

Theoretische Informatik I

Einheit 2.2

Nichtdeterministische Automaten

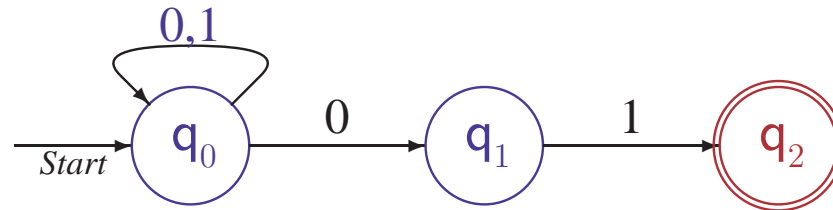


1. Arbeitsweise
2. Akzeptierte Sprache
3. Äquivalenz zu deterministischen Automaten

WAS IST NICHTDETERMISMUS?

- **Verhalten nicht eindeutig bestimmt**

- Automat wählt Folgezustand aus mehreren Möglichkeiten

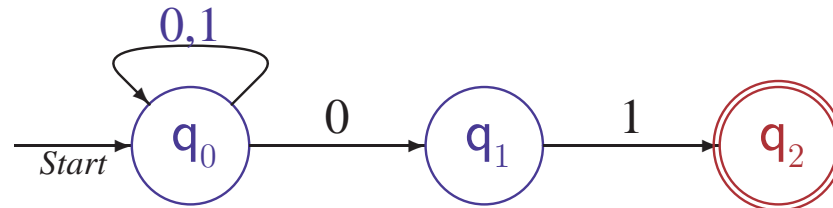


- Automat erkennt Strings, die mit 01 enden
- Eine 0 kann das erste Symbol des Endes 01 sein ... oder auch nicht

WAS IST NICHTDETERMISMUS?

- **Verhalten nicht eindeutig bestimmt**

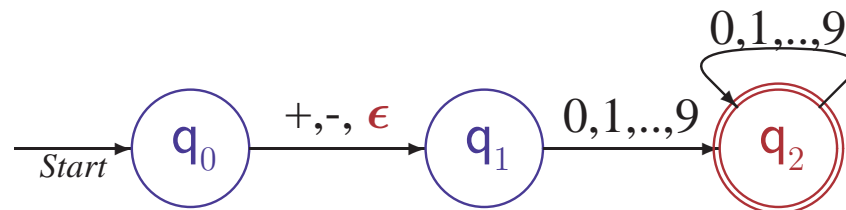
- Automat wählt Folgezustand aus mehreren Möglichkeiten



- Automat erkennt Strings, die mit 01 enden
- Eine 0 kann das erste Symbol des Endes 01 sein ... oder auch nicht

- **Spontane Übergänge zwischen Zuständen**

- Automat geht ohne Eingabe in anderen Zustand über (**ϵ -Übergang**)

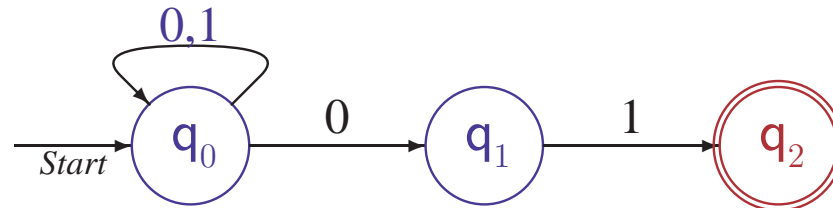


- Automat erkennt ganze Zahlen mit und ohne Vorzeichen

WAS IST NICHTDETERMISMUS?

- **Verhalten nicht eindeutig bestimmt**

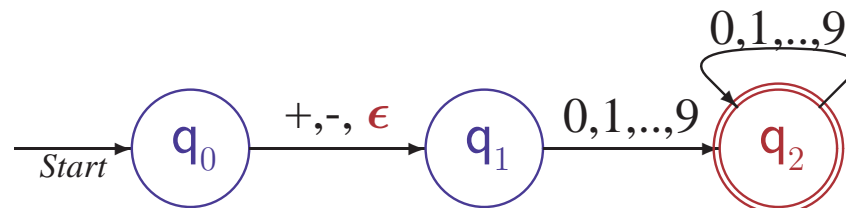
- Automat wählt Folgezustand aus mehreren Möglichkeiten



- Automat erkennt Strings, die mit 01 enden
- Eine 0 kann das erste Symbol des Endes 01 sein ... oder auch nicht

- **Spontane Übergänge zwischen Zuständen**

- Automat geht ohne Eingabe in anderen Zustand über (**ϵ -Übergang**)



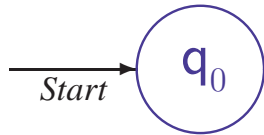
- Automat erkennt ganze Zahlen mit und ohne Vorzeichen

- **Hilfreiches Modell für Entwurfsphase**

- Elegantere Beschreibungsform, leichter als korrekt nachzuweisen
- Begrenzte physikalische Realisierung durch Parallelrechner möglich

