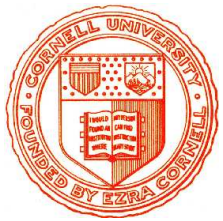
Kryptographie und Komplexität

Einheit 2.3



One-Time Pads und Perfekte Sicherheit

1. Perfekte Geheimhaltung
2. One-Time Pads
3. Strombasierte Verschlüsselung

Wie sicher kann ein Verfahren werden?

- **Ziel ist (nahezu) perfekte Sicherheit**
  - Klartext eines Schlüsseltextes ist ohne Schlüssel niemals zu ermitteln auch wenn Angreifer beliebig viel Zeit und Rechnerkapazität hat
- **Wie präzisiert man perfekte Sicherheit?**
  - Schlüsseltext enthält keine Information über zugehörigen Klartext
    - Jeder mögliche Klartext könnte zu diesem Schlüsseltext passen
    - Zugehörige Schlüssel sind alle gleich wahrscheinlich
    - Eve kann nicht wissen, welcher Schlüssel tatsächlich benutzt wurde
  - Keine Frage der Komplexität sondern des Informationsgehalts
  - Präzisierung benötigt Wahrscheinlichkeits- und Informationstheorie
- **Kann perfekte Sicherheit erreicht werden?**
  - Möglich wenn Schlüssel perfekt zufällig und so groß wie Klartext
  - Unrealistischer Aufwand – reale Verfahren sind niemals perfekt

Mathematik: Wahrscheinlichkeitstheorie

- **Ereignis**
  - Menge möglicher Ergebnisse eines Zufallsexperimentes
    z.B. Erstes Symbol eines Textes ist ein `Y`: $E = \{\texttt{Y}\}$
    Würfel zeigt eine ungerade Zahl: $E = \{1, 3, 5\}$
  - Menge S aller möglichen Ergebnisse (Elementarereignisse) nicht leer
  - Sicheres Ereignis: $E = S$ (z.B. Würfel zeigt Zahl zwischen 1 und 6)
  - Leeres Ereignis: $E = \emptyset$ (z.B. Würfel zeigt eine Zahl größer als 6)
  - Ereignisse A und B schließen sich gegenseitig aus, wenn $A \cap B = \emptyset$
- **Wahrscheinlichkeitsverteilung auf S**
  - Abbildung $Pr : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$, die jedem Ereignis eine Zahl zuordnet mit
    - $0 \leq Pr(E) \leq 1$ für alle $E \subseteq S$
    - $Pr(\emptyset) = 0$ und $Pr(S) = 1$
    - $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B)$, falls A und B sich ausschließen
  - $Pr(E)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E

Mathematik: Wahrscheinlichkeitstheorie (II)

- **Eigenschaften von (diskreten) Wahrscheinlichkeiten**
  - $Pr(A) \leq Pr(B)$, falls $A \subseteq B$
  - $Pr(S \setminus A) = 1 - Pr(A)$
  - $Pr(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} Pr(A_i)$, falls alle A_i sich paarweise ausschließen
  - $Pr(A) = \sum_{a \in A} Pr(a)$, für alle $A \subseteq S$ ($Pr(a)$ steht kurz für $Pr(\{a\})$)
  - Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind durch die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse eindeutig definiert
- **Gleichverteilung**
  - Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $Pr(a) = Pr(b)$ für alle $a, b \in S$
  - Für endliche Mengen S ist $Pr(a) = 1/|S|$ und $Pr(A) = |A|/|S|$
    - z.B. perfekte Würfel: $Pr(i) = 1/6$ für alle $i \in \{1..6\}$
  - Verteilung von Buchstaben im Text ist keine Gleichverteilung

Mathematik: Wahrscheinlichkeitstheorie (III)

