Theoretische Informatik I

Einheit 4

Allgemeine und kontextsensitive Sprachen

1. Turingmaschinen
2. Maschinenmodelle für $\mathcal{L}_0$ und $\mathcal{L}_1$
3. Eigenschaften von $\mathcal{L}_0/\mathcal{L}_1$-Sprachen

Jenseits von Kontextfreiheit

- **Viele wichtige Konzepte sind nicht kontextfrei**
  - Sind Bezeichner im Programmkörper deklariert?
  - $\{ ww \mid w \in \{0,1\}^* \}$: erscheint Programmcode doppelt?
  - $\{0^n 1^n 2^n | n \in \mathbb{N}\}$: kommen mehrere Bestandteile gleich oft vor?
  - Zählen jenseits von Addition und Multiplikation
- **Wie verarbeitet man Typ-1 / Typ-0 Sprachen?**
  - Welches Maschinenmodell ist zur Beschreibung geeignet?
  - Wie analysiert man Wörter der Sprache
  - Wie kann man Sprachen aus Bausteinen zusammensetzen?
  - Welche Spracheigenschaften kann man testen?

Theoretische Informatik I

Einheit 4.1

Turingmaschinen

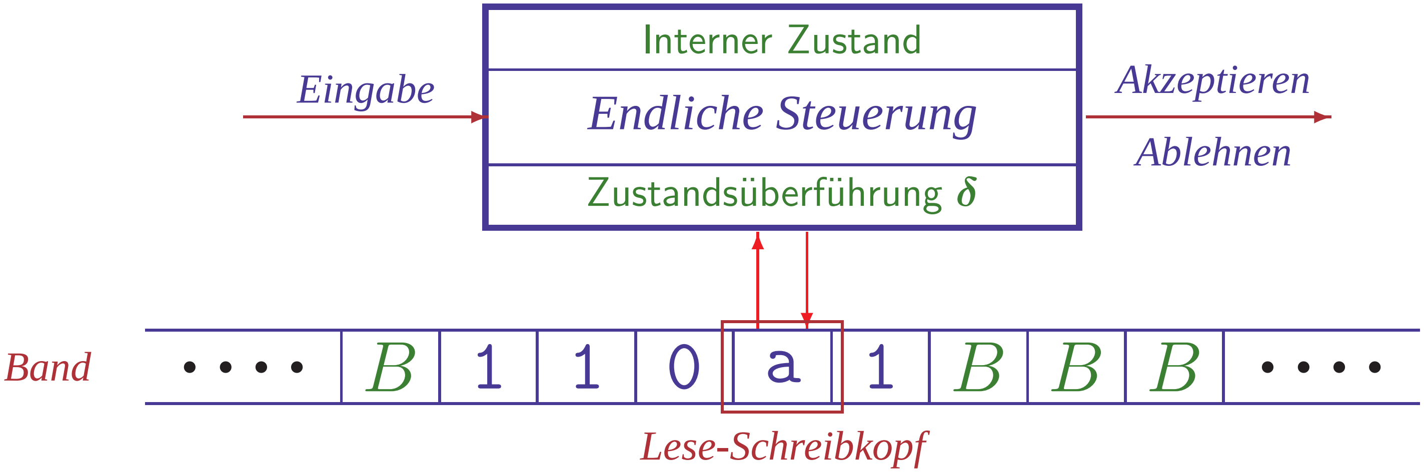
1. Das Maschinenmodell
2. Arbeitsweise & erkannte Sprache
3. Programmiertechniken
4. Ausdruckskraft

Maschinenmodell für Typ-0 Sprachen

- **Erweiterung des Konzepts endlicher Automaten**
  - Verarbeitung interner Zustände abhängig von gelesenen Daten
  - Lese- und Schreibzugriff auf externen Speicher
  - Minimal mögliche Erweiterung
- **Maximal mögliche Ausdruckskraft**
  - Speicher muß Fähigkeiten von Typ-0 Grammatiken widerspiegeln
    - Keine Einschränkung an Ersetzungsregeln
    - Auch Terminalsymbole und ganze Wörter dürfen ersetzt werden
  - Automat muß Eingabe an jeder Stelle verarbeiten können
    - Gesamte Eingabe muß gespeichert werden
    - Speicher muß Veränderungen an jeder Stelle zulassen
    - Speicher muß beliebig erweiterbar sein

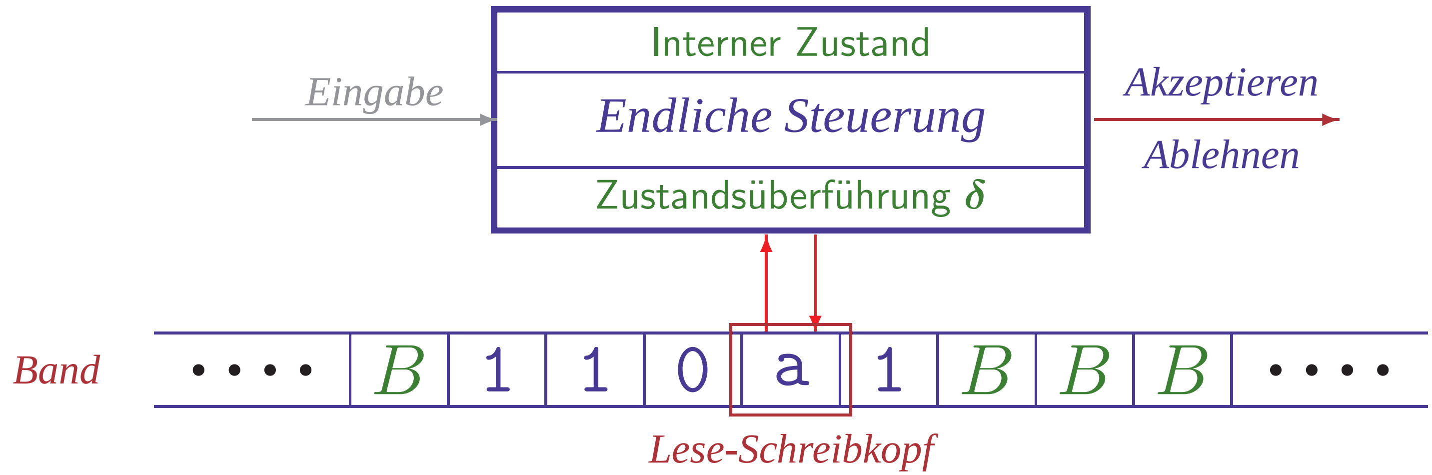
Wähle unendliches, bewegliches Band als Speicher

Turingmaschinen intuitiv



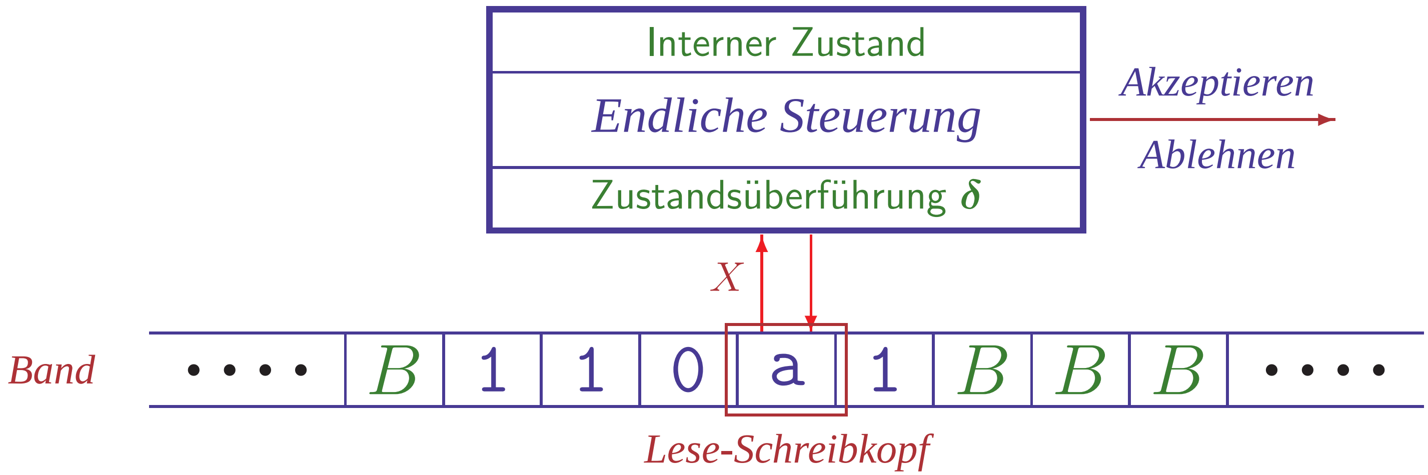
- **Endlicher Automat + lineares Band**
  - Endliche Steuerung liest Eingabesymbole
  - Gleichzeitig wird Bandsymbol unter Lese-Schreibkopf gelesen

Turingmaschinen intuitiv



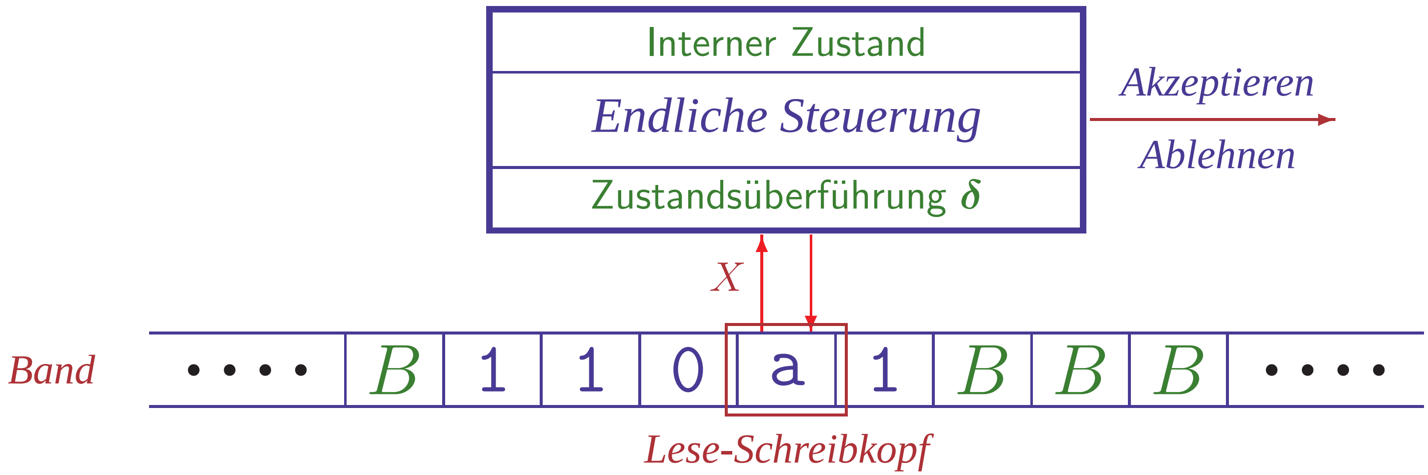
- **Endlicher Automat + lineares Band**
  – Endliche Steuerung liest Eingabesymbole
  – Gleichzeitig wird Bandsymbol unter Lese-Schreibkopf gelesen
- **Vereinfachung: keine separate Eingabe**
  – Eingabewort steht zu Anfang bereits auf dem Band

Turingmaschinen intuitiv



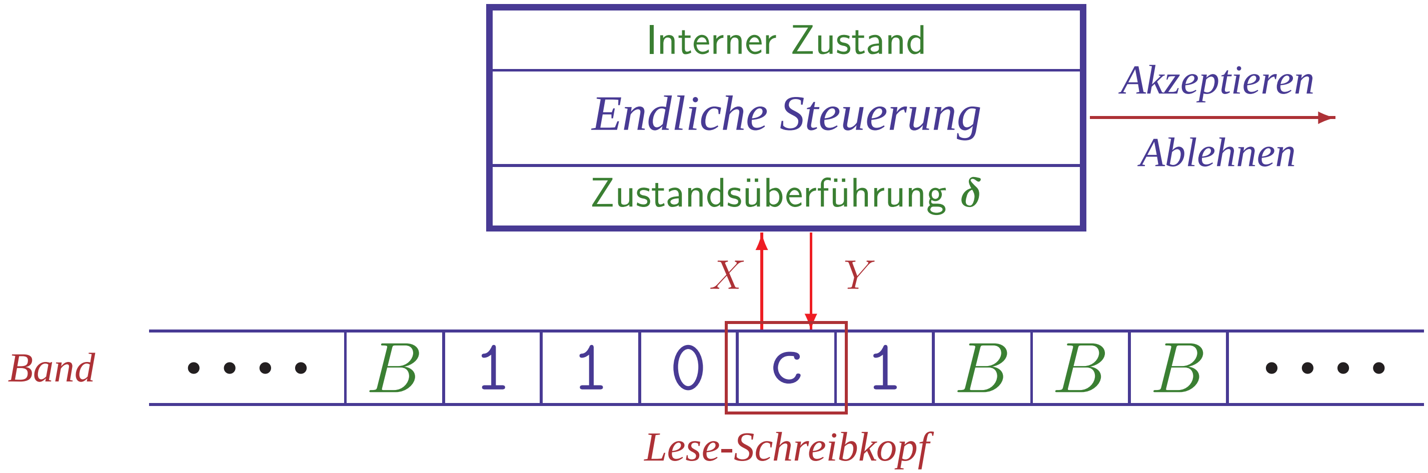
- **Endlicher Automat + lineares Band**
  - Endliche Steuerung liest Eingabesymbole
  - Gleichzeitig wird Bandsymbol unter Lese-Schreibkopf gelesen
- **Vereinfachung: keine separate Eingabe**
  - Eingabewort steht zu Anfang bereits auf dem Band
- **Einfacher Verarbeitungsmechanismus**
  - Bandsymbol X wird gelesen

Turingmaschinen intuitiv



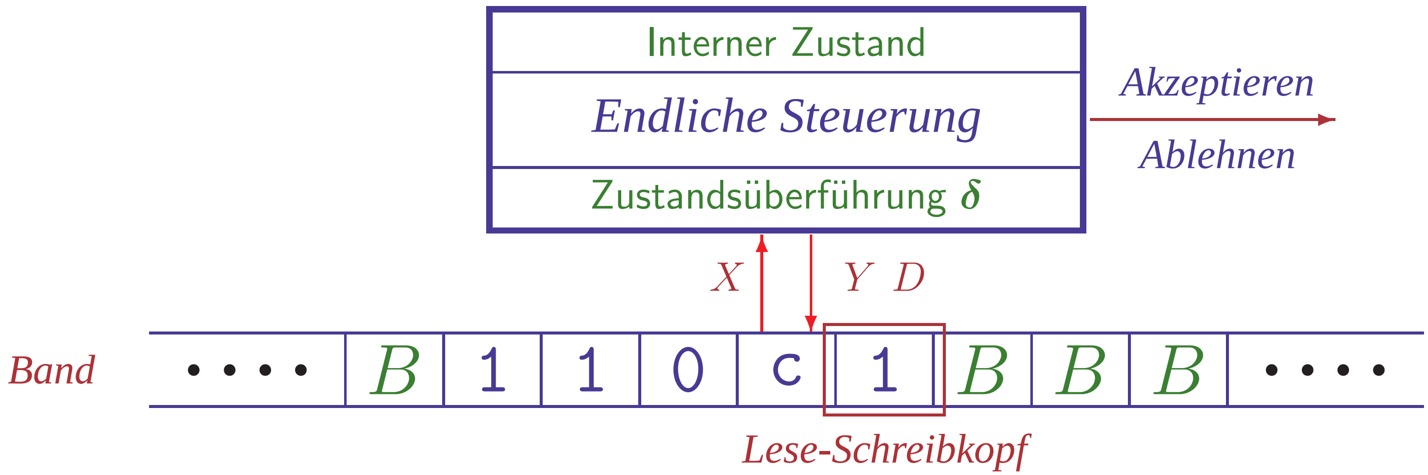
- **Endlicher Automat + lineares Band**
  - Endliche Steuerung liest Eingabesymbole
  - Gleichzeitig wird Bandsymbol unter Lese-Schreibkopf gelesen
- **Vereinfachung: keine separate Eingabe**
  - Eingabewort steht zu Anfang bereits auf dem Band
- **Einfacher Verarbeitungsmechanismus**
  - Bandsymbol X wird gelesen
  - Interner Zustand q wird zu q' verändert

Turingmaschinen intuitiv



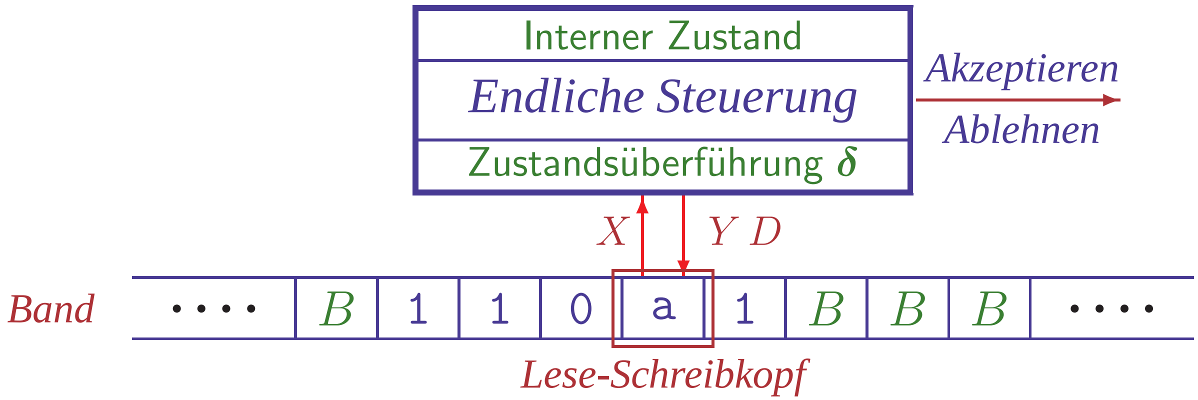
- **Endlicher Automat + lineares Band**
  - Endliche Steuerung liest Eingabesymbole
  - Gleichzeitig wird Bandsymbol unter Lese-Schreibkopf gelesen
- **Vereinfachung: keine separate Eingabe**
  - Eingabewort steht zu Anfang bereits auf dem Band
- **Einfacher Verarbeitungsmechanismus**
  - Bandsymbol X wird gelesen
  - Interner Zustand q wird zu q' verändert
  - Neues Symbol Y wird auf das Band geschrieben

TURINGMASCHINEN INTUITIV



- **Endlicher Automat + lineares Band**
  - Endliche Steuerung liest Eingabesymbole
  - Gleichzeitig wird Bandsymbol unter Lese-Schreibkopf gelesen
- **Vereinfachung: keine separate Eingabe**
  - Eingabewort steht zu Anfang bereits auf dem Band
- **Einfacher Verarbeitungsmechanismus**
  - Bandsymbol X wird gelesen
  - Interner Zustand q wird zu q' verändert
  - Neues Symbol Y wird auf das Band geschrieben
  - Kopf wird in eine Richtung D (rechts oder links) bewegt