- **Elegante Form der Textsuche in Dokumenten**
 - Viele verschiedene Wörter in großen Textsammlungen (Internet)
 - Leichte Beschreibung der Suchanfrage
 - Deterministisches Erkennungsverfahren mühsam zu beschreiben

- **Elegante Form der Textsuche in Dokumenten**
 - Viele verschiedene Wörter in großen Textsammlungen (Internet)
 - Leichte Beschreibung der Suchanfrage
 - Deterministisches Erkennungsverfahren mühsam zu beschreiben
- **Idee: Simultane Verarbeitung von Alternativen**
 - z.B. Suche nach den Wörtern *web* und *ebay* am Ende eines Wortes

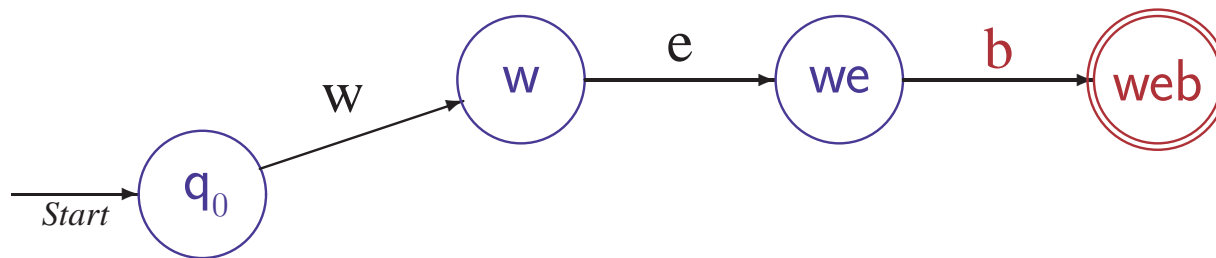


- **Elegante Form der Textsuche in Dokumenten**

- Viele verschiedene Wörter in großen Textsammlungen (Internet)
- Leichte Beschreibung der Suchanfrage
- Deterministisches Erkennungsverfahren mühsam zu beschreiben

- **Idee: Simultane Verarbeitung von Alternativen**

- z.B. Suche nach den Wörtern `web` und `ebay` am Ende eines Wortes



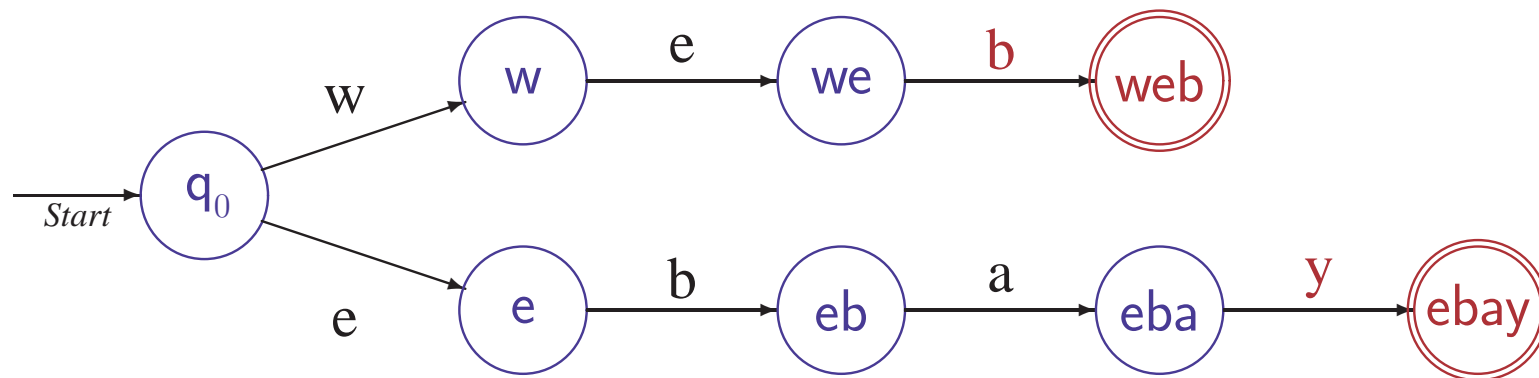
- Ein `w` könnte der Anfang von `web` sein

- **Elegante Form der Textsuche in Dokumenten**

- Viele verschiedene Wörter in großen Textsammlungen (Internet)
- Leichte Beschreibung der Suchanfrage
- Deterministisches Erkennungsverfahren mühsam zu beschreiben

- **Idee: Simultane Verarbeitung von Alternativen**

- z.B. Suche nach den Wörtern `web` und `ebay` am Ende eines Wortes



- Ein `w` könnte der Anfang von `web` sein
- Ein `e` könnte der Anfang von `ebay` sein