- **Bedingte Wahrscheinlichkeit $Pr(A|B)$**
  - Wahrscheinlichkeit, daß Ereignis A auftritt, wenn B bekannt ist
    z.B. Wahrscheinlichkeit des Klartextes x, wenn Schlüsseltext y vorliegt
    $\boldsymbol{Pr(A|B)} = Pr(A \cap B)/Pr(B)$
  - Wahrscheinlichkeit, daß Würfel eine 4 zeigt, wenn sicher ist,
    daß die angezeigte Zahl gerade ist, ist 1/3
  - Wahrscheinlichkeit, daß Klartext einer Verschiebechiffre `ENDE` ist,
    wenn Schlüsseltext `ABCD` vorliegt, ist 0
- **Unabhängigkeit von Ereignissen A und B**
  - $Pr(A|B) = Pr(A)$: Wahrscheinlichkeit für A hängt nicht von B ab
    z.B. Ergebnis eines zweiten Würfelns hängt nicht vom ersten Wurf ab
  - Äquivalent zu $Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B)$
  - Die Wahrscheinlichkeit, daß mehrere unabhängige Ereignisse
    gleichzeitig auftreten, ist das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten

Mathematik: Wahrscheinlichkeitstheorie (IV)

- **Satz von Bayes:**
  - $\boldsymbol{Pr(B|A) = Pr(B)Pr(A|B)/Pr(A)}$, falls $Pr(A) > 0$

    Einfache Rechnung: $Pr(B|A) = Pr(B \cap A)/Pr(A) = Pr(B)Pr(A|B)/Pr(A)$
  - Wahrscheinlichkeit eines Klartextes x bei Vorliegen des Schlüsseltextes y ergibt sich aus Wahrscheinlichkeit, daß x zu y verschlüsselt wird
- **Geburtstagsparadox**
  - Wieviele Personen benötigt man in einem Raum, damit mit großer Wahrscheinlichkeit zwei am gleichen Tag Geburtstag haben? 180? 100? 50?
  - Wieviele Klartext-/Schlüsselpaare braucht man, um mit hoher Wahrscheinlichkeit mehrmals denselben Schlüsseltext zu generieren?

  Analyse: bei k Personen, n Geburtstagen gibt es n^k Elementarereignisse $(g_1, .., g_k) \in \{1..n\}^k$ mit Wahrscheinlichkeit $1/n^k$

  Die Wahrscheinlichkeit p, daß alle g_i verschieden sind, ist $\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)/n^k$

  Wegen $1 + x \leq e^x$ ist p maximal $e^{\sum_{i=0}^{k-1}(-i/n)} = e^{-k(k-1)/(2n)}$

  Für $k \geq 1/2+\sqrt{1/4+2n \cdot ln2} = 22.9999$ ist $p \leq 1/2$ (Für $k \geq 42$ ist $p \leq 0.1$!)

  Mit Wahrscheinlichkeit 50% haben 2 von 23 Personen denselben Geburtstag

Perfekte Geheimhaltung präzisiert

- **Informationsgehalt von Nachrichten**
  - $\boldsymbol{Pr_{\mathcal{P}}}$: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Klartexte
    Abhängig von Sprache und Thematik (Bank, Uni, Militär,..)
  - $\boldsymbol{Pr_{\mathcal{K}}}$: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Schlüssel
    Unabhängig von $Pr_{\mathcal{P}}$ aber ggf. abhängig von verwendetem System
  - $\boldsymbol{Pr(x,K)} := Pr_{\mathcal{P}}(x)Pr_{\mathcal{K}}(K)$
    Wahrscheinlichkeit der Verschlüsselung von $x \in \mathcal{P}$ mit $K \in \mathcal{K}$
    Spezialfälle: $\boldsymbol{Pr(x)} := Pr(x,\mathcal{K})$, $\boldsymbol{Pr(K)} := Pr(\mathcal{P},K)$
  - $\boldsymbol{Pr(y)} := Pr(\{(x,K) \mid e_K(x)=y\}) = \sum_{K\in\mathcal{K}} Pr(d_K(y))Pr(K)$
    Wahrscheinlichkeit, daß eine Verschlüsselung den Schlüsseltext y ergibt
- **Perfekte Geheimhaltung eines Kryptosystems**
  - Kein Schlüsseltext sagt etwas über den zugehörigen Klartext aus
    Mathematisch: Für alle $x \in \mathcal{P}, y \in \mathcal{C}$ ist $Pr(x|y) = Pr(x)$
    Mit dem Satz von Bayes auch: $Pr(y) = Pr(y|x) = Pr(\{K|e_K(x)=y\})$