Turingmaschinen – mathematisch präzisiert

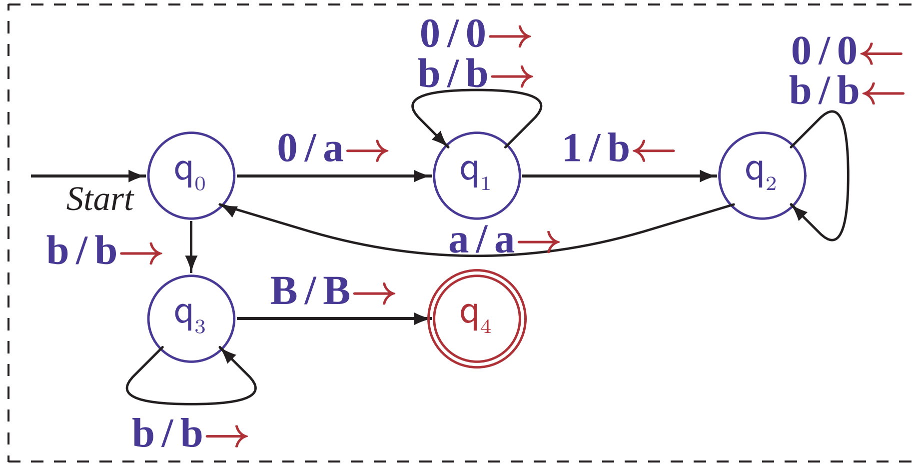


Eine **Turingmaschine (TM)** ist ein 7-Tupel

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ endliches **Eingabealphabet**
- $\Gamma \supseteq \Sigma$ endliches **Bandalphabet**
- $\delta: Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ (partielle) **Überführungsfunktion**
- $q_0 \in Q$ **Startzustand**
- $B \in \Gamma \setminus \Sigma$ **Leersymbol des Bands** ("blank")
- $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden** (End-)**Zuständen**

- **Übergangsdiagramme**
  - Zustände durch Knoten dargestellt
  - q_0 markiert durch *Start*-Pfeil,
    Endzustände durch doppelte Kreise
  - Für $\delta(q, X) = (p, Y, D)$ hat das
    Diagramm eine Kante $q \xrightarrow{X/Y\,D} p$



  - Σ und Γ oft implizit durch Diagramm bestimmt, Leersymbol heißt B

- **Übergangstabellen**
  - Funktionstabelle für δ
  - — heißt "δ nicht definiert"
  - Pfeil $\rightarrow$ kennzeichnet q_0
  - Stern * kennzeichnet F
  - Σ, Γ (und B) oft implizit bestimmt

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
→ q_0	(q_1,a,R)	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
* q_4	—	—	—	—	—

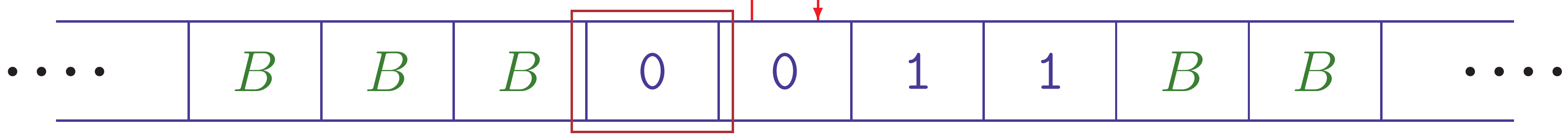
Abarbeitung von Turing-Programmen

q_0

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,a,R)	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* \, q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen



Startzustand q_0

Abarbeitung von Turing-Programmen

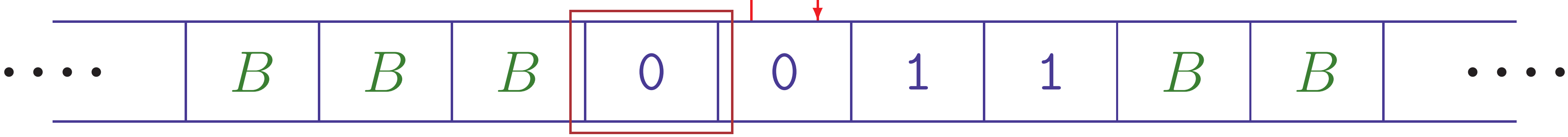
q_0

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,a,R)	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* \; q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen

0



Lesen der Eingabe 0

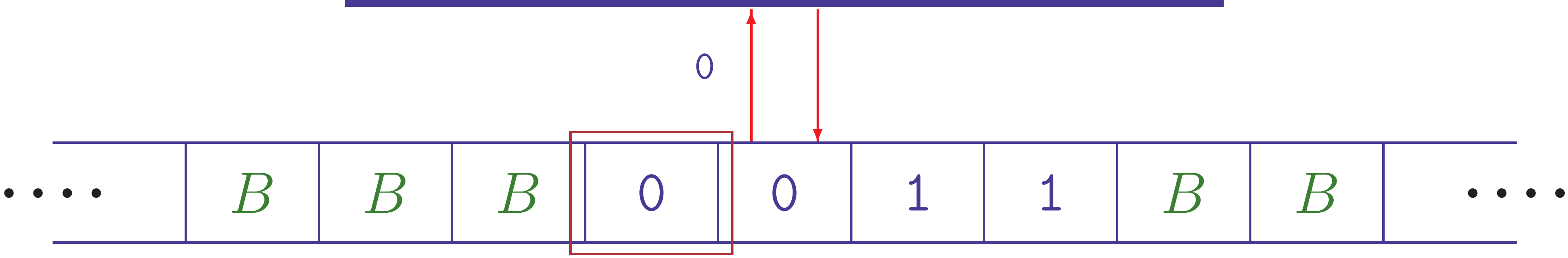
Abarbeitung von Turing-Programmen

q_0

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	$\boxed{(q_1,a,R)}$	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen



Tabelleneintrag für $q_0/0$

Abarbeitung von Turing-Programmen

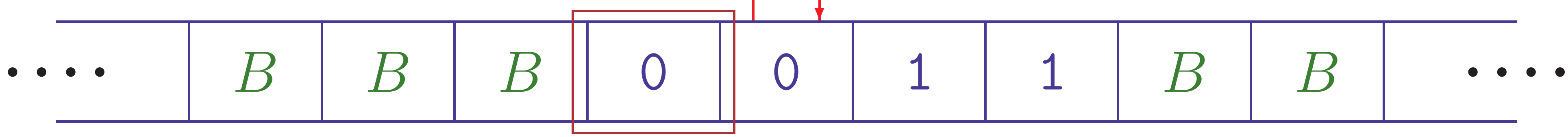
$\boxed{q_1}$

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	$\boxed{(q_1,a,R)}$	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* \; q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen

a $\rightarrow$



Neuer Zustand q_1

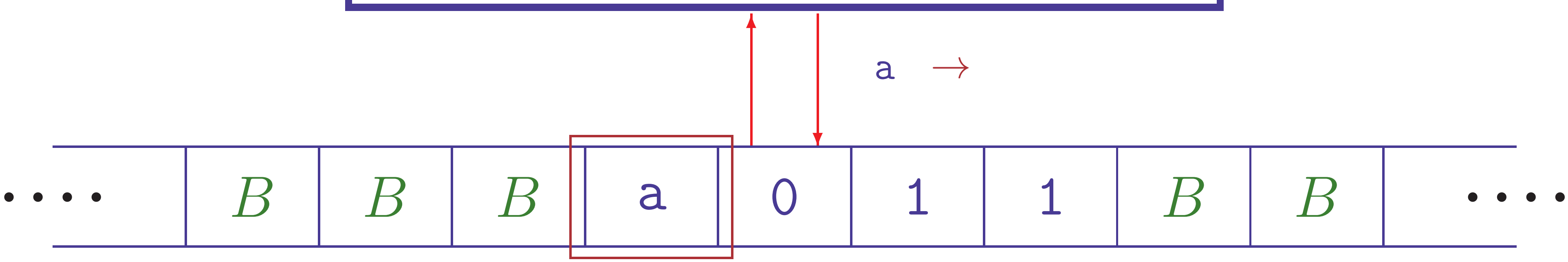
Abarbeitung von Turing-Programmen

$\boxed{q_1}$

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	$\boxed{(q_1,a,R)}$	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* \, q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen



Neuer Wert ist a

Abarbeitung von Turing-Programmen

q_1

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	$\boxed{(q_1,a,R)}$	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen

a $\rightarrow$

• • • •	B	B	B	a	$\boxed{0}$	1	1	B	B	• • • •

Kopf geht nach rechts

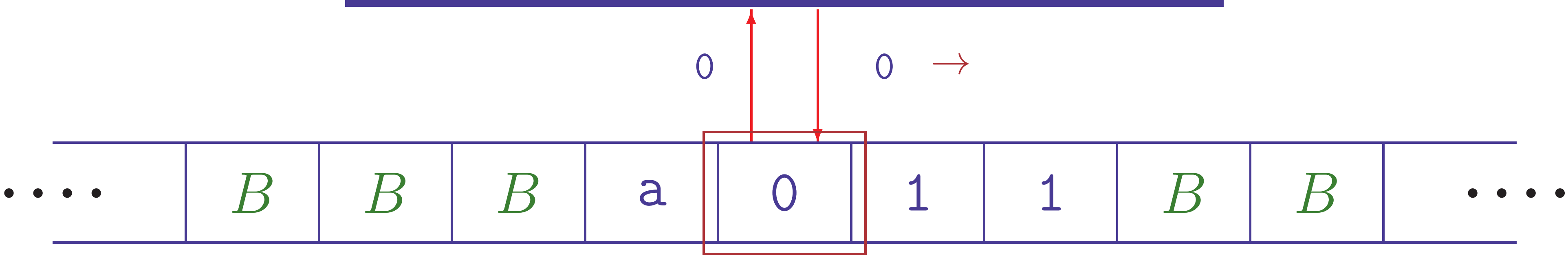
Abarbeitung von Turing-Programmen

q_1

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,a,R)	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$\boxed{(q_1,0,R)}$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen



Lesen der Eingabe 0

Abarbeitung von Turing-Programmen

q_1

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,a,R)	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$\boxed{(q_1,0,R)}$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* \ q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen

....		B	B	B	a	0	$\boxed{1}$	1	B	B	....

neuer Zustand q_1, Wert 0, Kopf nach rechts

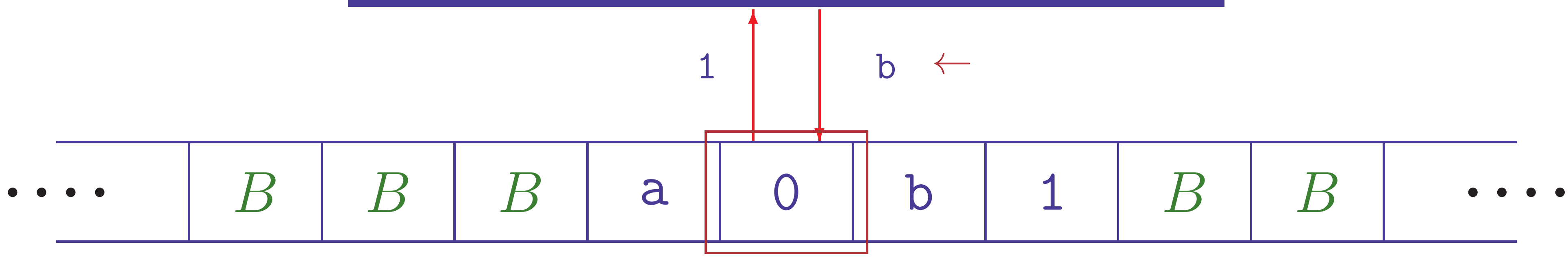
Abarbeitung von Turing-Programmen

q_2

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,a,R)	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	$\boxed{(q_2,b,L)}$	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen



Eingabe 1, neuer Zustand q_2, Wert b, Kopf nach links

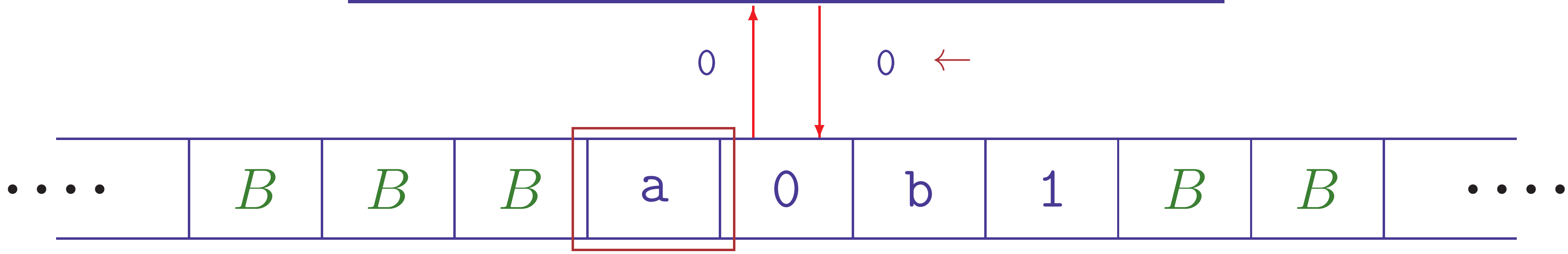
Abarbeitung von Turing-Programmen

q_2

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,a,R)	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$\boxed{(q_2,0,L)}$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* \; q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen



Eingabe 0, neuer Zustand q_2, Wert 0, Kopf nach links

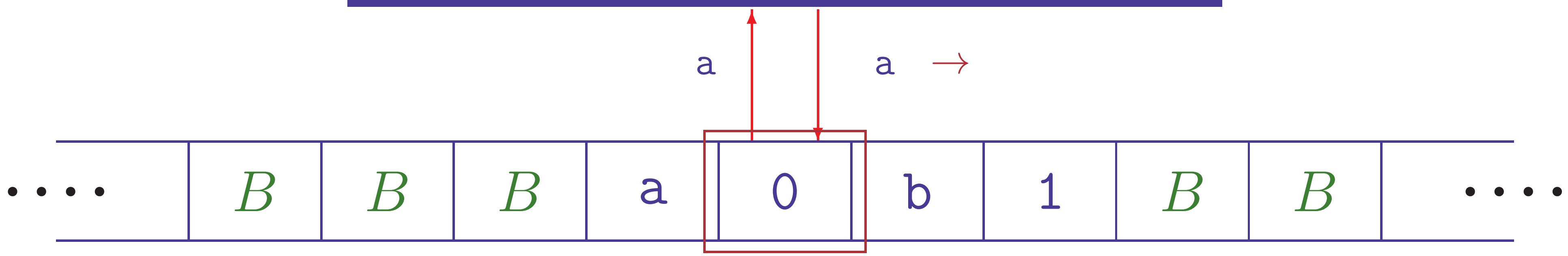
Abarbeitung von Turing-Programmen

q_0

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,a,R)	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	$\boxed{(q_0,a,R)}$	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen



Eingabe a, neuer Zustand q_0, Wert a, Kopf nach rechts

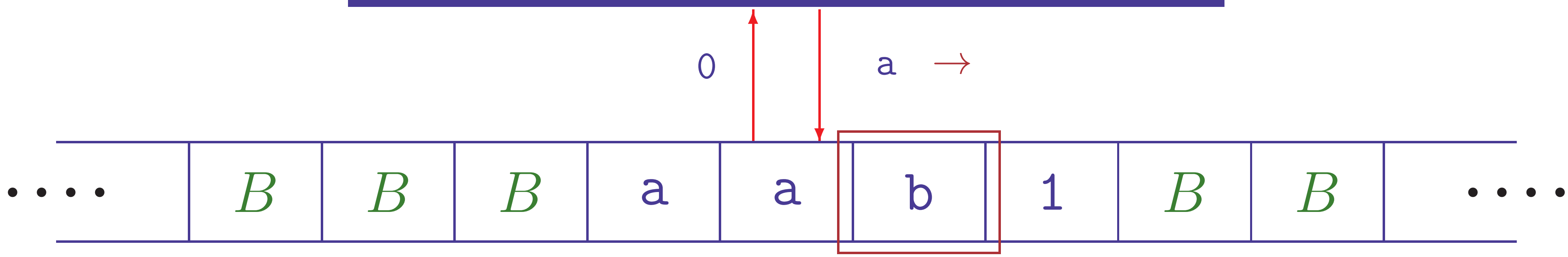
Abarbeitung von Turing-Programmen

$\boxed{q_1}$

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	$\boxed{(q_1,a,R)}$	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen



Eingabe 0, neuer Zustand q_1, Wert a, Kopf nach rechts

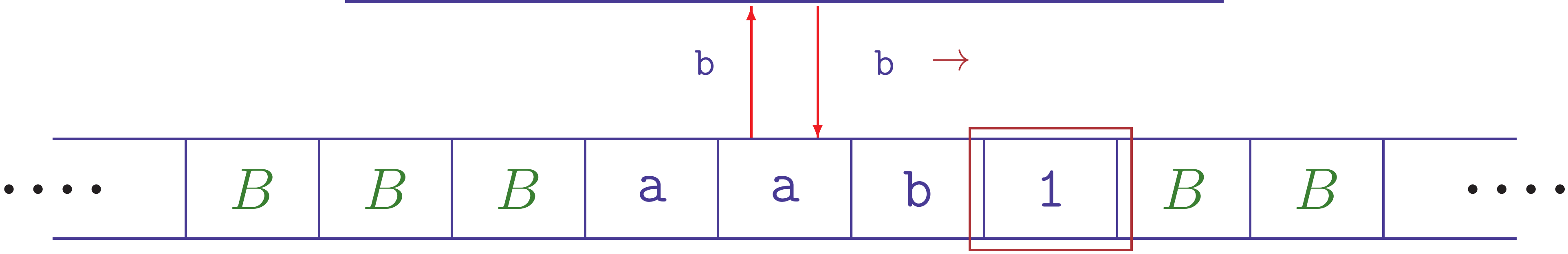
Abarbeitung von Turing-Programmen

q_1

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,a,R)	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	$\boxed{(q_1,b,R)}$	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen



Eingabe b, neuer Zustand q_1, Wert b, Kopf nach rechts

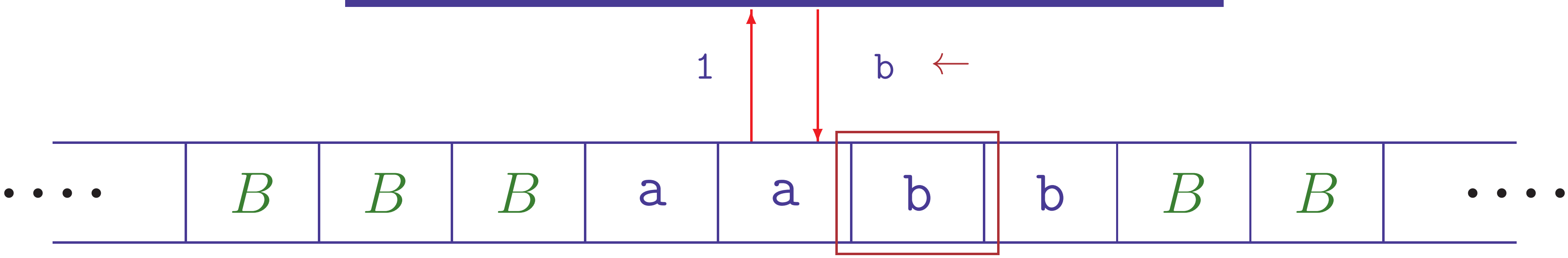
Abarbeitung von Turing-Programmen

q_2

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,a,R)	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	$\boxed{(q_2,b,L)}$	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen



