q_0), \lambda(\delta(q_0, a))), \\ \delta(q, a) & \text{falls } \lambda(\delta(q, a)) = b, \\ q_f & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dann $f_M(w_1..w_n) = v_0..v_n$ genau dann, wenn $(w_1, v_0, v_1)..(w_n, v_n) \in L(A)$

Mehr zu Automaten mit Ausgabe im Buch von Vossen & Witt