Ein einfaches Beispielsystem

Wahrscheinlichkeiten und Verschlüsselung durch Tabelle gegeben

$Pr_{\mathcal{C}} \backslash Pr_{\mathcal{K}}$		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
		.2	.4	.1	.2	.1
A	.2	1	2	3	4	5
B	.5	2	3	4	6	1
C	.2	3	4	6	5	2
D	.1	4	5	1	2	3

$\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$,
$\mathcal{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\mathcal{K} = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5\}$l

Schlüsselwahrscheinlichkeit unabhängig von Klartextwahrscheinlichkeit

– Wahrscheinlichkeiten der Schlüsseltexte:
  · $Pr(1) = Pr(\{(A, K_1), (B, K_5), (D, K_3)\}) = .04 + .05 + .01 = .10$
  · $Pr(2)..Pr(6) = .22,\ .27,\ .19,\ .10,\ .12$

– Wahrscheinlichkeiten der Klartexte bei bekannten Schlüsseltexten:
  · $Pr(A|1) = Pr(\{(A, 1)\})/Pr(1) = .04/.10 = .40$
  · $Pr(B|1)..Pr(D|1) = .50,\ .00,\ .10$
  · $Pr(A|2)..Pr(D|2) = .364\,(8/22),\ .454,\ .091,\ .091$

Keine perfekte Geheimhaltung, da i.a. $Pr(x|y) \neq Pr(x)$

Perfekt sichere Kryptosysteme

- **Die Verschiebechiffre ist perfekt geheim**

  .. aber nur, wenn jeder Schlüssel mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommt und das Chiffrierverfahren für jeden Buchstaben neu gestartet wird

- **Beweis:**

  – Wegen $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \mathbb{Z}_{27}$ gilt für jedes $x \in \mathcal{P}, y \in \mathcal{C}$

  $Pr(y|x) = Pr(\{K|x+_nK=y\}) = Pr(\{K|y-_nx=K\}) = Pr(y-_nx) = 1/27$ und

  $Pr(y) = \sum_{K \in \mathcal{K}} Pr(d_K(y))Pr(K) = \sum_{K \in \mathcal{K}} Pr(y-_nK)/27$

  $= \sum_{x \in \mathcal{P}} Pr(x)/27 = 1/27$

  – Da beide Werte gleich sind, ist die Verschiebechiffre perfekt sicher selbst wenn keine Gleichverteilung der Klartexte vorliegt

- **Was sind die Kernargumente des Beweises?**

  – $Pr(y|x)$: Für alle $x \in \mathcal{P}, y \in \mathcal{C}$ gibt es genau einen Schlüssel mit $e_K(x)=y$

  – $Pr(y)$: $Pr(K)$ ist eine Konstante (Schlüssel sind gleichverteilt)

  – Klartext- und Schlüsselmenge sind gleich groß und endlich

Perfekte Sicherheit: Der Satz von Shannon

Ein Kryptosystem mit $|\mathcal{K}|=|\mathcal{P}|=|\mathcal{C}|<\infty$ und $Pr(x)>0$ für alle $x\in\mathcal{P}$ ist genau dann perfekt geheim, wenn die Schlüssel gleichverteilt sind und für alle $x\in\mathcal{P}$, $y\in\mathcal{C}$ genau ein Schlüssel $K\in\mathcal{K}$ mit $e_K(x)=y$ existiert

$\Rightarrow$: Wir nehmen an, das Kryptosystem sei perfekt geheim

- Gäbe es für ein $x\in\mathcal{P}, y\in\mathcal{C}$ keinen Schlüssel $K\in\mathcal{K}$ mit $e_K(x)=y$, dann wäre $Pr(x|y)=0\neq Pr(x)$. Also gibt es mindestens ein K mit $e_K(x)=y$
  Wegen $|\mathcal{K}| = |\mathcal{C}|$ gibt es dann genau einen Schlüssel mit $e_K(x)=y$
- Sei $K_x(y)$ der eindeutige Schlüssel K mit $e_K(x)=y$
  Wegen $|\mathcal{K}| = |\mathcal{P}|$ gilt $\{K_x(y) \mid x\in\mathcal{P}\} = \mathcal{K}$ für jedes $y\in\mathcal{C}$ und
  $Pr(y) = Pr(y|x) = Pr(\{K|e_K(x)=y\}) = Pr(K_x(y))$ für alle $x\in\mathcal{P}$
  Damit haben alle Schlüssel die gleiche Wahrscheinlichkeit