Eingabe 1, neuer Zustand q_2, Wert b, Kopf nach links

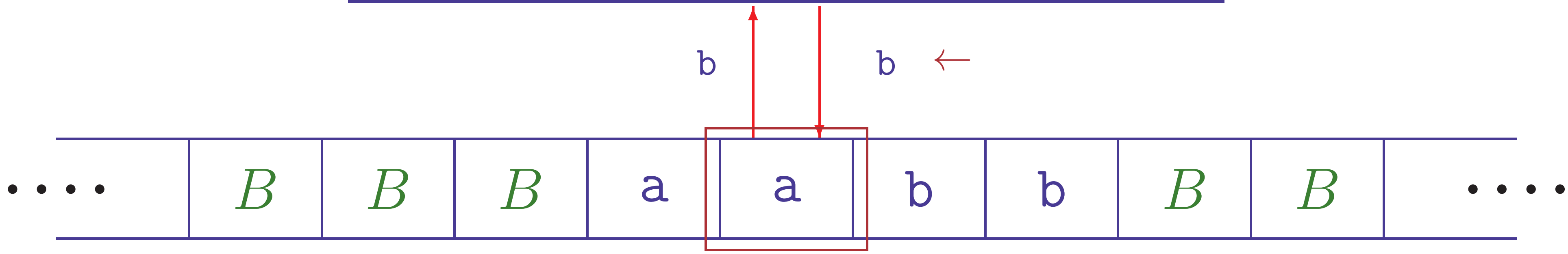
Abarbeitung von Turing-Programmen

q_2

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,a,R)	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	$\boxed{(q_2,b,L)}$	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* \ q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen



Eingabe b, neuer Zustand q_2, Wert b, Kopf nach links

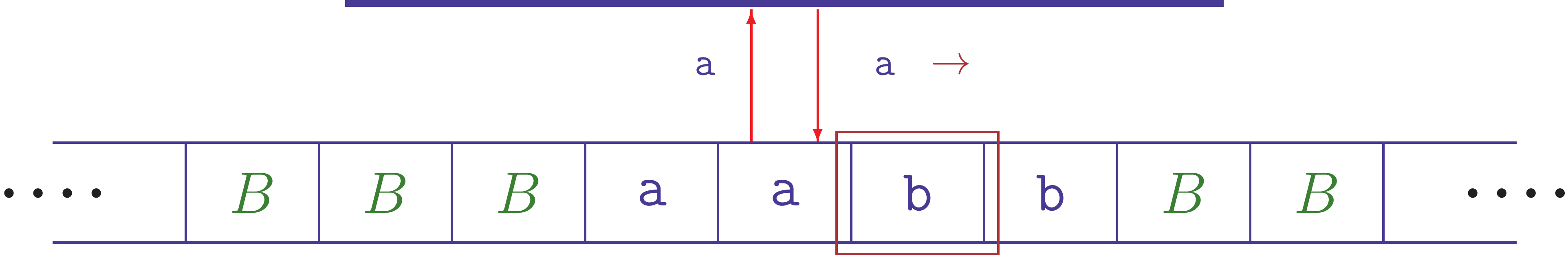
Abarbeitung von Turing-Programmen

$\boxed{q_0}$

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,a,R)	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	$\boxed{(q_0,a,R)}$	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* \; q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen



Eingabe a, neuer Zustand q_0, Wert a, Kopf nach rechts

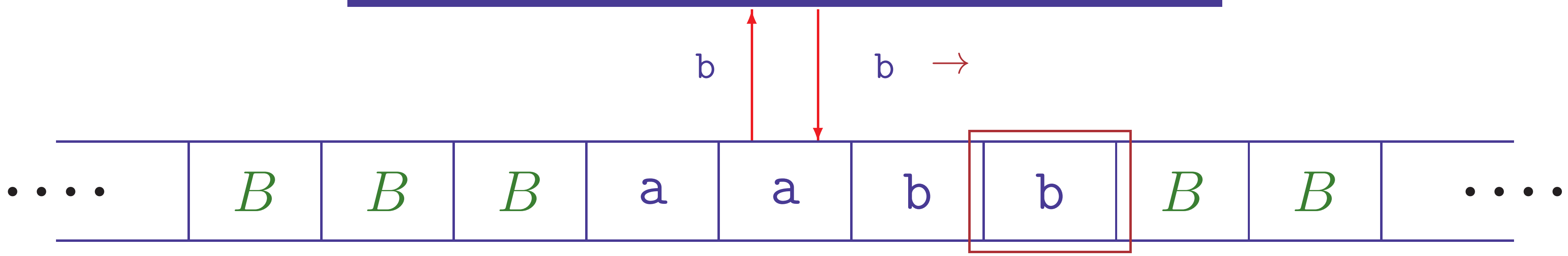
Abarbeitung von Turing-Programmen

$\boxed{q_3}$

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,a,R)	—	—	$\boxed{(q_3,b,R)}$	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* \, q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen



Eingabe b, neuer Zustand q_3, Wert b, Kopf nach rechts

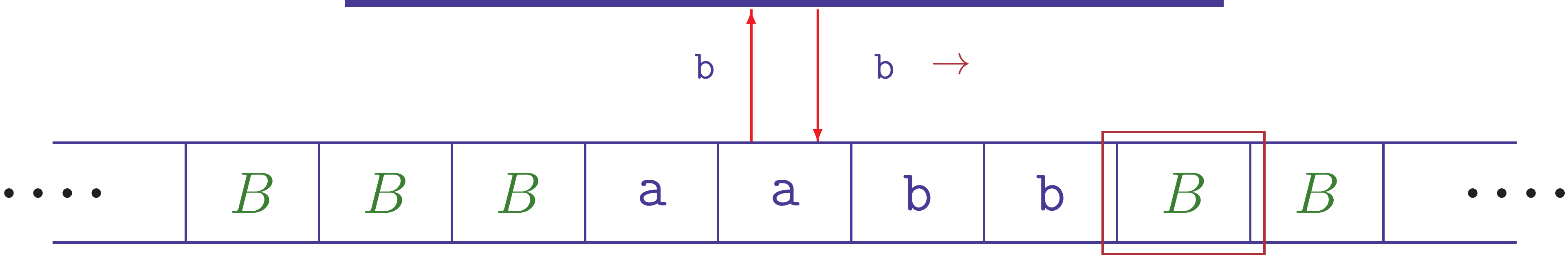
Abarbeitung von Turing-Programmen

q_3

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,a,R)	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	$\boxed{(q_3,b,R)}$	(q_4,B,R)
$* q_4$	—	—	—	—	—

Akzeptieren

Ablehnen



Eingabe b, neuer Zustand q_3, Wert b, Kopf nach rechts

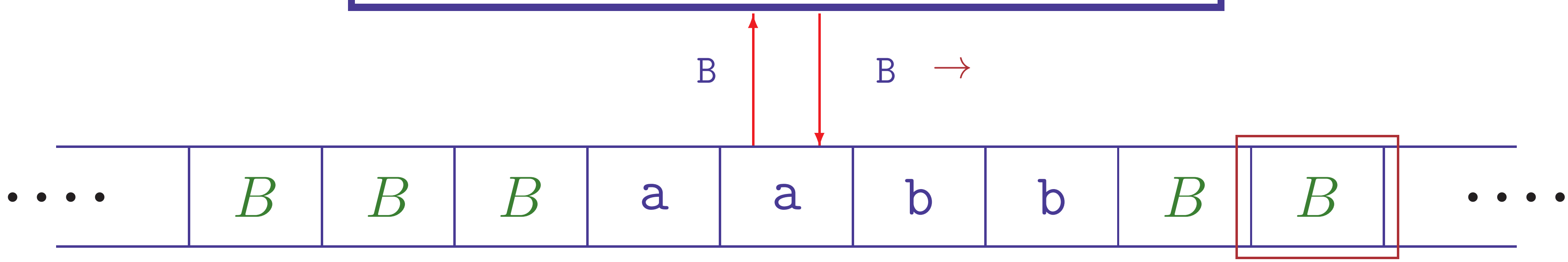
Abarbeitung von Turing-Programmen

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,a,R)	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	$\boxed{(q_4,B,R)}$
$* \; q_4$	—	—	—	—	—

$\boxed{q_4}$

Akzeptieren

Ablehnen



Eingabe B, neuer Zustand q_4, Wert B, Kopf nach rechts

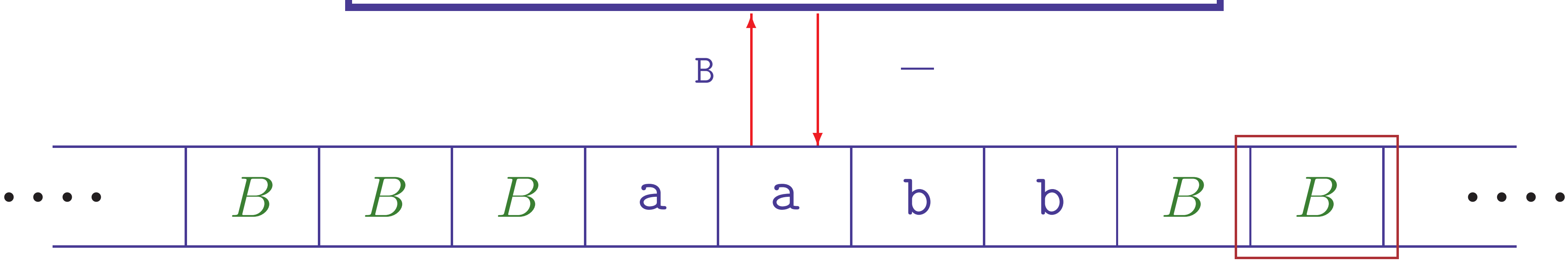
Abarbeitung von Turing-Programmen

$Q \setminus \Gamma$	0	1	a	b	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,a,R)	—	—	(q_3,b,R)	—
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,b,L)	—	(q_1,b,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_0,a,R)	(q_2,b,L)	—
q_3	—	—	—	(q_3,b,R)	(q_4,B,R)
$* q_4$	—	—	—	—	$\boxed{—}$

$\boxed{q_4}$

Akzeptieren

Ablehnen



Maschine hält im Endzustand q_4 an

Arbeitsweise von Turingmaschinen intuitiv

- **Anfangssituation**
  - Eingabewort w steht auf dem Band, umgeben von Leerzeichen
  - Kopf ist über erstem Symbol, Startzustand ist q_0
- **Arbeitsschritt**
  - Im Zustand q lese Bandsymbol X und bestimme $\delta(q,X)=(p,Y,D)$
  - Wechsle in Zustand p, schreibe Y aufs Band, bewege Kopf gemäß D
- **Terminierung, wenn $\delta(q,X)$ nicht definiert**
  - Alternativ: Maschine hält bei Erreichen eines Endzustands
  - **Konvention**: **$\delta(q,X)$ undefiniert für Endzustände $q \in F$**
- **Ergebnis**
  - Eingabewort w wird akzeptiert, wenn Maschine im Endzustand anhält
- **Hilfsmittel zur Präzisierung: Konfigurationen**
  - Verallgemeinere bekanntes Konzept der Konfigurationsübergänge

Details in Literatur sehr unterschiedlich!!

Arbeitsweise von Turingmaschinen präzisiert

- **Erweitere Begriff der Konfiguration**
  - Zustand q, Inhalt des Bandes und Kopfposition
  - Formal dargestellt als Tripel $\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^+$
    - u, v: String links/rechts vom Kopf

    Achtung: im Buch wird das Tripel als ein (!) String $\boldsymbol{uqv}$ geschrieben
  - Nur der bereits 'besuchten' Teil des Bandes wird betrachtet

    Blanks am Anfang von u oder am Ende von v entfallen, wo möglich

Arbeitsweise von Turingmaschinen präzisiert

- **Erweitere Begriff der Konfiguration**
  - Zustand q, Inhalt des Bandes und Kopfposition
  - Formal dargestellt als Tripel $\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}) \in \Gamma^*{\times}Q{\times}\Gamma^+$
    - u, v: String links/rechts vom Kopf

    Achtung: im Buch wird das Tripel als ein (!) String $\boldsymbol{uqv}$ geschrieben
  - Nur der bereits 'besuchten' Teil des Bandes wird betrachtet

    Blanks am Anfang von u oder am Ende von v entfallen, wo möglich

- **Modifiziere Konfigurationsübergangsrelation $\overset{*}{\vdash}$**
  - $(\boldsymbol{uZ, q, Xv}) \vdash (\boldsymbol{u, p, ZYv})$, falls $\delta(q,X) = (p,Y,L)$
  - $(\boldsymbol{u, q, Xv}) \vdash (\boldsymbol{uY, p, v})$, falls $\delta(q,X) = (p,Y,R)$

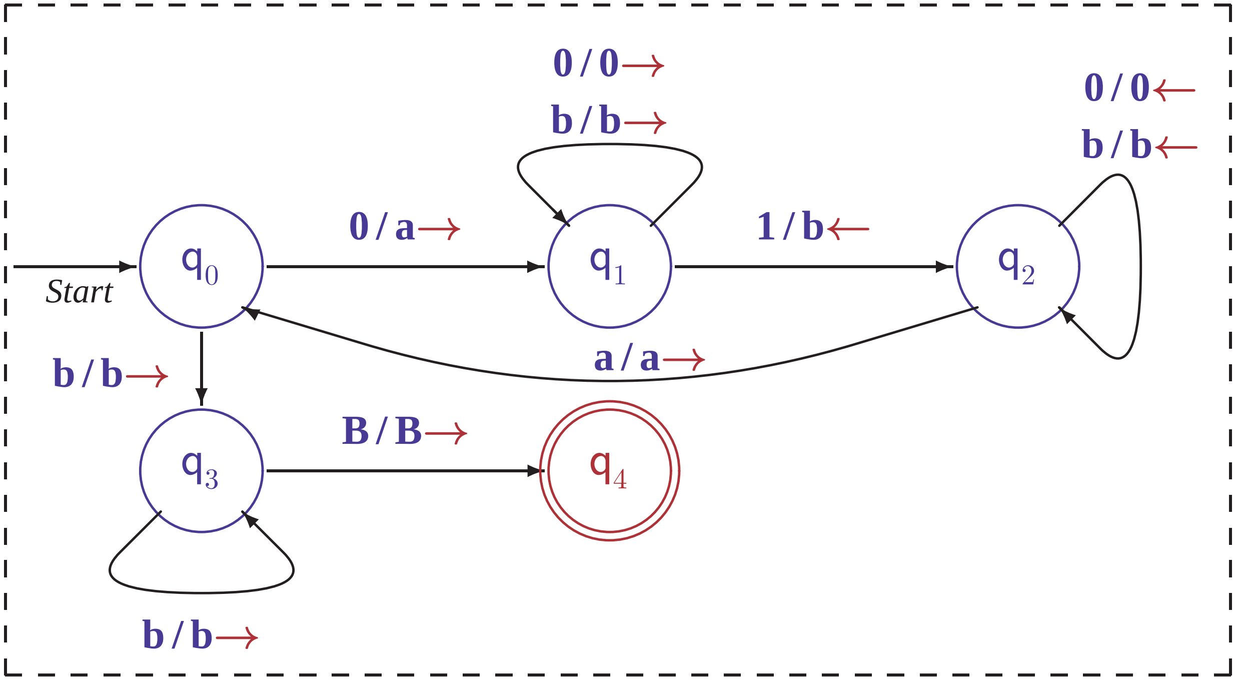
  Sonderfälle für Verhalten am Bandende
  - $(\boldsymbol{\epsilon, q, Xv}) \vdash (\boldsymbol{\epsilon, p, BYv})$, falls $\delta(q,X) = (p,Y,L)$
  - $(\boldsymbol{uZ, q, X}) \vdash (\boldsymbol{u, p, Z})$, falls $\delta(q,X) = (p,B,L)$
  - $(\boldsymbol{u, q, X}) \vdash (\boldsymbol{uY, p, B})$, falls $\delta(q,X) = (p,Y,R)$
  - $(\boldsymbol{\epsilon, q, Xv}) \vdash (\boldsymbol{\epsilon, p, v})$, falls $\delta(q,X) = (p,B,R)$

  $\boldsymbol{K_1} \overset{*}{\vdash} \boldsymbol{K_2}$, falls $K_1{=}K_2$ oder es gibt ein K mit $K_1 \vdash K$ und $K \overset{*}{\vdash} K_2$

Verarbeitung eines Eingabewortes

Eingabewort 0011 ergibt Anfangskonfiguration $(\epsilon, q_0, 0011)$

$$
\begin{aligned}
& (\epsilon, q_0, 0011) \\
\vdash\ & (a, q_1, 011) \\
\vdash\ & (a0, q_1, 11) \\
\vdash\ & (a, q_2, 0b1) \\
\vdash\ & (\epsilon, q_2, a0b1) \\
\vdash\ & (a, q_0, 0b1) \\
\vdash\ & (aa, q_1, b1) \\
\vdash\ & (aab, q_1, 1) \\
\vdash\ & (aa, q_2, bb) \\
\vdash\ & (a, q_2, abb) \\
\vdash\ & (aa, q_0, bb) \\
\vdash\ & (aab, q_3, b) \\
\vdash\ & (aabb, q_3, B) \\
\vdash\ & \boldsymbol{(aabbB, q_4, B)}
\end{aligned}
$$



Maschine terminiert,
Endzustand erreicht,
Eingabe wird akzeptiert

Die Sprache einer Turingmaschine

- **Akzeptierte Sprache**
  – Menge der Eingaben, für die $\vdash^*$ zu akzeptierendem Zustand führt

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F.\, \exists u, v \in \Gamma^*.\ (\epsilon, q_0, w) \vdash^* (u, p, v)\}$$

Bei Einhalten der Konvention hält M im akzeptierenden Zustand an

Die Sprache einer Turingmaschine

- **Akzeptierte Sprache**
  – Menge der Eingaben, für die $\vdash^*$ zu akzeptierendem Zustand führt

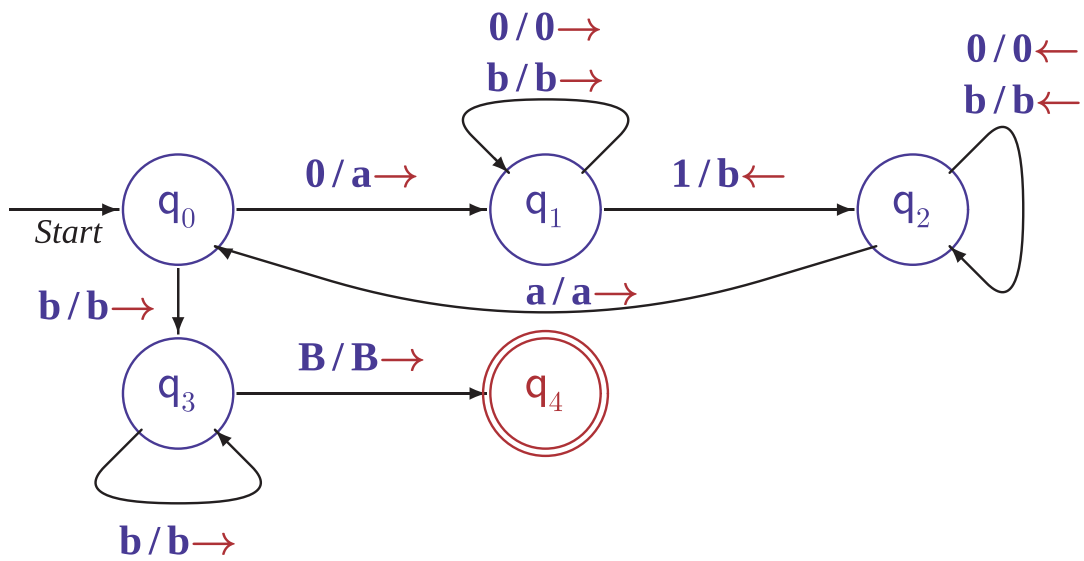
  $$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F.\, \exists u,v \in \Gamma^*.\ (\epsilon, q_0, w) \vdash^* (u,p,v)\}$$

  Bei Einhalten der Konvention hält M im akzeptierenden Zustand an

- **Semi-entscheidbare Sprache**
  – Sprache, die von einer Turingmaschine M akzeptiert wird
  – Alternative Bezeichnungen: **(rekursiv) aufzählbare Sprache**
  Turing-akzeptierbare Sprache

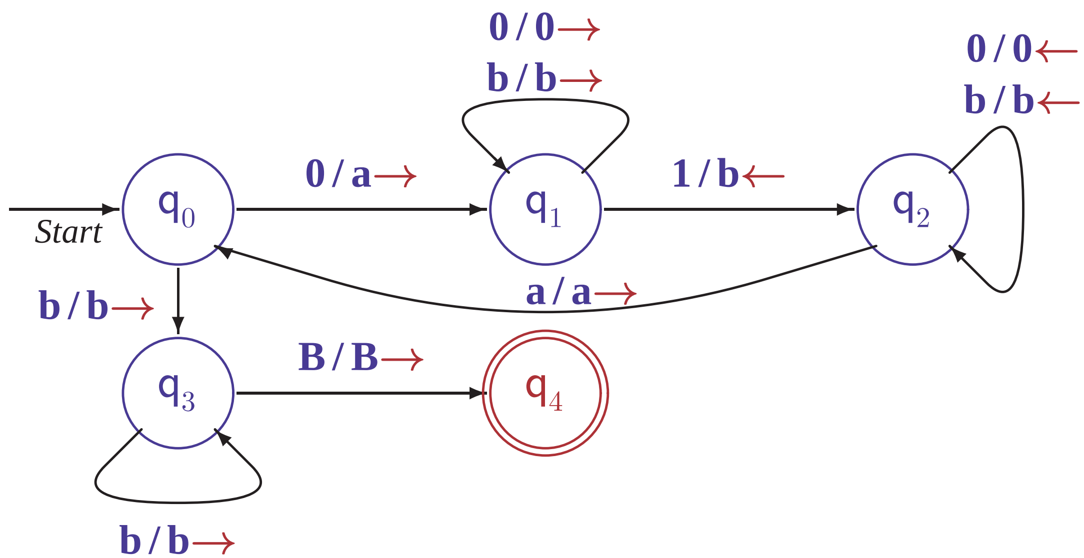
- **Entscheidbare Sprache**
  – Sprache, die von einer Turingmaschine M akzeptiert wird, die bei jeder Eingabe terminiert
  – Alternative Bezeichnung: **rekursive Sprache**

Erkannte Sprache einer Turingmaschine



- **Analyse: M zählt Nullen und Einsen gleichzeitig**
  - Umwandeln einer 0 in a triggert Umwandeln einer 1 in b
  - Maschine stoppt in q_0, wenn keine Nullen oder Einsen vorhanden sind
  - Maschine stoppt in q_1, wenn zuwenig Einsen vorhanden sind
  - Maschine stoppt in q_3, wenn zuwenig Nullen vorhanden sind
  - Maschine akzeptiert in q_4, wenn Anzahl der Nullen und Einsen gleich

Erkannte Sprache einer Turingmaschine



- **Analyse: M zählt Nullen und Einsen gleichzeitig**
  - Umwandeln einer 0 in a triggert Umwandeln einer 1 in b
  - Maschine stoppt in q_0, wenn keine Nullen oder Einsen vorhanden sind
  - Maschine stoppt in q_1, wenn zuwenig Einsen vorhanden sind
  - Maschine stoppt in q_3, wenn zuwenig Nullen vorhanden sind
  - Maschine akzeptiert in q_4, wenn Anzahl der Nullen und Einsen gleich
- **Es gilt** $\boldsymbol{L(M) = \{0^n 1^n | n \geq 1\}}$
  - Beweis: $(\epsilon, q_0, w) \vdash^* (u, q_4, v)$ genau dann, wenn $w = 0^n 1^n$ für ein $n \geq 1$

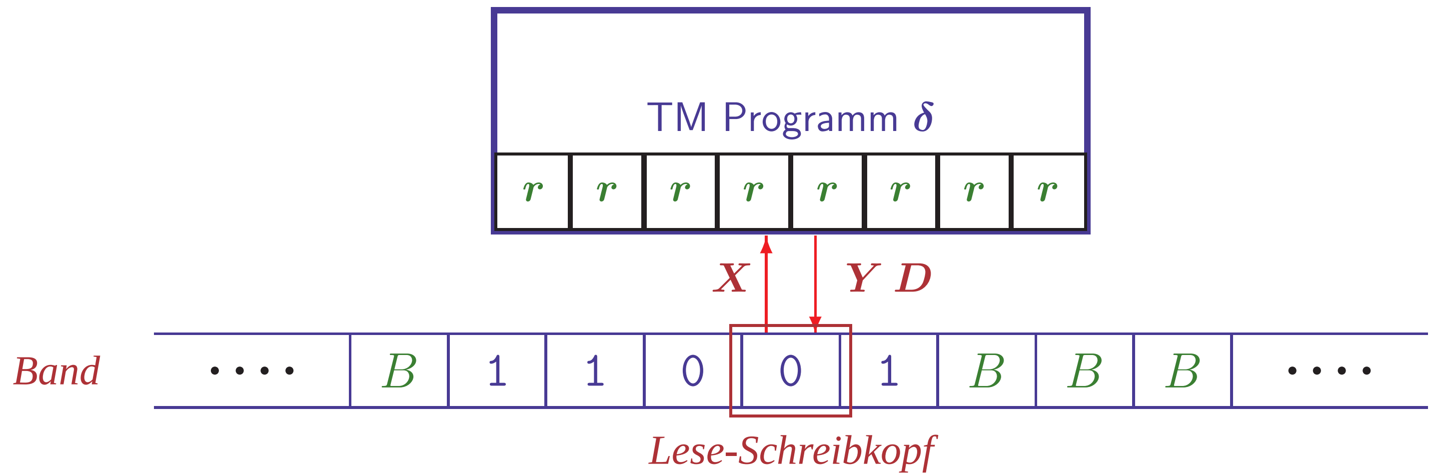
↦ Anhang, Folie 1

Ausdruckskraft von Turingmaschinen

Genauso leistungsfähig wie konventionelle Computer

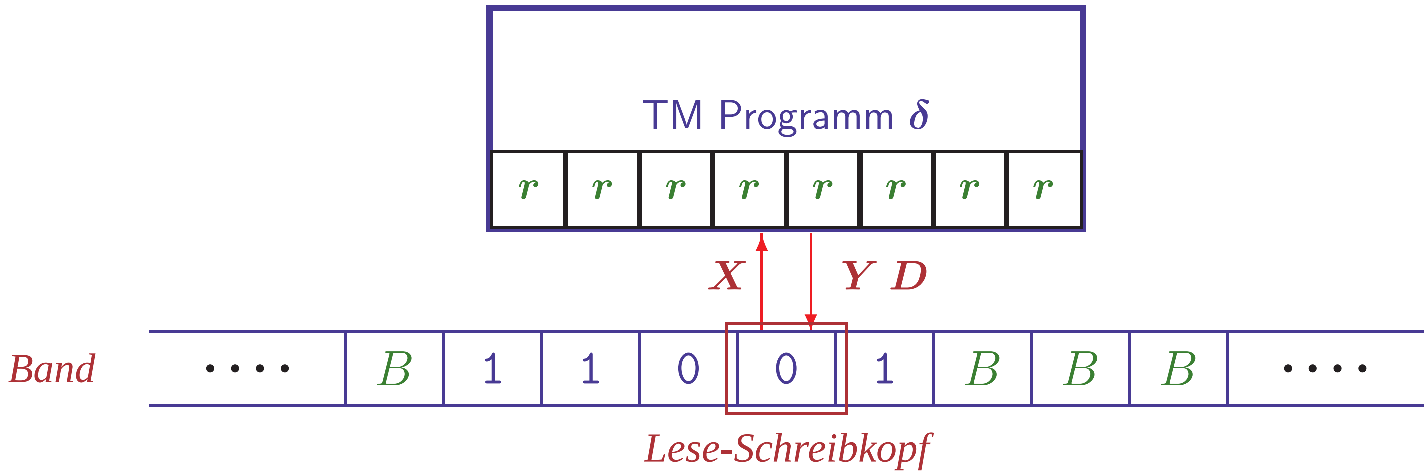
- **Reale Computer bieten viele Freiheiten**
  - Programme als Daten im Speicher
  - Datenregister und Programmzähler
  - “Simultaner” direkter Zugriff auf mehrere Speicherzellen
  - Unterprogramme
- **Turingmaschinen sind unbeschränkt**
  - Beliebig große Alphabete (statt binären Daten)
  - Unendliches Speicherband
- **Gegenseitige Simulation ist möglich**
  - Zusätzliche Freiheiten als Programmiertechniken einer TM simulierbar
  - Beschränkungen des TM Modells verringern die Ausdruckskraft nicht

Programmiertechnik: Datenregister



- **TM hat zusätzlich endliche Menge von Registern**
  - Jedes Register kann einen Wert aus einer endlichen Menge Δ enthalten
  - Maschine kann jeweils eine Bandzelle und alle Register bearbeiten
  - Verwendung: Speichern einer Menge von Daten separat vom Band

Programmiertechnik: Datenregister



- **TM hat zusätzlich endliche Menge von Registern**
  - Jedes Register kann einen Wert aus einer endlichen Menge Δ enthalten
  - Maschine kann jeweils eine Bandzelle und alle Register bearbeiten
  - Verwendung: Speichern einer Menge von Daten separat vom Band
- **Simulation durch erweiterte Zustandsmenge**
  - Bei k Registern wähle Zustandsmenge $Q' := Q \times \Delta^k$
  - Simuliere Zustandsübergang in Q und Änderung der Register durch entsprechenden Zustandsübergang in Q'

Simulation einer Maschine mit Registern

Beschreibe Maschine, die $L((01^*)+(10^*))$ erkennt

- **Einfache Lösung mit Registern**
  - Speichere erstes Bandsymbol im Register
  - q_0: Prüfe ob das gespeicherte Symbol im restlichen Wort vorkommt
  - q_1: Akzeptiere, wenn gesamtes Wort erfolgreich überprüft

Simulation einer Maschine mit Registern

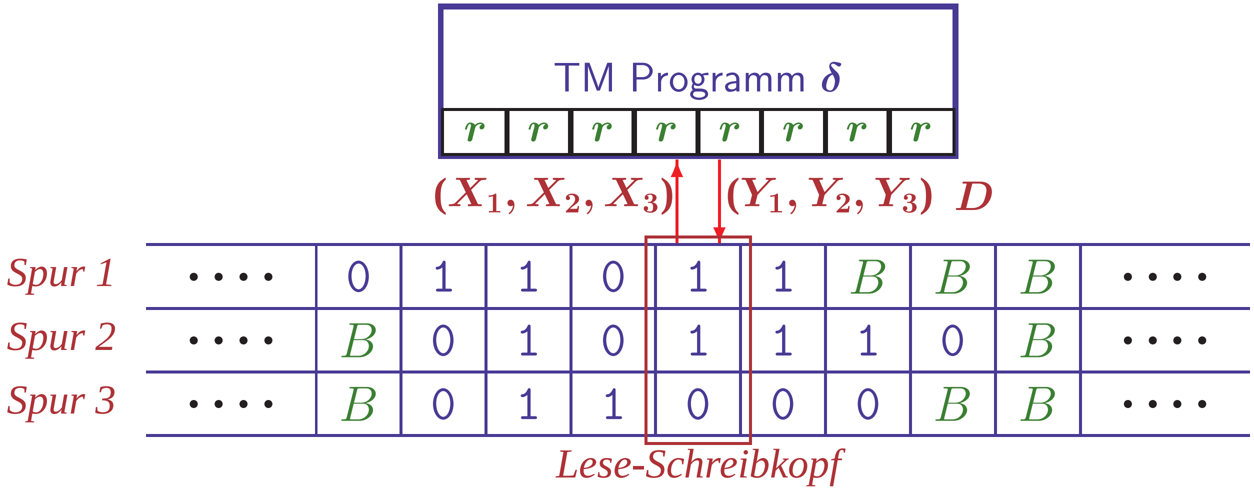
Beschreibe Maschine, die $L((01^*)+(10^*))$ erkennt

- **Einfache Lösung mit Registern**
  - Speichere erstes Bandsymbol im Register
  - q_0: Prüfe ob das gespeicherte Symbol im restlichen Wort vorkommt
  - q_1: Akzeptiere, wenn gesamtes Wort erfolgreich überprüft

- **Simulation mit $Q' := \{q_0, q_1\} \times \{\mathbf{0,1,B}\}$**

	0	1	B	
$\rightarrow$ (q_0,B)	$((q_0,0),0,R)$	$((q_0,1),1,R)$	—	*Erstes Symbol speichern*
$(q_0,0)$	—	$((q_0,0),1,R)$	$((q_1,B),B,R)$	*Mit 0 vergleichen*
$(q_0,1)$	$((q_0,1),0,R)$	—	$((q_1,B),B,R)$	*Mit 1 vergleichen*
$*$ (q_1,B)	—	—	—	*Vergleich war erfolgreich*
$(q_1,0)$	—	—	—	*(Nicht erreichbar)*
$(q_1,1)$	—	—	—	*(Nicht erreichbar)*

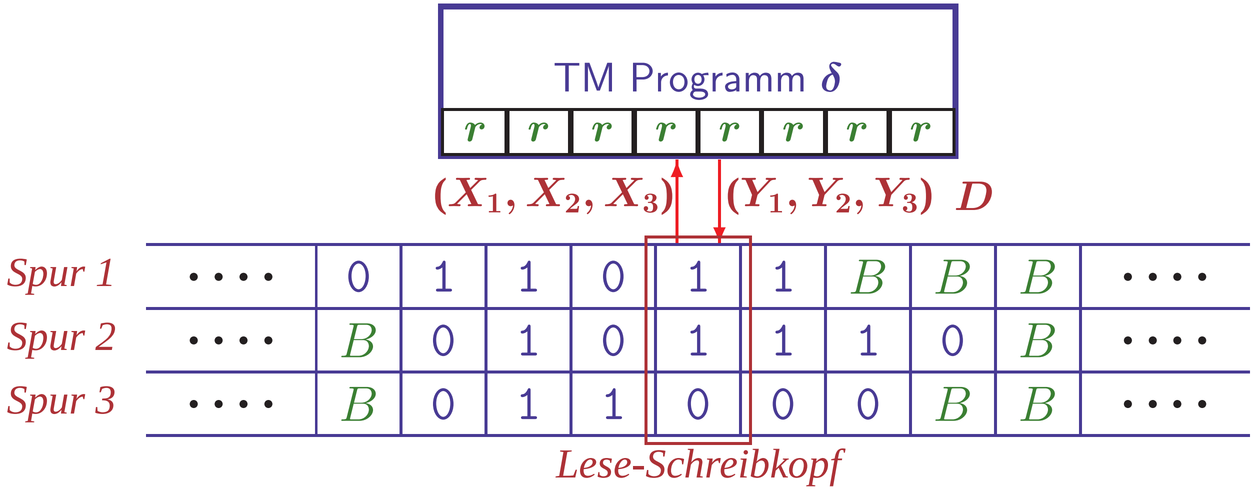
Programmiertechnik: Mehrere Spuren



- **Band hat mehrere Datenspuren**
  - Jede Spur enthält ein Symbol des Bandalphabets Γ
  - Alle Symbole werden simultan gelesen und geschrieben
  - Kopf wird "synchron" über das Band bewegt
  - Verwendung: Simultane Verarbeitung von Teilen der Eingabe

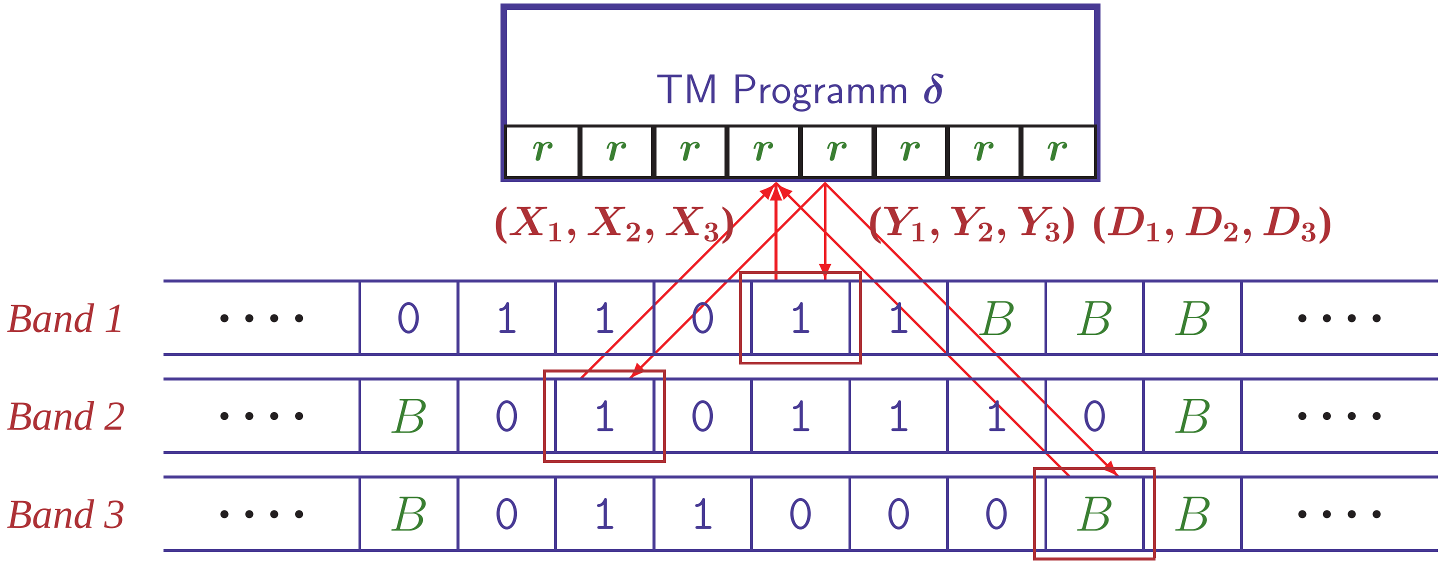
    z.B. zur Erkennung von $\{w\#w | w \in \{0,1\}^*\}$ $\mapsto$ HMU, §8.3.2