$\Leftarrow$: Wir zeigen die Umkehrung

- Es gilt $Pr(y|x) = Pr(\{K|e_K(x)=y\}) = Pr(K_x(y)) = 1/|\mathcal{K}|$
  und $\quad Pr(y) = \sum_{x\in\mathcal{P}} Pr(x)Pr(K_x(y)) = \sum_{x\in\mathcal{P}} Pr(x)/|\mathcal{K}| = 1/|\mathcal{K}|$
  für alle $x\in\mathcal{P}, y\in\mathcal{C}$. Also ist das Kryptosystem perfekt geheim

One-Time Pads

Perfekte Geheimhaltung mit großem Aufwand

- **Einfaches Verschlüsselungsverfahren** (©Vernam, 1917)
  - Bei n-bit Texten wähle $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \{0,1\}^n = \mathbb{Z}_2^n$
  - Ver-/entschlüssele bitweise: $\boldsymbol{e_K(x)} = x \oplus K$, $\boldsymbol{d_K(y)} = y \oplus K$
  - Schlüssel werden zufällig (mit Gleichverteilung) gewählt
  - Perfekte Geheimhaltung folgt aus Satz von Shannon
- **Nicht wirklich praktikabel**
  - Jede neue Nachricht braucht neuen Schlüssel gleicher Größe
    - Wiederverwendung ermöglicht known plaintext Attacke ($K = x \oplus y$)
  - Schlüssel muß separat ausgetauscht werden
    - Hoher Speicheraufwand für Lagerung von Schlüsseln
  - Verwendung wenn Sicherheitsanforderungen hohe Kosten rechtfertigen
- **Wie erzeugt man Zufallszahlen?**
  - Hardware-Zufallsbit Generatoren: physikalische Quellen (Radioaktivität)
  - Software-Zufallsbit Generatoren: Zeit zwischen Keyboardanschlägen
  - Pseudozufallszahlen: algorithmisch erzeugte Zahlen (effizienter)

Strom Chiffren

Systematisch erzeugte "One-Time Pads"

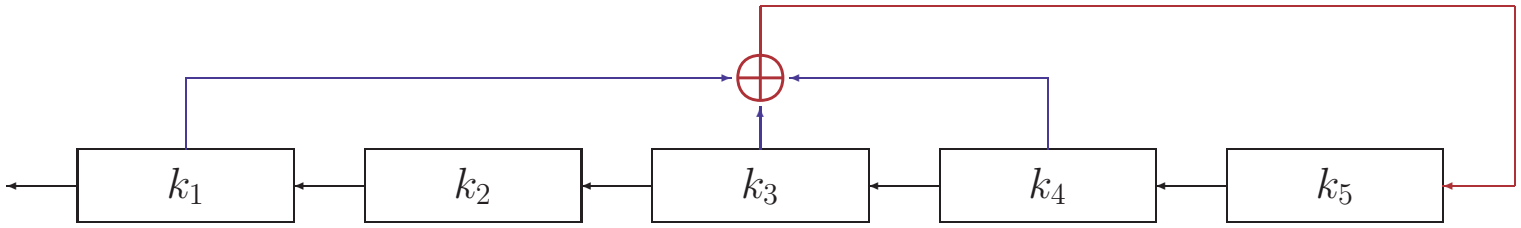
- **Generiere "zufälligen" Schlüsselstrom $k_1 k_2 k_3 \ldots$**
  - Verschlüsselung: $e_K(x_1 x_2 \ldots x_n) = e_{k_1}(x_1) e_{k_2}(x_2) \ldots e_{k_n}(x_n)$
    Entschlüsselung: $d_K(y_1 y_2 \ldots y_n) = d_{k_1}(y_1) d_{k_2}(y_2) \ldots d_{k_n}(y_n)$
  - Schlüssel $k_1..k_n$ wird systematisch aus Anfangsschlüssel K berechnet
- **Berechnung des Schlüsselstroms**
  - Anfangsschlüssel K und bisherige Klartextfragmente können eingehen