Programmiertechnik: Mehrere Spuren



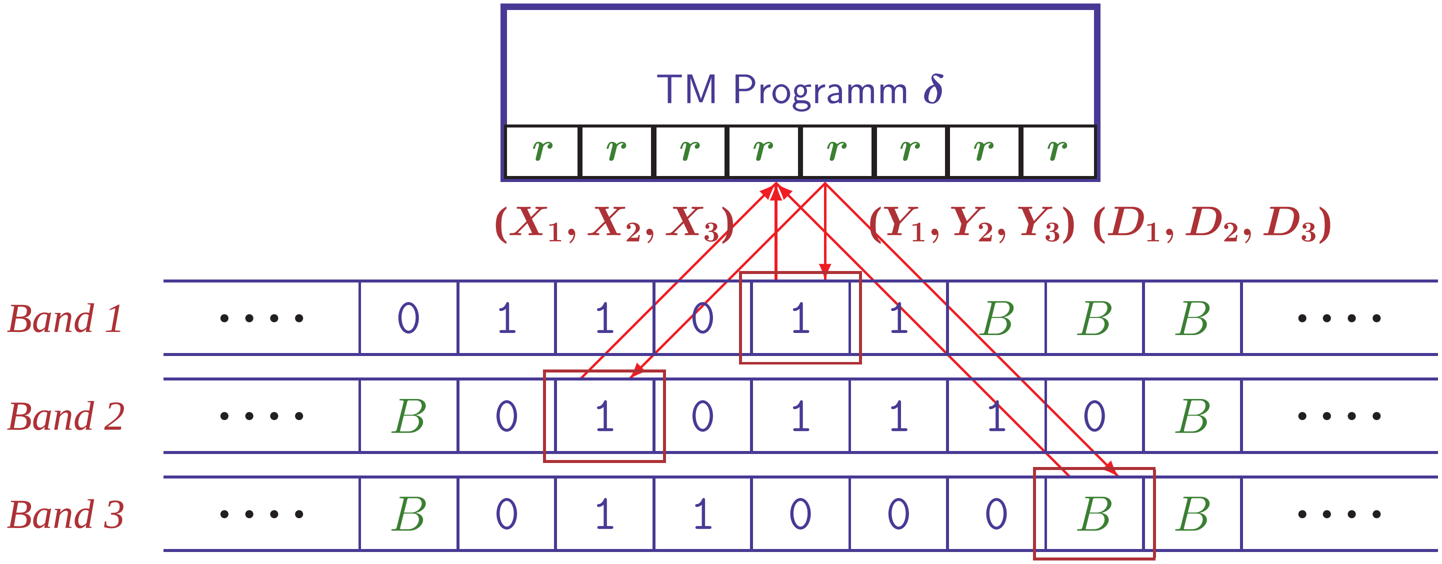
- **Band hat mehrere Datenspuren**
  - Jede Spur enthält ein Symbol des Bandalphabets Γ
  - Alle Symbole werden simultan gelesen und geschrieben
  - Kopf wird “synchron” über das Band bewegt
  - Verwendung: Simultane Verarbeitung von Teilen der Eingabe
    z.B. zur Erkennung von $\{w\#w | w \in \{0,1\}^*\}$ $\mapsto$ HMU, §8.3.2
- **Simulation durch erweitertes Bandalphabet**
  - Bei k Spuren wähle Tupelalphabet $\Gamma' := \Gamma^k$
  - In jedem Schritt wird ‘ein’ Symbol $X := (x_1, .., x_k)$ verarbeitet, wobei x_i dem Symbol auf Spur i entspricht

Programmiertechnik: Mehrere Bänder



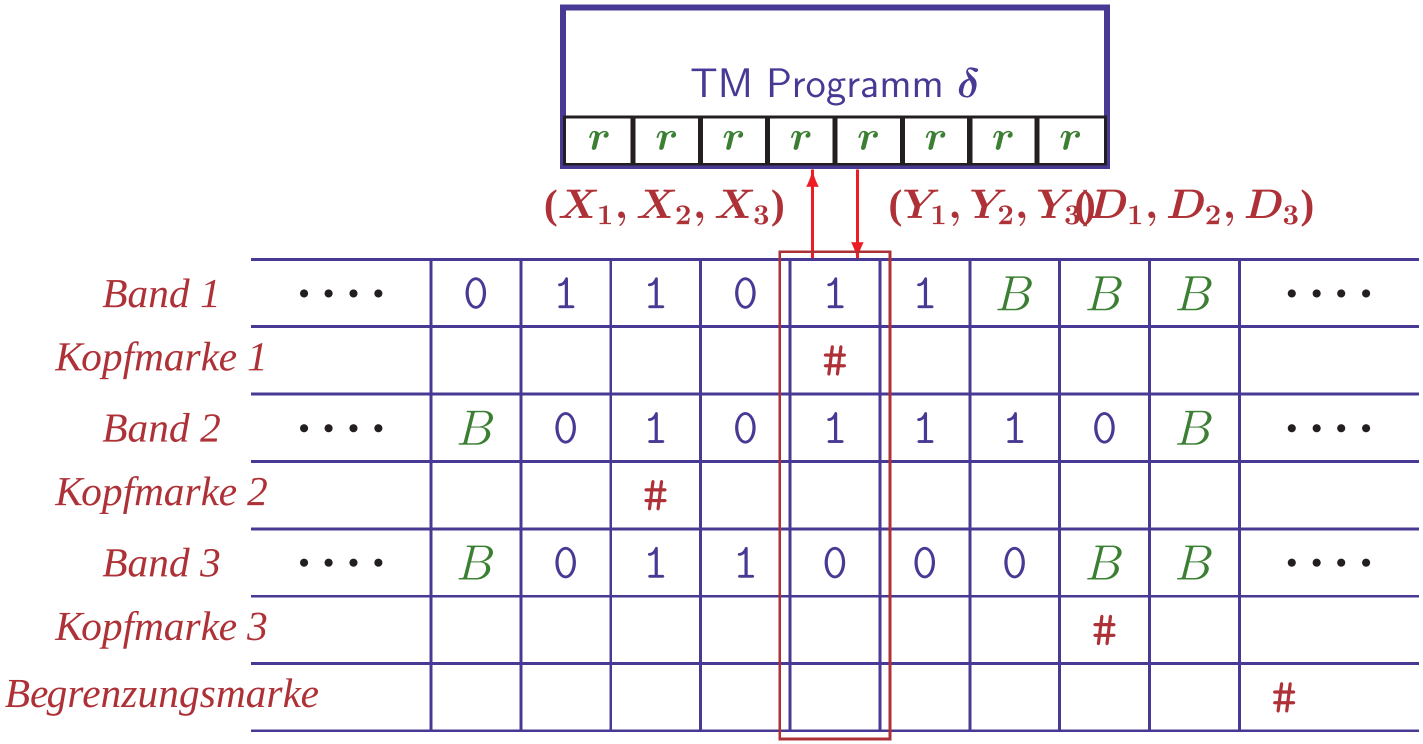
- **Maschine verwaltet mehrere Bänder**
  - Jedes Band enthält ein Symbol des Bandalphabets Γ
  - Alle Symbole werden simultan gelesen und geschrieben
  - Köpfe werden unabhängig über die Bänder bewegt
  - Erheblich größere Freiheiten bei der Programmierung

PROGRAMMIERTECHNIK: MEHRERE BÄNDER



- **Maschine verwaltet mehrere Bänder**
  – Jedes Band enthält ein Symbol des Bandalphabets Γ
  – Alle Symbole werden simultan gelesen und geschrieben
  – Köpfe werden unabhängig über die Bänder bewegt
  – Erheblich größere Freiheiten bei der Programmierung
- **Simulation aufwendiger**
  – Mehrspurband + Verwaltung der Kopfpositionen auf separaten Spuren
  – Spuren werden “einzeln aufgesucht” und modifiziert

Simulation einer Mehrbandmaschine



- **Sequentielle Verarbeitung der einzelnen Bänder**
  - Lesen: Suche Begrenzungsmarke, laufe rückwärts zu Kopfmarken, sammle zu lesende Symbole in Registern
  - Schreiben + Kopfbewegungen: lege Symbole und Richtungen in Register suche Kopfmarken und überschreibe Teilzelle entsprechend

Simulation benötigt quadratischen Zeitaufwand

$\mapsto$ HMU, §8.4.3

Programmiertechnik: Unterprogramme

Ausführung einer anderen TM als Zwischenschritt

- **Aufruf von M' in Überführungsfunktion von M**
  – M' erhält Eingabewort von M und gibt Resultat an M zurück
  – M wechselt nach Ausführung von M' in festen Folgezustand
  – Anwendungsbeispiel: Multiplikation als wiederholte Addition

- **Simulation wie bei Assembler-Unterprogrammen**
  – Umbenennung aller Zustände von M' zur Konfliktvermeidung
  – Ergänze Zustand q_r für Rücksprung ins aufrufende Programm
  – Ergänze separates Arbeitsband für Unterprogramm

  – Aufruf: Speichere Rücksprungadresse (Zustand von M) in Register
  – Kopiere Eingabe für Unterprogramme auf Arbeitsband für M'
  – Nach Abarbeitung kopiere Resultate auf Arbeitsband von M
  – Wechsele in Zustand, der im Register gespeichert ist

Beschränkte Turingmaschinen und Alternativen

Restriktionen vereinfachen Analysen von TM

Einfachere Annahmen und weniger Alternativen in Beweisen

Kein Verlust der Ausdruckskraft: Simulation normaler TMs möglich

1. Halbseitig unendliches Band $\mapsto$ HMU, §8.5.1

– Beidseitig unendliches Band durch Tupelalphabet Γ^2 simulierbar

– Im Paar (X_l, X_r) repräsentiert X_l die linke, X_r die rechte Bandhälfte

– Register (simulierbar im Zustand) gibt an, welche Hälfte aktiv ist

2. Binäres Bandalphabet $\Gamma = \{1, B\}$

– Symbole beliebiger Alphabete als Strings über $\{1B,11\}$ simulierbar

3. Zwei Stacks statt Turingband $\mapsto$ HMU, §8.5.2

– 2 Stacks + Zustand können jede Konfiguration (u,q,v) beschreiben

4. Zählermaschinen $\mapsto$ HMU, §8.5.3/4

– Endliche Zahl von Registern kann beliebig große Zahlen verarbeiten

– Operationen: Test auf Null, Addition oder Subtraktion von Eins

– Zähler können Stacks simulieren (aufwendige Codierung von Wörtern als Zahl)

Der Vergleich mit realen Computern

- **Computer können Turingmaschinen simulieren**
  – Repräsentiere binäres Bandalphabet und halbseitig unendliches Band
  – (Endliche) reale Speicher können nach Bedarf beliebig erweitert werden

- **Turingmaschinen können Computer simulieren**
  – Speicher wird durch einseitiges Band mit binärem Alphabet repräsentiert
  – Register enthalten Programmzähler, Speicheradressregister, etc.
  – Aufsuchen einer Speicherzelle vom Bandanfang durch Zählen
  – Gesuchter Speicherinhalt wird im Register abgelegt und analysiert
  – Identifizierte Anweisungen werden durch Unterprogramme ausgeführt
  – Nach Ausführung wird Anweisungszähler angepaßt und die nächste Anweisung aus dem Speicher geholt

- **Simulationsaufwand ist polynomiell** $\mapsto$ HMU, §8.6.3
  – n Schritte des realen Computers benötigen maximal n^6 Schritte
  – Optimierungen möglich

Theoretische Informatik I

Einheit 4.2

Modelle für Typ-0 & Typ-1 Sprachen

1. Nichtdeterministische Turingmaschinen
2. Äquivalenz zu Typ-0 Sprachen
3. Linear beschränkte Automaten
   und Typ-1 Sprachen
4. Eigenschaften von $\mathcal{L}_0/\mathcal{L}_1$-Sprachen

Maschinenmodelle vs. Grammatiken

- **Ableitbarkeit $w \longrightarrow_G z$ ist nichtdeterministisch**
  – In w können verschiedene Teilworte ersetzt werden
  – Auf ein Teilwort können verschiedene Regeln angewandt werden
  – Simulation erfordert nichtdeterministisches Maschinenmodell
- **Maschinenmodelle sind i.a. deterministisch**
  – Nichtdeterministische Modelle sind "unrealistisch"
  und nur für elegantere Modellierung geeignet
  – Nichtdeterministische Modelle sind evtl. deterministisch simulierbar
  aber nur mit exponentiellem Aufwand
- **Verwende nichtdeterministische Turingmaschinen**
  "Simultane" Behandlung vieler alternativer Konfigurationen
  – Zeige Äquivalenz zu deterministischen Turingmaschinen
  – Zeige Äquivalenz zu Typ-0 Grammatiken
  – Zeige Äquivalenz zu Typ-1 Grammatiken für eingeschränktes Modell

Nichtdeterministische Turingmaschinen

- **Eine nichtdeterministische Turingmaschine (NTM) ist ein 7-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ mit**
  - Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
  - Σ endliches **Eingabealphabet**
  - $\Gamma \supseteq \Sigma$ endliches **Bandalphabet**
  - $\delta{:}Q \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$ endliche **Überführungsfunktion**
  - $q_0 \in Q$ **Startzustand**
  - $B \in \Gamma \setminus \Sigma$ **Leersymbol des Bands**
  - $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden** (End-)**Zuständen**

Nichtdeterministische Turingmaschinen

- **Eine nichtdeterministische Turingmaschine (NTM) ist ein 7-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ mit**
  - Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
  - Σ endliches **Eingabealphabet**
  - $\Gamma \supseteq \Sigma$ endliches **Bandalphabet**
  - $\delta: Q \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$ endliche **Überführungsfunktion**
  - $q_0 \in Q$ **Startzustand**
  - $B \in \Gamma \setminus \Sigma$ **Leersymbol des Bands**
  - $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden** (End-)**Zuständen**
- **Definition von $\vdash^*$ und $L(M)$ analog zu DTM**
  - $(uZ, q, Xv) \vdash (u, p, ZYv)$, falls $(p, Y, L) \in \delta(q, X)$
  - $(u, q, Xv) \vdash (uY, p, v)$, falls $(p, Y, R) \in \delta(q, X)$

    $\vdots$
  - $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F. \exists u, v \in \Gamma^*. \ (\epsilon, q_0, w) \vdash^* (u, p, v)\}$

Jede NTM ist durch eine DTM simulierbar

- **Verarbeite alle Alternativen sequentiell** ↦ Anhang, Folie 4
  - Speichere Konfigurationen der NTM auf einem Arbeitsband
    Beginne mit Anfangskonfiguration κ_0 der NTM
  - In jedem Schritt der Simulation berechne alle Konfigurationen der NTM, die aus der aktuellen Konfiguration entstehen würden
  - Verarbeite Konfigurationen in der Reihenfolge ihrer Erzeugung

  $\Rightarrow$ Jede mögliche Konfiguration der NTM wird von der DTM erreicht
  DTM akzeptiert genau dann, wenn NTM akzeptiert

- **Größe der DTM wächst linear mit Größe der NTM**
  - Zustandsüberführungstabelle wird durch Unterprogramme codiert
  - Berechnung der Nachfolgekonfigurationen auf Hilfsband

- **Rechenzeit wächst exponentiell**
  - Rechenzeit der NTM ist Länge des kürzesten akzeptierenden Pfades
  - Bei k Alternativen pro Schritt muß die Simulation für n Schritte der NTM im schlimmsten Fall bis zu k^n Konfigurationen erzeugen

Turingmaschinen als Maschinenmodell für $\mathcal{L}_0$

Typ-0 Grammatiken und Turingmaschinen beschreiben dieselbe Klasse von Sprachen

- **Grammatik $\longrightarrow$ Turingmaschine** $\mapsto$ Anhang, Folie 6

  Turingmaschine simuliert Anwendung der Produktionsregeln

  – Ableitbare Wörter werden schrittweise auf Hilfsband geschrieben

  – Wörter auf dem Hilfsband werden mit der Eingabe verglichen

  Maschine akzeptiert, wenn $w \in L(G)$, und terminiert sonst nicht

- **Turingmaschine $\longrightarrow$ Grammatik** $\mapsto$ Anhang, Folie 8

  Grammatik simuliert Konfigurationsübergänge der Turingmaschine

  – Erzeuge alle möglichen Eingabewörter und Anfangskonfigurationen

  – Codiere Konfigurationsübergänge von M als Regeln

  – Simuliere Akzeptieren durch Löschen von Nonterminalsymbolen

  Grammatik generiert genau alle Wörter, die M akzeptiert

Linear beschränkte Automaten

Welches Modell paßt zu Typ-1 Sprachen?

Linear beschränkte Automaten

Welches Modell paßt zu Typ-1 Sprachen?

- **Typ-1 Sprachen werden "expansiv" erzeugt**
  - In jeder Ableitung $S \longrightarrow w_1 \longrightarrow w_2 \ldots \longrightarrow w$ eines Wortes $w \in L(G)$ ist keines der w_i länger als w (Ausnahme $w = \epsilon$)
  - Turingmaschine braucht maximal $|w|$ Bandzellen zur Simulation

Linear beschränkte Automaten

Welches Modell paßt zu Typ-1 Sprachen?

- **Typ-1 Sprachen werden "expansiv" erzeugt**
  - In jeder Ableitung $S \longrightarrow w_1 \longrightarrow w_2 \ldots \longrightarrow w$ eines Wortes $w \in L(G)$ ist keines der w_i länger als w (Ausnahme $w = \epsilon$)
  - Turingmaschine braucht maximal $|w|$ Bandzellen zur Simulation
- **Beschränke NTMs auf linearen Bandverbrauch**
  - Das Arbeitsband ist nur halbseitig unendlich
  - Anfangskonfigurationen haben die Form $(\epsilon, q_0, w\#)$
  - # ist ein spezielles Bandende-Symbol, das niemals überlaufen oder überschrieben werden darf

Linear beschränkte Automaten

Welches Modell paßt zu Typ-1 Sprachen?

- **Typ-1 Sprachen werden "expansiv" erzeugt**
  - In jeder Ableitung $S \longrightarrow w_1 \longrightarrow w_2 \ldots \longrightarrow w$ eines Wortes $w \in L(G)$ ist keines der w_i länger als w (Ausnahme $w = \epsilon$)
  - Turingmaschine braucht maximal $|w|$ Bandzellen zur Simulation
- **Beschränke NTMs auf linearen Bandverbrauch**
  - Das Arbeitsband ist nur halbseitig unendlich
  - Anfangskonfigurationen haben die Form $(\epsilon, q_0, w\#)$
  - # ist ein spezielles Bandende-Symbol, das niemals überlaufen oder überschrieben werden darf
- **Formal: linear beschränkter Automat (LBA)**
  - NTM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ mit halbseitig unendlichem Band und ausgezeichnetem Symbol $\# \in \Gamma \backslash (\Sigma \cup \{B\})$ und der Einschränkung $\delta(q,\#) \subseteq \{(p,\#, L) | p \in Q\}$ für alle $q \in Q$
  - Es gilt: $\mathcal{L}_1 = \{L \mid L = L(M)$ **für einen LBA** $M\}$ $\mapsto$ Anhang, Folie 10

Linear beschränkter Automat für $\{0^n 1^n 2^n | n \in \mathbb{N}\}$

1. **Anfangskonfiguration ist** $(\epsilon, q_0, w\#)$
2. **Wenn das Band leer ist, akzeptiere die Eingabe**
3. **Ansonsten ersetze die erste 0 durch** B
   – Wenn keine 0 unter dem Kopf steht, halte an ohne zu akzeptieren
4. **Gehe rechts zur ersten 1; ersetze diese durch** B
   – Vor der 1 dürfen nur Nullen oder Blanks kommen (!)
   – Wenn keine 1 vorkommt, halte an ohne zu akzeptieren
5. **Gehe rechts zur ersten 2; ersetze diese durch** B
   – Vor der 2 dürfen nur noch Einsen oder Blanks kommen (!)
   – Wenn keine 2 am Ende steht, halte an ohne zu akzeptieren
6. **Laufe zurück zum Anfang des restlichen Wortes**
   – Fahre fort mit Schritt 2

Optimierung: Schließe Lücken durch Verschieben

– Verfahren funktioniert analog auch für $\{0^n 1^n 2^n 3^n 4^n | n \in \mathbb{N}\}$

Zusammenhänge zwischen Sprachklassen

Semi-entscheidbare Sprache: Sprache, die von Turingmaschinen akzeptiert wird
Entscheidbare Sprache: Sprache, die von terminierenden Turingmaschine akzeptiert wird
Kontextsensitive Sprache: Sprache, die von linear beschränkten Automaten akzeptiert wird

- **Entscheidbare Sprachen sind auch semi-entscheidbar**
  – Offensichtlich, da engere Bedingung
- **Kontextsensitive Sprachen sind entscheidbar**
  – Ein LBA hat bei Eingabe w maximal $(|\Gamma|+|Q|)^{|w|+1}$ Konfigurationen
- **Jede endliche Sprache L ist entscheidbar**
  – Bei Eingabe von w testet M durch Suchen, ob $w \in \{w_1, .., w_n\} = L$ gilt
- **L entscheidbar $\Leftrightarrow$ L und $\overline{L}$ semi-entscheidbar**
  "$\Rightarrow$": Entscheidbare Sprachen sind abgeschlossen unter Komplement
  "$\Leftarrow$": Simuliere Maschinen für L und $\overline{L}$ simultan, übernehme Ergebnis
  Eine der beiden Maschinen muß terminieren und akzeptieren
- **L semi-entscheidbar $\Leftrightarrow$ es gibt ein entscheidbares $L' \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ mit $L = \{w \mid \exists v.\, (w,v) \in L'\}$** (Projektionssatz)
  – Aufwendiger Beweis, benötigt schrittweise Simulation von Maschinen

Abschlusseigenschaften summarisch

- **Alle drei Sprachklassen sind abgeschlossen unter**
  - Vereinigung $L_1 \cup L_2$
  - Durchschnitt $L_1 \cap L_2$
  - Spiegelung L^R
  - Verkettung $L_1 \circ L_2$
  - Hüllenbildung L^*
  - Homomorphismen $h(L)$
  - Inverse Homomorphismen $h^{-1}(L)$
  - Urbild berechenbarer Funktionen $f^{-1}(L)$
- **Typ-1 und entscheidbare Sprachen zusätzlich**
  - Komplement $\overline{L}$
  - Differenz L_1 - L_2
  - Aufzählbare Sprachen: Bild berechenbarer Funktionen $f(L)$

Beweise im Anhang, ab Folie 11

Prüfen von Eigenschaften summarisch

- **“$x \in L$” kann automatisch geprüft werden für**
  - Kontextsensitive und entscheidbare Sprachen

    (Folgt unmittelbar aus der Definition von Entscheidbarkeit)
  - Aber **nicht für aufzählbare Sprachen**

    (Folgt aus Existenz einer aufzählbaren, aber unentscheidbaren Sprache)

Prüfen von Eigenschaften summarisch

- **"$x \in L$" kann automatisch geprüft werden für**
  - Kontextsensitive und entscheidbare Sprachen
    (Folgt unmittelbar aus der Definition von Entscheidbarkeit)
  - Aber **nicht für aufzählbare Sprachen**
    (Folgt aus Existenz einer aufzählbaren, aber unentscheidbaren Sprache)

- **Für keine Sprachklasse kann getestet werden ob**
  - eine Sprache L der Klasse leer ist
  - zwei Sprachen L_1 und L_2 der Klasse gleich sind
  - zwei Sprachen L_1 und L_2 der Klasse ineinander enthalten sind
  - der Durchschnitt zweier Sprachen der Klasse leer ist

Beweise benötigen Beispiele für Sprachen, die nicht zur Klasse gehören

Grenzen der Sprachklassen

- **Entscheidbare, nicht kontextsensitive Sprache**
  - Menge aller äquivalenten regulären Ausdrücke (gelesen als Text), wenn diese eine Iteration $E^k = \underbrace{E \circ E \ldots \circ E}_{k-mal}$ enthalten dürfen
  - Äquivalenztest benötigt exponentiell großen Speicherplatz

Grenzen der Sprachklassen

- **Entscheidbare, nicht kontextsensitive Sprache**
  - Menge aller äquivalenten regulären Ausdrücke (gelesen als Text), wenn diese eine Iteration $E^k = \underbrace{E \circ E \ldots \circ E}_{k-mal}$ enthalten dürfen
  - Äquivalenztest benötigt exponentiell großen Speicherplatz
- **Aufzählbare, nicht entscheidbare Sprache**
  - Selbstanwendbarkeitsproblem: Menge aller Programme von Turingmaschinen, die bei Eingabe des eigenen Programms als Text terminieren

Grenzen der Sprachklassen

- **Entscheidbare, nicht kontextsensitive Sprache**
  - Menge aller äquivalenten regulären Ausdrücke (gelesen als Text), wenn diese eine Iteration $E^k = \underbrace{E\circ E \ldots \circ E}_{k-mal}$ enthalten dürfen
  - Äquivalenztest benötigt exponentiell großen Speicherplatz
- **Aufzählbare, nicht entscheidbare Sprache**
  - Selbstanwendbarkeitsproblem: Menge aller Programme von Turingmaschinen, die bei Eingabe des eigenen Programms als Text terminieren
- **Nicht aufzählbare Sprache**
  - Totale Berechenbarkeit: Menge aller Programme von Turingmaschinen, die bei jeder Eingabe terminieren

Grenzen der Sprachklassen

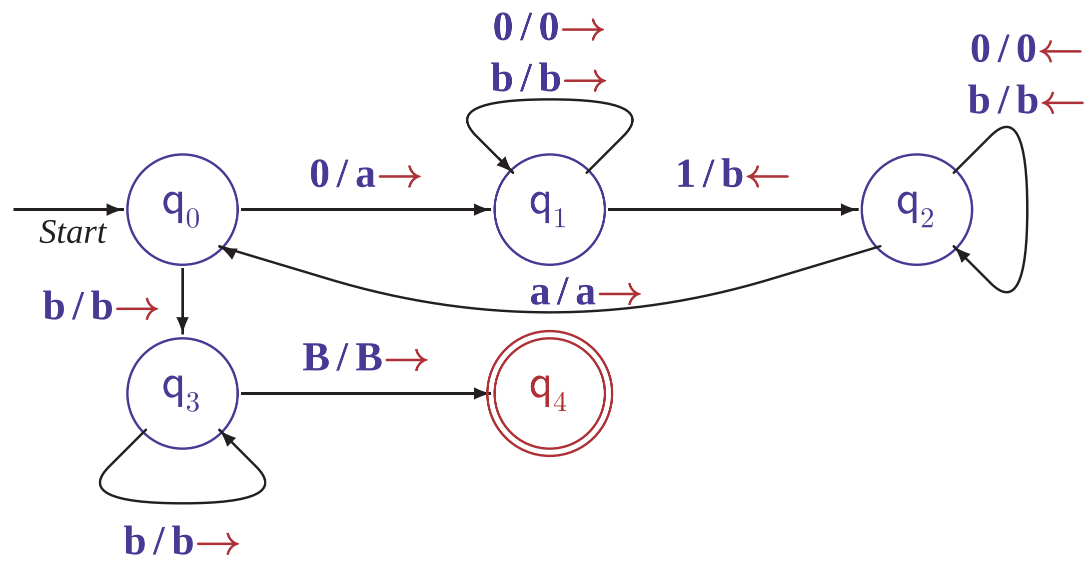
- **Entscheidbare, nicht kontextsensitive Sprache**
  - Menge aller äquivalenten regulären Ausdrücke (gelesen als Text), wenn diese eine Iteration $E^k = \underbrace{E\circ E\ldots\circ E}_{k-mal}$ enthalten dürfen
  - Äquivalenztest benötigt exponentiell großen Speicherplatz
- **Aufzählbare, nicht entscheidbare Sprache**
  - Selbstanwendbarkeitsproblem: Menge aller Programme von Turingmaschinen, die bei Eingabe des eigenen Programms als Text terminieren
- **Nicht aufzählbare Sprache**
  - Totale Berechenbarkeit: Menge aller Programme von Turingmaschinen, die bei jeder Eingabe terminieren

Mehr dazu in Theoretischer Informatik II

Zusammenfassung: Typ-0 und Typ-1 Sprachen

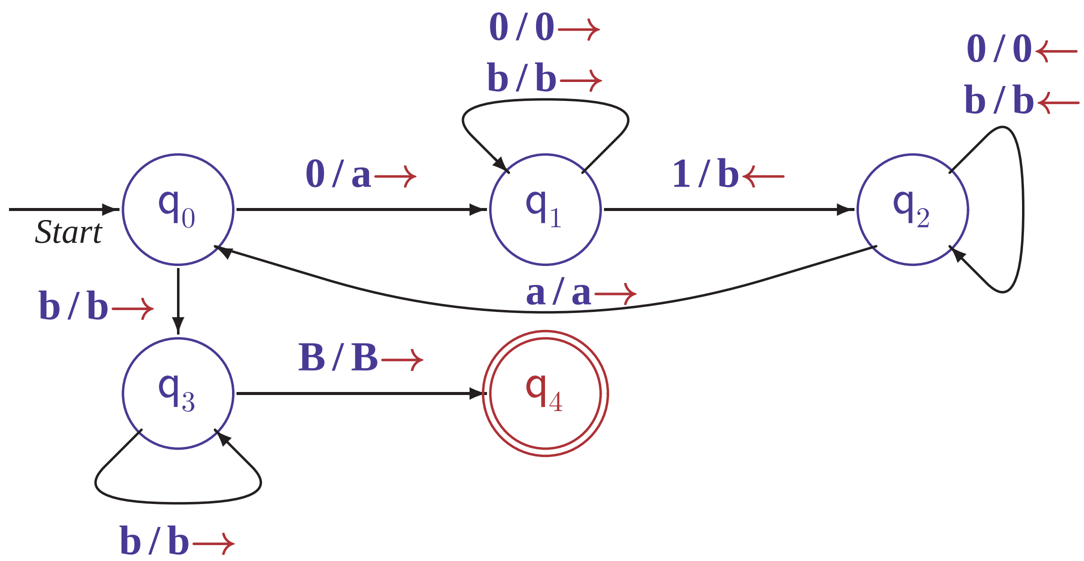
- **Turingmaschine als allgemeinstes Maschinenmodell**
  - Deterministischer endlicher Automat mit unendlichem Speicherband
  - Gleiche Ausdruckskraft wie reale Computer (aber einfacher strukturiert)
  - Nichtdeterministische Variante mit exponentiellem Aufwand simulierbar
  - Äquivalent zu Typ-0 Grammatiken
  - Bei linearer Bandbeschränkung äquivalent zu Typ-1 Grammatiken
  - Entscheidbare Sprachen stehen zwischen $\mathcal{L}_0$ und $\mathcal{L}_1$
- **Wichtige Eigenschaften der Sprachklassen**
  - Abgeschlossen unter $\cup$, $\cap$, ^{R}, $\circ$, *, h, h^{-1}
  - $\mathcal{L}_1$ und entscheidbare Sprachen zusätzlich unter $\overline{}$, -
  - Viele Eigenschaften können nicht automatisch getestet werden
    - Fast alle nichttrivialen Eigenschaften sind für keine Klasse entscheidbar
    - Für $\mathcal{L}_0$ ist selbst das Wortproblem nicht mehr entscheidbar

ANHANG



- **Analyse:** M **zählt Nullen und Einsen gleichzeitig**
  - Umwandeln einer 0 in a triggert Umwandeln einer 1 in b
  - Maschine stoppt in q_0, wenn keine Nullen oder Einsen vorhanden sind
  - Maschine stoppt in q_1, wenn zuwenig Einsen vorhanden sind
  - Maschine stoppt in q_3, wenn zuwenig Nullen vorhanden sind
  - Maschine akzeptiert in q_4, wenn Anzahl der Nullen und Einsen gleich

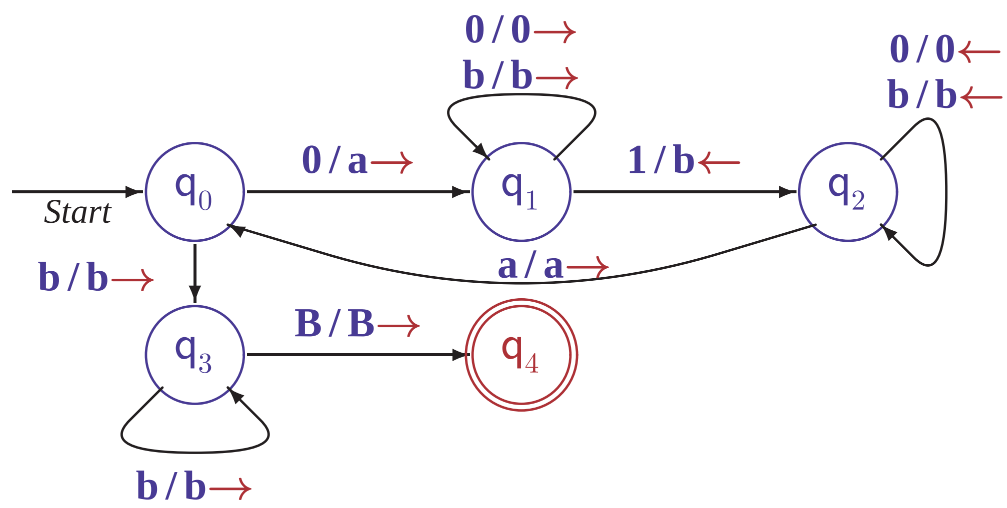
Erkannte Sprache einer Turingmaschine



- **Analyse: M zählt Nullen und Einsen gleichzeitig**
  - Umwandeln einer 0 in a triggert Umwandeln einer 1 in b
  - Maschine stoppt in q_0, wenn keine Nullen oder Einsen vorhanden sind
  - Maschine stoppt in q_1, wenn zuwenig Einsen vorhanden sind
  - Maschine stoppt in q_3, wenn zuwenig Nullen vorhanden sind
  - Maschine akzeptiert in q_4, wenn Anzahl der Nullen und Einsen gleich

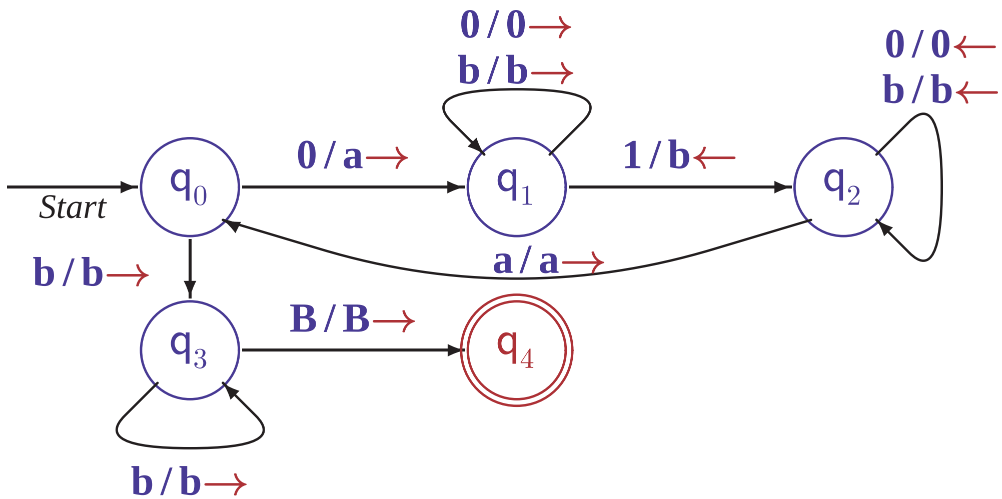
- **Zeige: $L(M) = \{0^n1^n|n{\geq}1\}$**
  - $(\epsilon, q_0, w) \vdash^* (u, q_4, v)$ genau dann, wenn $w = 0^n1^n$ für ein $n{\geq}1$

Nachweis der erkannten Sprache I



$(\epsilon, q_0, w) \vdash^* (u, q_4, v)$ **wenn** $w = 0^n 1^n$ **für ein** $n \geq 1$

Nachweis der erkannten Sprache I

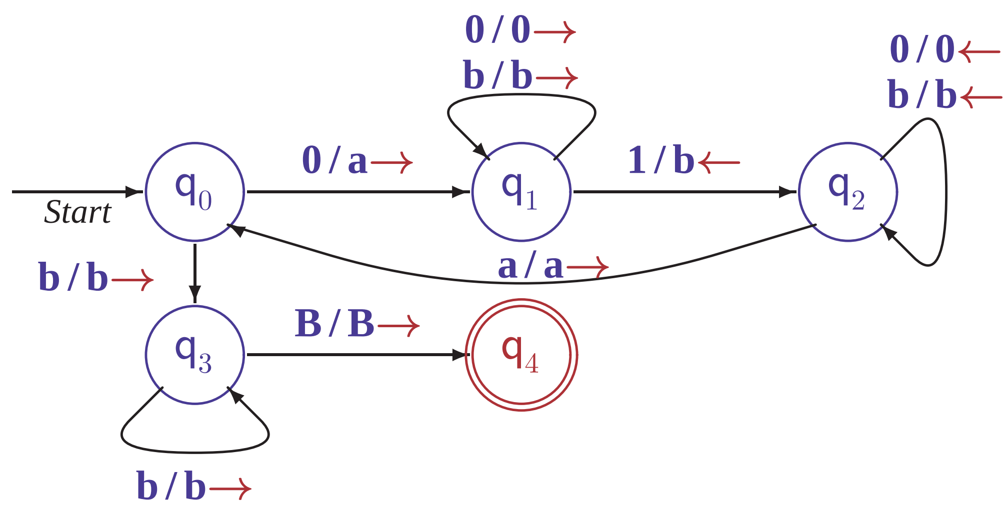


$(\epsilon, q_0, w) \vdash^* (u, q_4, v)$ **wenn** $w = 0^n1^n$ **für ein** $n \geq 1$

Für alle $u, v \in \Gamma^*, w \in \{0, b\}^*, k \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gilt

1. $(u, q_0, 0v) \quad \vdash \quad (ua, q_1, v)$ *(direkt aus Diagramm ersichtlich)*
2. $(u, q_0, 0wv) \quad \vdash^* \quad (uaw, q_1, v)$ *(Induktion über w)*

Nachweis der erkannten Sprache I

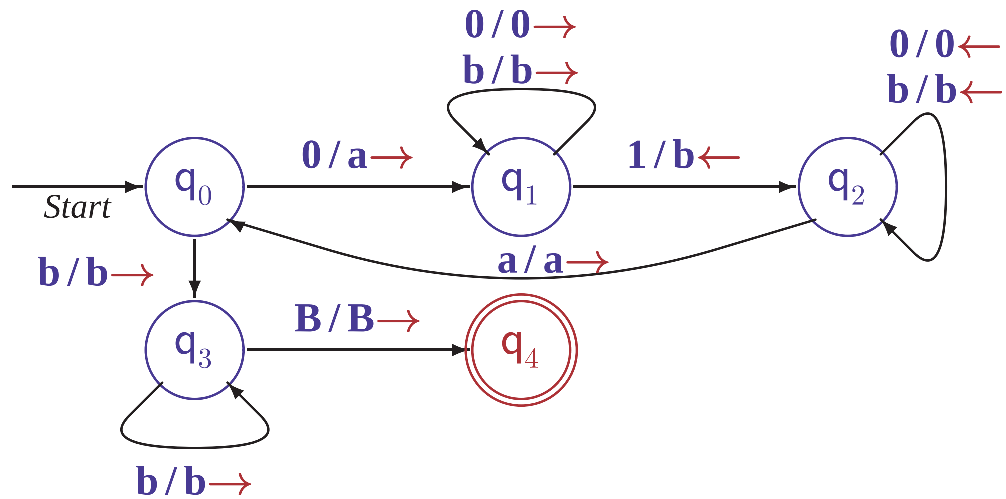


$(\epsilon, q_0, w) \vdash^* (u, q_4, v)$ **wenn** $w = 0^n 1^n$ **für ein** $n \geq 1$