    $k_i = f(K, x_1..x_{i-1})$ für eine feste Schlüsselerzeugungsmethode f
  - Alice berechnet $k_1{=}f(K,\epsilon)$, $y_1{=}e_{k_1}(x_1)$, $k_2{=}f(K,x_1)$, $y_2{=}e_{k_2}(x_2)$, ...
    Bob berechnet $k_1{=}f(K,\epsilon)$, $x_1{=}e_{k_1}(y_1)$, $k_2{=}f(K,x_1)$, $x_2{=}e_{k_2}(y_2)$, ...
  - Alice und Bob müssen nur den Anfangsschlüssel K austauschen
    - Schlüsselaustausch erheblich einfacher als bei One-Time Pads
    - Effiziente Ausführung und große Diffusion und Konfusion möglich

Klassifizierung von Strom Chiffren

- **Asynchrone Erzeugung des Schlüsselstroms**
  - Klartext wird in Schlüsselerzeugung mit einbezogen
    z.B. letzter Klartextblock wird Schlüssel für nächsten Block
- **Synchrone Erzeugung des Schlüsselstroms**
  - Keine Abhängigkeit des Schlüsselstroms vom Klartext
  - Schlüsselstrom wird ausschließlich aus Basisschlüssel K erzeugt
    z.B. Fibonaccizahlen modulo n: 1 2 3 5 8 13 21 7 1 8 9 17 26 16 15 ...
- **Periodische Erzeugung des Schlüsselstroms**
  - Teilschlüssel wiederholen sich mit Periode m: $k_{i+m} = k_i$ für alle i
  - Blockchiffren der Länge m sind Schlüsselströme mit Periode m
  - Gewichtete Summe $k_{i+m} = \sum_{j=0}^{m-1} c_j k_{i+j} \bmod n$ der letzten m Schlüssel (mit Anfangsschlüssel $K = k_1..k_m, c_0..c_{m-1}$) kann einen Schlüsselstrom der Periode $n^m - 1$ liefern

LSFR Stromchiffre



- **Verwende Lineares Feedback Shift Register**
  - Periodische Stromchiffre mit Anfangsschlüssel $K = k_1..k_m, c_0..c_{m-1}$
  - In jeder Phase verwende k_1 als aktuellen Schlüssel und berechne $k'_i := k_{i+1}$ (Shift) und $k'_m := \sum_{j=0}^{m-1} c_j k_{j+1} \bmod n$ (Lineares Feedback)
  - Kann für n=2 sehr effizient mit Hardwareregistern realisiert werden
  - Liefert bei guten Anfangsschlüsseln einen Strom der Periode 2^m-1
- **Anwendungsbeispiel**
  - Anfangsschlüssel $K = 10000, 10100$ liefert den Schlüsselstrom 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 ...
  - Anfangsschlüssel $K = 10000, 10110$ liefert den Schlüsselstrom 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 0 ... (Periode 12!)

Autokey Chiffre

Einfacher asynchroner Strom Chiffre

- **Vigenere Chiffre mit "Klartext als Schlüssel"**
  - Wähle $k_1 = K$ (der geheime Schlüssel) und setze $k_{i+1} = x_i$

    $\boldsymbol{e_K(x_i)} = x_i + k_i \bmod n, \quad \boldsymbol{d_K(y_i)} = y_i - k_i \bmod n$
  - `ENDE UM ELF` $\hat{=}$ [4;13;3;4;26;20;12;26;4;11;5]

    liefert mit K=3 [3;4;13;3;4;26;20;12;26;4;11] als Schlüsselstrom

    und ergibt [7;17;16;7;3;19;5;11;3;15;16] $\hat{=}$ `HRQHDTFLDPQ`
- **Relativ sicher gegenüber statistischen Analysen**
  - Regelmäßigkeit des Alphabets wird aufgehoben
  - Brute-Force Attacken durch längere Anfangsschlüssel vermeidbar
    - Wähle $K = k_1..k_m$ und setze $k_{i+m} = x_i$

Wie sicher sind Stromchiffren?