Für alle $u, v \in \Gamma^*, w \in \{0, b\}^*, k \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gilt

1. $(u, q_0, 0v) \vdash (ua, q_1, v)$ *(direkt aus Diagramm ersichtlich)*
2. $(u, q_0, 0wv) \vdash^* (uaw, q_1, v)$ *(Induktion über w)*
3. $(u, q_0, 0w1v) \vdash^* (u, q_2, awbv)$ *(folgt aus 2. und Diagramm)*
4. $(u, q_0, 0w1v) \vdash^* (ua, q_0, wbv)$ *(folgt aus 3. und Diagramm)*

Nachweis der erkannten Sprache I

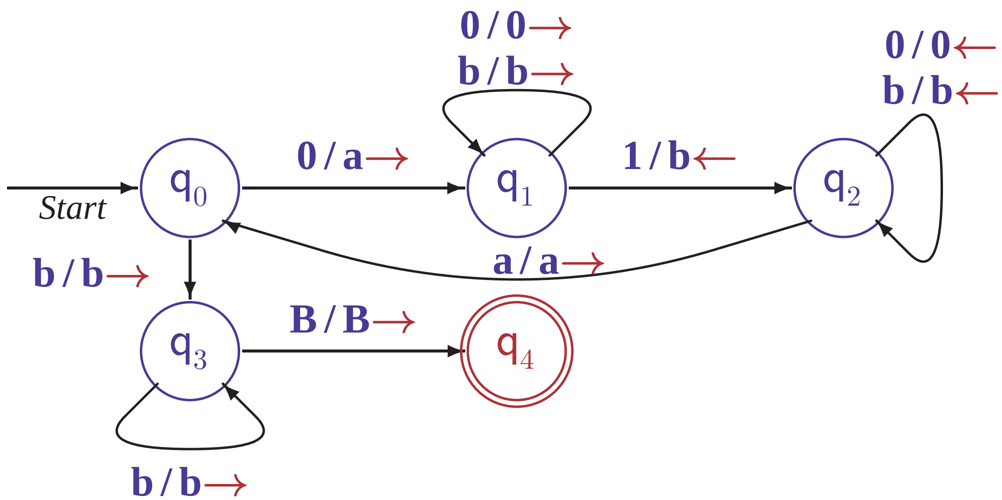


$(\epsilon, q_0, w) \vdash^* (u, q_4, v)$ **wenn** $w = 0^n 1^n$ **für ein** $n \geq 1$

Für alle $u, v \in \Gamma^*, w \in \{0, b\}^*, k \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gilt

1. $(u, q_0, 0v) \vdash (ua, q_1, v)$ *(direkt aus Diagramm ersichtlich)*
2. $(u, q_0, 0wv) \vdash^* (uaw, q_1, v)$ *(Induktion über w)*
3. $(u, q_0, 0w1v) \vdash^* (u, q_2, awbv)$ *(folgt aus 2. und Diagramm)*
4. $(u, q_0, 0w1v) \vdash^* (ua, q_0, wbv)$ *(folgt aus 3. und Diagramm)*
5. $(\epsilon, q_0, 0^k w 1^k v) \vdash^* (a^k, q_0, wb^k v)$ *(Induktion über k unter Verwendung von 4.)*
6. $(\epsilon, q_0, 0^n 1^n v) \vdash^* (a^n b^n, q_3, v)$ *(5. mit w=ϵ, Diagramm, Induktion in q_3)*
7. $(\epsilon, q_0, 0^n 1^n) \vdash^* (a^n b^n, q_3, B)$ *(6. mit v=ϵ)*
8. $\boldsymbol{(\epsilon, q_0, 0^n 1^n) \vdash^* (a^n b^n B, q_4, B)}$ *(7. und Diagramm)*

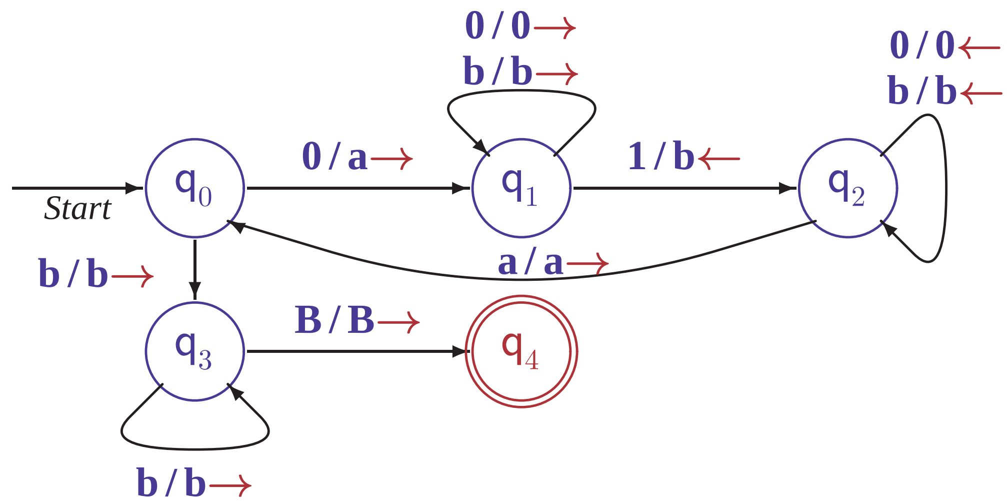
Nachweis der erkannten Sprache II



$(\epsilon, q_0, w) \vdash^* (u, q_4, v)$ **nur wenn** $w = 0^n1^n$ **für ein** $n \geq 1$

Informales Argument, da detaillierter formaler Beweis zu aufwendig

Nachweis der erkannten Sprache II

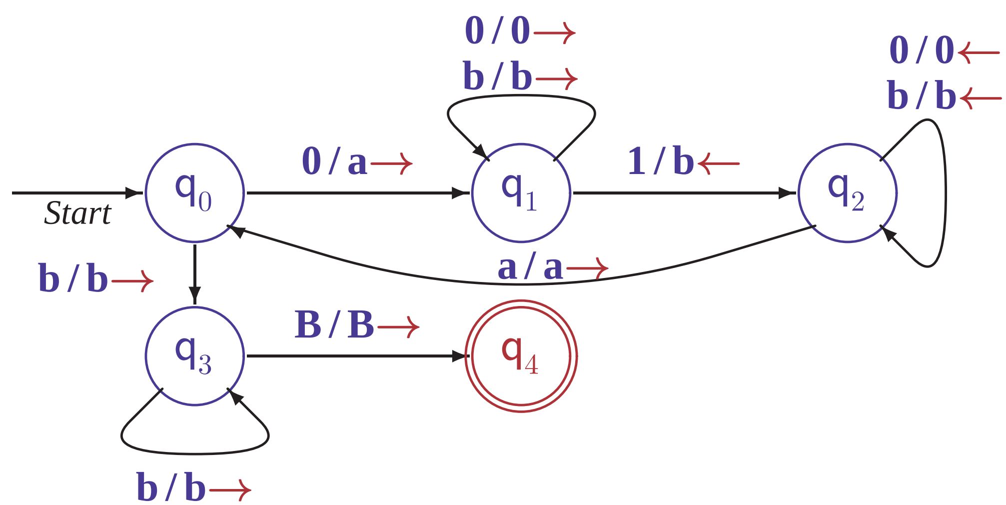


$(\epsilon, q_0, w) \vdash^* (u, q_4, v)$ **nur wenn** $w = 0^n 1^n$ **für ein** $n \geq 1$

Informales Argument, da detaillierter formaler Beweis zu aufwendig

1. Die Schleife $q_0 - q_1 - q_2$ wandelt je eine 0 in ein a und eine 1 in b um
2. Am Ende der Schleife stehen alle 0 und 1 rechts vom Kopf und alle a links davon
3. Da das Eingabewort zu $\{0,1\}^*$ gehört, stehen in q_0 gleich viele a und b auf dem Band

Nachweis der erkannten Sprache II



$(\epsilon, q_0, w) \vdash^* (u, q_4, v)$ **nur wenn** $w = 0^n 1^n$ **für ein** $n \geq 1$

Informales Argument, da detaillierter formaler Beweis zu aufwendig

1. Die Schleife $q_0 - q_1 - q_2$ wandelt je eine 0 in ein a und eine 1 in b um
2. Am Ende der Schleife stehen alle 0 und 1 rechts vom Kopf und alle a links davon
3. Da das Eingabewort zu $\{0,1\}^*$ gehört, stehen in q_0 gleich viele a und b auf dem Band
4. Um q_4 von q_0 zu erreichen, muß das Wort rechts vom Kopf die Form b^n $(n \geq 1)$ haben
5. Wegen 2. und 3. hat das Wort links vom Kopf die Form a^n
6. Wegen 1. muß das Eingabewort die Form $0^n 1^n$ haben, um akzeptiert zu werden.

Jede NTM ist durch eine DTM simulierbar

Verarbeite alle Alternativen sequentiell

JEDE NTM IST DURCH EINE DTM SIMULIERBAR

Verarbeite alle Alternativen sequentiell

- **Für $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,F)$ definiere Mengen K_i^w**
  - Menge der in i Schritten erzeugbaren Konfigurationen bei Eingabe w

    $K_0^w := \{(\epsilon, q_0, w)\}, \quad K_{i+1}^w := \{\kappa' \mid \exists \kappa \in K_i^w.\ \kappa \vdash \kappa'\}$
  - Es gilt $w \in L(M) \Leftrightarrow \exists i.\ \exists p \in F.\ \exists u, v \in \Gamma^*.\ (u,p,v) \in K_i^w$

Jede NTM ist durch eine DTM simulierbar

Verarbeite alle Alternativen sequentiell

- **Für $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,F)$ definiere Mengen $\boldsymbol{K_i^w}$**
  - Menge der in i Schritten erzeugbaren Konfigurationen bei Eingabe w

    $$\boldsymbol{K_0^w} := \{(\epsilon, q_0, w)\},\quad \boldsymbol{K_{i+1}^w} := \{\kappa' \mid \exists \kappa \in K_i^w.\ \kappa \vdash \kappa'\}$$
  - Es gilt $\boldsymbol{w \in L(M) \Leftrightarrow \exists i. \exists p \in F. \exists u, v \in \Gamma^*. (u, p, v) \in K_i^w}$
- **Beschreibe DTM zur Erzeugung der $\boldsymbol{K_i^w}$**

K_0^w

q_0	$w_1..w_n$	\$													

  - Arbeitsband beschreibt alle bisher erzeugten Konfigurationen der NTM
    Die aktuell betrachtete Konfiguration κ wird markiert

Verarbeite alle Alternativen sequentiell

- **Für $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,F)$ definiere Mengen K_i^w**
  - Menge der in i Schritten erzeugbaren Konfigurationen bei Eingabe w

    $K_0^w := \{(\epsilon, q_0, w)\}, \quad K_{i+1}^w := \{\kappa' \mid \exists \kappa \in K_i^w.\ \kappa \vdash \kappa'\}$
  - Es gilt $w \in L(M) \Leftrightarrow \exists i.\ \exists p \in F.\ \exists u, v \in \Gamma^*.\ (u, p, v) \in K_i^w$
- **Beschreibe DTM zur Erzeugung der K_i^w**

K_0^w			K_1^w												
q_0	$w_1..w_n$	\$	#	$u_1^1\|q_1^1\|v_1^1$	#	$u_1^2\|q_1^2\|v_1^2$	#···#	$u_1^{j_1}\|q_1^{j_1}\|v_1^{j_1}$	\$						

  - Arbeitsband beschreibt alle bisher erzeugten Konfigurationen der NTM
    Die aktuell betrachtete Konfiguration κ wird markiert
  - Lesen: Extrahiere aus κ das gelesene Symbol X und Zustand q der NTM
  - Verarbeiten: Erzeuge aus κ und $\delta(q, X)$ alle Nachfolgekonfigurationen
    Lösche Markierung von κ und markiere nächste Konfiguration auf Band

Jede NTM ist durch eine DTM simulierbar

Verarbeite alle Alternativen sequentiell

- **Für $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,F)$ definiere Mengen K_i^w**
  - Menge der in i Schritten erzeugbaren Konfigurationen bei Eingabe w

    $$K_0^w := \{(\epsilon, q_0, w)\}, \quad K_{i+1}^w := \{\kappa' \mid \exists \kappa \in K_i^w.\ \kappa \vdash \kappa'\}$$
  - Es gilt $w \in L(M) \Leftrightarrow \exists i.\ \exists p \in F.\ \exists u, v \in \Gamma^*.\ (u, p, v) \in K_i^w$
- **Beschreibe DTM zur Erzeugung der K_i^w**

K_0^w			K_1^w						K_2^w					
q_0	$w_1..w_n$	\$	#	$u_1^1\|q_1^1\|v_1^1$	#	$u_1^2\|q_1^2\|v_1^2$	#···#	$u_1^{j_1}\|q_1^{j_1}\|v_1^{j_1}$	\$	#	$u_2^1\|q_1^1\|v_2^1$	#···#	$u_2^{j_2}\|q_2^{j_2}\|v_2^{j_2}$	\$	···

  - Arbeitsband beschreibt alle bisher erzeugten Konfigurationen der NTM
    Die aktuell betrachtete Konfiguration κ wird markiert
  - Lesen: Extrahiere aus κ das gelesene Symbol X und Zustand q der NTM
  - Verarbeiten: Erzeuge aus κ und $\delta(q, X)$ alle Nachfolgekonfigurationen
    Lösche Markierung von κ und markiere nächste Konfiguration auf Band

Jede mögliche Konfiguration der NTM wird von der DTM aufgesucht

Simulation von NTMs ist exponentiell

- **Größe der DTM wächst linear mit Größe der NTM**
  - Zustandsüberführungstabelle wird durch Unterprogramme codiert
  - Berechnung der Nachfolgekonfigurationen auf einem Hilfsband

Simulation von NTMs ist exponentiell

- **Größe der DTM wächst linear mit Größe der NTM**
  - Zustandsüberführungstabelle wird durch Unterprogramme codiert
  - Berechnung der Nachfolgekonfigurationen auf einem Hilfsband
- **Rechenzeit wächst exponentiell**
  - Einzelschritte linear in Größe einer NTM Konfiguation simulierbar
    - Bestimmen einer Nachfolgekonfiguration ist "konstant"
    - Schreiben der Nachfolgekonfiguration linear (zwei Arbeitsbänder)

Simulation von NTMs ist exponentiell

- **Größe der DTM wächst linear mit Größe der NTM**
  - Zustandsüberführungstabelle wird durch Unterprogramme codiert
  - Berechnung der Nachfolgekonfigurationen auf einem Hilfsband
- **Rechenzeit wächst exponentiell**
  - Einzelschritte linear in Größe einer NTM Konfiguation simulierbar
    - Bestimmen einer Nachfolgekonfiguration ist "konstant"
    - Schreiben der Nachfolgekonfiguration linear (zwei Arbeitsbänder)

  Aber ...
  - Rechenzeit der NTM ist Länge des kürzesten akzeptierenden Pfades
  - Bei k Alternativen pro Schritt muß die Simulation für n Schritte der NTM im schlimmsten Fall bis zu k^n Konfigurationen erzeugen

Satz: $L \in \mathcal{L}_0 \;\Rightarrow\; L$ semi-entscheidbar

Zu jeder Grammatik $G = (V, T, P, S)$ kann eine NTM M konstruiert werden mit $L(G) = L(M)$

1. **Schreibe die Eingabe w auf Hilfsband 1**
2. **Schreibe das Startsymbol S auf Hilfsband 2**
3. **Simuliere eine Regelanwendung in G**
   - Wähle nichtdeterministisch ein Teilwort u des Wortes auf Band 2
   - Wähle nichtdeterministisch eine Regel der Form $u{\rightarrow}v$ aus P
   - Verschiebe Symbole, die rechts von u stehen, um $|v| - |u|$ Stellen
   - Ersetze u durch v
4. **Vergleiche w mit dem Wort auf Hilfsband 2**
   - Akzeptiere w, wenn die Worte gleich sind
   - Ansonsten fahre fort mit 3.

Korrektheit der Konstruktion

- **M simuliert Ableitbarkeit in G**
  - Nach i Schritten steht auf Band 2 ein Wort w_i mit $S \xrightarrow{i}_G w_i$
  - Wenn M das Wort w nach i Schritten akzeptiert, dann gilt $w = w_i$

Korrektheit der Konstruktion

- **M simuliert Ableitbarkeit in G**
  – Nach i Schritten steht auf Band 2 ein Wort w_i mit $S \xrightarrow{i}_G w_i$
  – Wenn M das Wort w nach i Schritten akzeptiert, dann gilt $w = w_i$
- **M akzeptiert $L(G)$**
  – Es gilt $w \in L(G) \Leftrightarrow \exists i.\, S \xrightarrow{i}_G w$
  – Wenn M das Wort w nach i Schritten akzeptiert, dann gilt $S \xrightarrow{i}_G w$, also $w \in L(G)$
  – Wenn $S \xrightarrow{i}_G w$ gilt, dann kann M in i Schritten das Wort w auf Band 2 erzeugen und akzeptieren, also $w \in L(M)$

Korrektheit der Konstruktion

- **M simuliert Ableitbarkeit in G**
  - Nach i Schritten steht auf Band 2 ein Wort w_i mit $S \xrightarrow{i}_G w_i$
  - Wenn M das Wort w nach i Schritten akzeptiert, dann gilt $w = w_i$
- **M akzeptiert $L(G)$**
  - Es gilt $w \in L(G) \Leftrightarrow \exists i.\ S \xrightarrow{i}_G w$
  - Wenn M das Wort w nach i Schritten akzeptiert, dann gilt $S \xrightarrow{i}_G w$, also $w \in L(G)$
  - Wenn $S \xrightarrow{i}_G w$ gilt, dann kann M in i Schritten das Wort w auf Band 2 erzeugen und akzeptieren, also $w \in L(M)$
- **M terminiert nicht immer**
  - Für $w \notin L(G)$ gilt $w \neq w_i$ für alle i

SATZ: L SEMI-ENTSCHEIDBAR $\Rightarrow$ $L \in \mathcal{L}_0$

Simuliere Abarbeitung der Turingmaschine

- **Idee: Generiere alle Konfigurationen von M**
  - Konfigurationen (u,q,v) werden als Wörter uqv codiert
  - Begrenzer # trennt Eingabe w von Konfigurationen
  - Verarbeitung von w simuliert durch Wörter der Form $w \# uqv \#$
- **Beschreibe Konfigurationsübergänge durch Regeln**
  - Regeln simulieren Vorschriften für Erzeugung von $\vdash$ aus δ
- **Lege w frei, wenn M akzeptiert hat**
  - Entferne Wort nach #, wenn M einen Endzustand erreicht
- **Grammatik erzeugt von M akzeptierte Sprache**
  - $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F.\, \exists u, v \in \Gamma^*.\ (\epsilon, q_0, w) \overset{*}{\vdash} (u, p, v)\} = L(M)$

Regeln der Grammatik G

- **Erzeugung von Anfangskonfigurationen**
  - Regeln zur Erzeugung aller Wörter der Form $w \# q_0 w \#$

Regeln der Grammatik G

- **Erzeugung von Anfangskonfigurationen**
  – Regeln zur Erzeugung aller Wörter der Form $w \, \# \, q_0 w \, \#$
- **Simulation der Konfigurationsübergänge**
  – Regeln der Form $q\,X\,V \mapsto Y\,p\,V$ für $V \in \Gamma$, $\delta(q,X) = (p,Y,R)$
  – Regeln der Form $q\,X\,\# \mapsto Y\,p\,B\,\#$ für $\delta(q,X) = (p,Y,R)$
  – Regeln der Form $Z\,q\,X \mapsto p\,Z\,Y$ für $Z \in \Gamma$, $\delta(q,X) = (p,Y,L)$
  – Regeln der Form $\#\,q\,X \mapsto \#\,p\,B\,Y$ für $\delta(q,X) = (p,Y,L)$

Regeln der Grammatik G

- **Erzeugung von Anfangskonfigurationen**
  – Regeln zur Erzeugung aller Wörter der Form $\boldsymbol{w}\ \#\ \boldsymbol{q_0 w}\ \#$
- **Simulation der Konfigurationsübergänge**
  – Regeln der Form $q\,X\,V \mapsto Y\,p\,V$ für $V\in\Gamma,\ \delta(q,X)=(p,Y,R)$
  – Regeln der Form $q\,X\,\# \mapsto Y\,p\,B\,\#$ für $\delta(q,X)=(p,Y,R)$
  – Regeln der Form $Z\,q\,X \mapsto p\,Z\,Y$ für $Z\in\Gamma,\ \delta(q,X)=(p,Y,L)$
  – Regeln der Form $\#\,q\,X \mapsto \#\,p\,B\,Y$ für $\delta(q,X)=(p,Y,L)$
- **Schlußregeln für Endzustände**
  – Regeln der Form $Z\,q \mapsto q$ für $Z\in\Gamma,\ q\in F$
  – Regeln der Form $q\,Z \mapsto q$ für $Z\in\Gamma,\ q\in F$
  – Regeln der Form $\#\,q\,\# \mapsto \epsilon$ für $q\in F$

Regeln der Grammatik G

- **Erzeugung von Anfangskonfigurationen**
  - Regeln zur Erzeugung aller Wörter der Form $\boldsymbol{w}\;\#\;\boldsymbol{q_0 w}\;\#$
- **Simulation der Konfigurationsübergänge**
  - Regeln der Form $q\,X\,V \mapsto Y\,p\,V$ für $V \in \Gamma,\ \delta(q,X) = (p,Y,R)$
  - Regeln der Form $q\,X\,\# \mapsto Y\,p\,B\,\#$ für $\delta(q,X) = (p,Y,R)$
  - Regeln der Form $Z\,q\,X \mapsto p\,Z\,Y$ für $Z \in \Gamma,\ \delta(q,X) = (p,Y,L)$
  - Regeln der Form $\#\,q\,X \mapsto \#\,p\,B\,Y$ für $\delta(q,X) = (p,Y,L)$
- **Schlußregeln für Endzustände**
  - Regeln der Form $Z\,q \mapsto q$ für $Z \in \Gamma,\ q \in F$
  - Regeln der Form $q\,Z \mapsto q$ für $Z \in \Gamma,\ q \in F$
  - Regeln der Form $\#\,q\,\# \mapsto \epsilon$ für $q \in F$

Detailbeweise z.B. in Erk-Priese, Seite 199–201

LBAs sind Maschinenmodell für Typ-1 Sprachen

$$\mathcal{L}_1 = \{L \mid L = L(M) \text{ für einen LBA } M\}$$

- **Beweise für $\mathcal{L}_0$ können modifiziert werden**

LBAs sind Maschinenmodell für Typ-1 Sprachen

$\mathcal{L}_1$ = $\{L \mid L = L(M)$ **für einen LBA** $M\ \}$

- **Beweise für $\mathcal{L}_0$ können modifiziert werden**
- **Typ-1 Grammatik $\longrightarrow$ LBA**

  Turingmaschine simuliert Anwendung der Produktionsregeln

  – Ableitbare Wörter werden schrittweise erzeugt und mit w verglichen

  – Beschränkung der Simulation auf Regelanwendungen, die Wörter mit maximaler Länge $|w|$ erzeugen

  Maschine ist linear beschränkter Automat

  – Linkes und rechtes Ende des Bandes wird niemals überschritten

  – Lineare Simulation der Hilfsbänder mit größerem Bandalphabet

LBAs sind Maschinenmodell für Typ-1 Sprachen

$\mathcal{L}_1$ = $\{L \mid L = L(M)$ **für einen LBA** $M\}$

- **Beweise für $\mathcal{L}_0$ können modifiziert werden**
- **Typ-1 Grammatik $\longrightarrow$ LBA**

  Turingmaschine simuliert Anwendung der Produktionsregeln

  – Ableitbare Wörter werden schrittweise erzeugt und mit w verglichen

  – Beschränkung der Simulation auf Regelanwendungen, die Wörter mit maximaler Länge $|w|$ erzeugen

  Maschine ist linear beschränkter Automat

  – Linkes und rechtes Ende des Bandes wird niemals überschritten

  – Lineare Simulation der Hilfsbänder mit größerem Bandalphabet
- **LBA $\longrightarrow$ Typ-1 Grammatik**

  – LBA muß bei Eingabe w das Band nicht mehr erweitern

  – Simuliere Verarbeitung der Eingabe w mit Wörtern der Form $(w_1, u_1)..(w_i, u_i)(w_{i+1}, q)(w_{i+1}, v_1)..(w_n, v_j)$ statt $w \# uqv \#$

  – Kürzende Grammatikregeln können jetzt expansiv formuliert werden

Nachweis der Abschlusseigenschaften

Beweisführung mit Grammatiken

- **Vereinigung $L_1 \cup L_2$**
  - Sei $L_i = L(G_i)$, wobei $G_i = (V_i, T_i, P_i, S_i)$ disjunkt
  - Wähle $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}, S)$
  - Die Eigenschaften der G_i bleiben erhalten und es gilt $L(G) = L_1 \cup L_2$

Nachweis der Abschlusseigenschaften

Beweisführung mit Grammatiken

- **Vereinigung $L_1 \cup L_2$**
  - Sei $L_i = L(G_i)$, wobei $G_i = (V_i, T_i, P_i, S_i)$ disjunkt
  - Wähle $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}, S)$
  - Die Eigenschaften der G_i bleiben erhalten und es gilt $L(G) = L_1 \cup L_2$
- **Spiegelung L^R**
  - Bilde Spiegelgrammatik zu $G = (V, T, P, S)$ mit $L = L(G)$
    - Setze $\boldsymbol{G_R} = (V, T, P_R, S)$ mit $\boldsymbol{P_R} = \{l^R \to \alpha^R \mid l \to \alpha \in P\}$
  - Die Eigenschaften von G bleiben erhalten und es gilt $L(G_R) = L^R$

Nachweis der Abschlusseigenschaften

Beweisführung mit Grammatiken

- **Vereinigung $L_1 \cup L_2$**
  – Sei $L_i = L(G_i)$, wobei $G_i = (V_i, T_i, P_i, S_i)$ disjunkt
  – Wähle $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\}, S)$
  – Die Eigenschaften der G_i bleiben erhalten und es gilt $L(G) = L_1 \cup L_2$
- **Spiegelung L^R**
  – Bilde Spiegelgrammatik zu $G = (V, T, P, S)$ mit $L = L(G)$
    · Setze $\boldsymbol{G_R} = (V, T, P_R, S)$ mit $\boldsymbol{P_R} = \{l^R \rightarrow \alpha^R \mid l \rightarrow \alpha \in P\}$
  – Die Eigenschaften von G bleiben erhalten und es gilt $L(G_R) = L^R$
- **Analoge Beweise für $L_1 \circ L_2$, L^*, $h(L)$**
  – Verzweige aus Startsymbol oder modifiziere rechte Seite der Regeln

Nachweis der Abschlusseigenschaften

Beweisführung mit Grammatiken

- **Vereinigung $L_1 \cup L_2$**
  - Sei $L_i = L(G_i)$, wobei $G_i = (V_i, T_i, P_i, S_i)$ disjunkt
  - Wähle $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}, S)$
  - Die Eigenschaften der G_i bleiben erhalten und es gilt $L(G) = L_1 \cup L_2$
- **Spiegelung L^R**
  - Bilde Spiegelgrammatik zu $G = (V, T, P, S)$ mit $L = L(G)$
    - Setze $\boldsymbol{G_R} = (V, T, P_R, S)$ mit $\boldsymbol{P_R} = \{l^R \to \alpha^R \mid l \to \alpha \in P\}$
  - Die Eigenschaften von G bleiben erhalten und es gilt $L(G_R) = L^R$
- **Analoge Beweise für $L_1 \circ L_2$, L^*, $h(L)$**
  - Verzweige aus Startsymbol oder modifiziere rechte Seite der Regeln
- **Grammatiken helfen wenig bei Entscheidbarkeit**
  - Beweisführung mit Turingmaschinen ist sinnvoller

Nachweis der Abschlusseigenschaften

- **Vereinigung $L_1 \cup L_2$**
  - Sei $L_i = L(M_i)$, wobei $M_i = (Q_i, \Sigma_i, \Gamma_i, \delta_i, q_{0,i}, B, F_i)$ disjunkt
  - Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 auf den beiden Bändern
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 oder M_2 akzeptieren
  - Die Eigenschaften der M_i bleiben erhalten und es gilt $L(M) = L_1 \cup L_2$

Nachweis der Abschlusseigenschaften

- **Vereinigung $L_1 \cup L_2$**
  - Sei $L_i = L(M_i)$, wobei $M_i = (Q_i, \Sigma_i, \Gamma_i, \delta_i, q_{0,i}, B, F_i)$ disjunkt
  - Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 auf den beiden Bändern
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 oder M_2 akzeptieren
  - Die Eigenschaften der M_i bleiben erhalten und es gilt $L(M)=L_1 \cup L_2$
- **Durchschnitt $L_1 \cap L_2$**
  - Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 auf den beiden Bändern
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 und M_2 akzeptieren
  - Die Eigenschaften der M_i bleiben erhalten und es gilt $L(M)=L_1 \cap L_2$

Nachweis der Abschlusseigenschaften

- **Vereinigung $L_1 \cup L_2$**
  - Sei $L_i = L(M_i)$, wobei $M_i = (Q_i, \Sigma_i, \Gamma_i, \delta_i, q_{0,i}, B, F_i)$ disjunkt
  - Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 auf den beiden Bändern
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 oder M_2 akzeptieren
  - Die Eigenschaften der M_i bleiben erhalten und es gilt $L(M) = L_1 \cup L_2$
- **Durchschnitt $L_1 \cap L_2$**
  - Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 auf den beiden Bändern
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 und M_2 akzeptieren
  - Die Eigenschaften der M_i bleiben erhalten und es gilt $L(M) = L_1 \cap L_2$
- **Spiegelung L_1^R**
  - Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort umgedreht auf ein Hilfsband und simuliert M_1 auf diesem Band
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 akzeptiert
  - Die Eigenschaften von M_1 bleiben erhalten und es gilt $L(M) = L_1^R$

Nachweis der Abschlusseigenschaften II

- **Verkettung $L_1 \circ L_2$**
  - Bei Eingabe eines Wortes w wählt M nichtdeterministisch eine Zerlegung das Wort $w = w_1 \circ w_2$, kopiert die w_i auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 entsprechend
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 und M_2 akzeptieren
  - Die Eigenschaften der M_i bleiben erhalten und es gilt $L(M)=L_1 \circ L_2$

Nachweis der Abschlusseigenschaften II

- **Verkettung $L_1 \circ L_2$**
  - Bei Eingabe eines Wortes w wählt M nichtdeterministisch eine Zerlegung das Wort $w = w_1 \circ w_2$, kopiert die w_i auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 entsprechend
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 und M_2 akzeptieren
  - Die Eigenschaften der M_i bleiben erhalten und es gilt $L(M) = L_1 \circ L_2$
- **Hülle L_1^***
  - Bei Eingabe eines Wortes w wählt M nichtdeterministisch eine Zerlegung des Wortes $w = w_1 \circ .. \circ w_n$, kopiert die w_i der Reihe nach auf ein Hilfsband und simuliert M_1 entsprechend
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 alle w_i akzeptiert
  - Die Eigenschaften von M_1 bleiben erhalten und es gilt $L(M) = L_1^*$

Nachweis der Abschlusseigenschaften II

- **Verkettung $L_1 \circ L_2$**
  - Bei Eingabe eines Wortes w wählt M nichtdeterministisch eine Zerlegung das Wort $w = w_1 \circ w_2$, kopiert die w_i auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 entsprechend
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 und M_2 akzeptieren
  - Die Eigenschaften der M_i bleiben erhalten und es gilt $L(M) = L_1 \circ L_2$
- **Hülle L_1^***
  - Bei Eingabe eines Wortes w wählt M nichtdeterministisch eine Zerlegung des Wortes $w = w_1 \circ .. \circ w_n$, kopiert die w_i der Reihe nach auf ein Hilfsband und simuliert M_1 entsprechend
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 alle w_i akzeptiert
  - Die Eigenschaften von M_1 bleiben erhalten und es gilt $L(M) = L_1^*$
- **Homomorphismen $h(L_1)$**
  - Bei Eingabe eines Wortes w wählt M nichtdeterministisch eine Zerlegung das Wort $w = w_1 \circ .. \circ w_n$ mit $w_i = h(a_i)$, kopiert $v = a_1..a_n$ auf ein Hilfsband und simuliert M_1 entsprechend
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 das Wort v akzeptiert
  - Die Eigenschaften von M_1 bleiben erhalten und es gilt $L(M) = h(L_1)$

Nachweis der Abschlusseigenschaften III

- **Inverse Homomorphismen $h^{-1}(L_1)$**
  - Bei Eingabe eines Wortes $w = a_1..a_n$ bestimmt M das Wort $v = h(a_1)..h(a_n)$, kopiert es auf ein Hilfsband und simuliert M_1
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 das Wort v akzeptiert
  - Es gilt $L(M)$=$h^{-1}(L_1)$
  - Beweis gilt in dieser Form nur für (semi-)entscheidbare Sprachen
    Für LBA's ist Simulation eines Bandes k-facher Länge erforderlich

Nachweis der Abschlusseigenschaften III

- **Inverse Homomorphismen $h^{-1}(L_1)$**
  - Bei Eingabe eines Wortes $w = a_1..a_n$ bestimmt M das Wort $v = h(a_1)..h(a_n)$, kopiert es auf ein Hilfsband und simuliert M_1
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 das Wort v akzeptiert
  - Es gilt $L(M)$=$h^{-1}(L_1)$
  - Beweis gilt in dieser Form nur für (semi-)entscheidbare Sprachen
    Für LBA's ist Simulation eines Bandes k-facher Länge erforderlich
- **Komplement $\overline{L_1}$**
  - Bei Eingabe eines Wortes w simuliert M die Berechnung von M_1 und akzeptiert genau dann, wenn M_1 nicht akzeptiert
  - Es gilt $L(M)$=$\overline{L_1}$
  - Die Eigenschaften von M_1 bleiben nur erhalten, wenn M_1 terminiert
    Bei semi-entscheidbaren Sprachen terminiert die Berechnung für $w \in \overline{L_1}$ nicht

Nachweis der Abschlusseigenschaften III

- **Inverse Homomorphismen $h^{-1}(L_1)$**
  - Bei Eingabe eines Wortes $w = a_1..a_n$ bestimmt M das Wort $v = h(a_1)..h(a_n)$, kopiert es auf ein Hilfsband und simuliert M_1
  - M akzeptiert genau dann, wenn M_1 das Wort v akzeptiert
  - Es gilt $L(M)=h^{-1}(L_1)$
  - Beweis gilt in dieser Form nur für (semi-)entscheidbare Sprachen
    Für LBA's ist Simulation eines Bandes k-facher Länge erforderlich
- **Komplement $\overline{L_1}$**
  - Bei Eingabe eines Wortes w simuliert M die Berechnung von M_1 und akzeptiert genau dann, wenn M_1 nicht akzeptiert
  - Es gilt $L(M)=\overline{L_1}$
  - Die Eigenschaften von M_1 bleiben nur erhalten, wenn M_1 terminiert
    Bei semi-entscheidbaren Sprachen terminiert die Berechnung für $w \in \overline{L_1}$ nicht
- **Differenz L_1-L_2**
  - Mathematische Begründung: L_1-L_2 = $L_1 \cap \overline{L_2}$
  - Abgeschlossenheit unter Differenz gilt für aufzählbare Sprachen nicht!

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

- **L entscheidbar $\Leftrightarrow$ L und $\overline{L}$ semi-entscheidbar**

  "$\Rightarrow$": Entscheidbare Sprachen sind abgeschlossen unter Komplement

  "$\Leftarrow$": Sei $L{=}L(M_1)$ und $\overline{L}{=}L(M_2)$.

  – Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 auf den beiden Bändern

  – M akzeptiert genau dann, wenn M_1 akzeptiert und terminiert ohne zu akzeptieren, wenn M_2 akzeptiert

  – Da eine der beiden Maschinen das Wort w akzeptieren muß, terminiert M und es gilt $L(M){=}L$

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

- **L entscheidbar $\Leftrightarrow$ L und $\overline{L}$ semi-entscheidbar**

  "$\Rightarrow$": Entscheidbare Sprachen sind abgeschlossen unter Komplement

  "$\Leftarrow$": Sei $L{=}L(M_1)$ und $\overline{L}{=}L(M_2)$.

  – Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 auf den beiden Bändern

  – M akzeptiert genau dann, wenn M_1 akzeptiert und terminiert ohne zu akzeptieren, wenn M_2 akzeptiert

  – Da eine der beiden Maschinen das Wort w akzeptieren muß, terminiert M und es gilt $L(M){=}L$

- **Jede endliche Sprache L ist entscheidbar**

  – Jede endliche Sprache ist als Liste von Wörtern $[w_1; ..; w_n]$ darstellbar

  – Bei Eingabe eines Wortes w vergleicht M das Wort mit dieser Liste

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

- **L entscheidbar $\Leftrightarrow$ L und $\overline{L}$ semi-entscheidbar**

  "$\Rightarrow$": Entscheidbare Sprachen sind abgeschlossen unter Komplement

  "$\Leftarrow$": Sei L=$L(M_1)$ und $\overline{L}$=$L(M_2)$.

  – Bei Eingabe eines Wortes w kopiert M das Wort auf zwei Hilfsbänder und simuliert M_1 und M_2 auf den beiden Bändern

  – M akzeptiert genau dann, wenn M_1 akzeptiert und terminiert ohne zu akzeptieren, wenn M_2 akzeptiert

  – Da eine der beiden Maschinen das Wort w akzeptieren muß, terminiert M und es gilt $L(M)$=L

- **Jede endliche Sprache L ist entscheidbar**

  – Jede endliche Sprache ist als Liste von Wörtern $[w_1; ..; w_n]$ darstellbar

  – Bei Eingabe eines Wortes w vergleicht M das Wort mit dieser Liste

- **L semi-entscheidbar $\Leftrightarrow$ es gibt ein entscheidbares $L' \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ mit $L = \{w \mid \exists v.\, (w,v) \in L'\}$** (Projektionssatz)

  – Aufwendiger Beweis, benötigt schrittweise Simulation von Maschinen