- **Stromchiffren erzeugen beliebig lange Schlüssel**
  - 32-bit Anfangsschlüssel liefern "One-Time Pad" für 500MB Daten
  - Eine wichtige Voraussetzung von Shannons Theorem ist erfüllt
  - Liefern Stromchiffren nahezu perfekte Sicherheit?
- **Große Schlüssel alleine reichen nicht**
  - Stromchiffren erzeugen keinen echten Zufall (keine Gleichverteilung)
  - Stromchiffren können nicht jeden 500MB großen Schlüssel erzeugen
    - Pro Klartext kann es nicht mehr Schlüssel als Anfangsschlüssel geben
    - Es können nicht alle möglichen Schlüsseltexte erzeugt werden
  - Beide Annahmen von Shannons Theorem sind verletzt
- **Stromchiffren können attackiert werden**
  - Schlüssel- enthalten zu viele Regelmäßigkeiten
  - Schlüsseltexte enthalten wertvolle Strukturinformation für Angreifer

Kryptoanalyse der LFSR Stromchiffre

- **Known plaintext Attacke**
  - Zur Bestimmung des Anfangsschlüssels $K = k_1..k_m, c_0..c_{m-1}$ benötigt Eve nur ein Klar-/Schlüsseltextpaar $(x_1..x_{2m}, y_1..x_{2m})$ der Länge $2m$
  - Wegen $y_i = x_i \oplus k_i$ ist $\boldsymbol{k_i = x_i \oplus y_i}$ für alle i leicht zu berechnen
  - Wegen $k_{m+i} := \sum_{j=0}^{m-1} c_j k_{j+i} \bmod 2$ hat Eve m lineare Gleichungen:

    Für $Z := \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_m \\ k_2 & k_3 & \dots & k_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_m & k_{m+1} & \dots & k_{2m-1} \end{pmatrix}$ gilt $(k_{m+1}..k_{2m}) = (c_0..c_{m-1}) \star_2 Z$

    und da Z invertierbar ist, folgt $\boldsymbol{(c_0..c_{m-1}) = (k_{m+1}..k_{2m}) \star_2 Z^{-1}}$
- **Anwendungsbeispiel für $\boldsymbol{m = 3}$**
  - Eve hat Schlüsseltext `1110111111` und Klartext `1011001101`
  - Berechneter Schlüsselstrom ist `010 1110010`
  - Berechne Inverse von $Z := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ als $Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - Es folgt $(c_0, c_1, c_2) = (1, 1, 1) \star_2 Z^{-1} = (1, 1, 0)$

Einfache Kryptosysteme im Rückblick

- **Buchstabenorientierte Systeme**
  - Substitution von Buchstaben durch andere Symbole des Alphabets
  - Mono- und polyalphabetische Variante
  - Anfällig für Brute-Force Attacken oder statistische Analysen
- **Blockbasierte Verschlüsselung**
  - Permutationen und affin-lineare Chiffren
  - Anfällig für known plaintext Attacken mit Matrix-Invertierung
- **Strombasierte Verschlüsselung**
  - Approximation von One-Time Pads durch lange Schlüsselströme macht statistische Analysen nahezu undurchführbar
  - Schlüsselerzeugung mit und ohne Verwendung des Klartextes
  - Zu brechen, wenn Erzeugungsverfahren für Schlüsselstrom bekannt

Keine Sicherheit im Computerzeitalter

Erkenntnisse & Sicherheitsprinzipien

- **Buchstabenorientierte Chiffrierung reicht nicht**
  - Kryptosystem muß große Klartextblöcke auf einmal verschlüsseln
  - Chiffrierung darf nicht affin-linear sein (auch nicht zufällig)
  - Mehrere Klartextblöcke sollten nicht identisch verschlüsselt werden
- **Hohe Diffusion und Konfusion ist wichtig**
  - Annähernde Gleichverteilung der Schlüssel und statistisch geringe Abhängigkeit zwischen Klar- und Schlüsseltext
  - Perfekte Sicherheit bleibt unerreichbar, da One-Time Pads zu teuer
- **Systeme müssen sehr komplex werden**
  - Hohes Maß an Sicherheit gegenüber jeder möglichen Attacke
    - Aufwendige Verschlüsselungsalgorithmen mit großen Schlüsseln
    - Schlüssel dürfen nur mit Hilfe von Zufallsgeneratoren bestimmt werden
  - Ver-/Entschlüsselung nur noch mit Computerunterstützung möglich
    - Große Datenmengen müssen effizient verarbeitet werden können