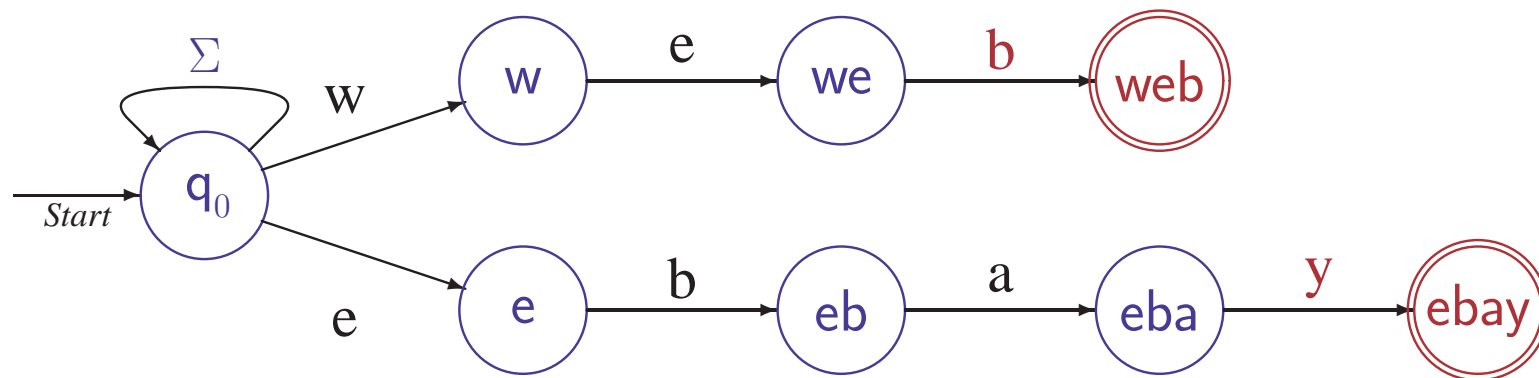
NICHTDETERMINISTISCHE AUTOMATEN – WOZU?

- **Elegante Form der Textsuche in Dokumenten**

- Viele verschiedene Wörter in großen Textsammlungen (Internet)
- Leichte Beschreibung der Suchanfrage
- Deterministisches Erkennungsverfahren mühsam zu beschreiben

- **Idee: Simultane Verarbeitung von Alternativen**

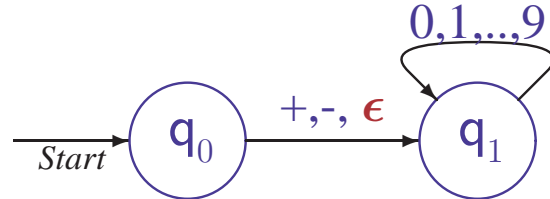
- z.B. Suche nach den Wörtern `web` und `ebay` am Ende eines Wortes



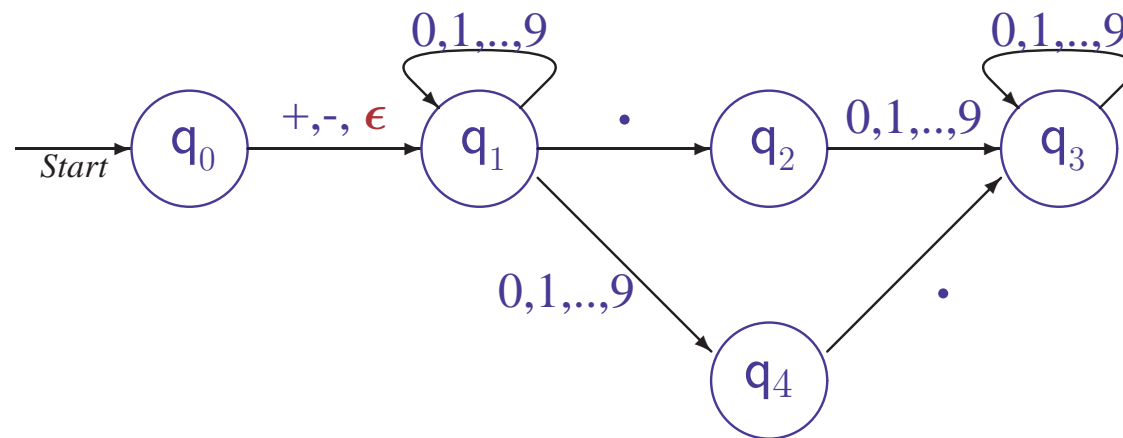
- Ein `w` könnte der Anfang von `web` sein
- Ein `e` könnte der Anfang von `ebay` sein
- Aber vor den Wörtern könnte noch etwas anderes stehen

Nichtdeterminismus $\hat{=}$ verfolge alle Möglichkeiten simultan

- **Erkenne Dezimalzahlen im Programmcode**
 - Zwei Zeichenreihen von Ziffern getrennt durch Dezimalpunkt
 - Eine der beiden Zeichenreihen darf leer sein, aber nicht beide
 - Optionales Vorzeichen + oder -



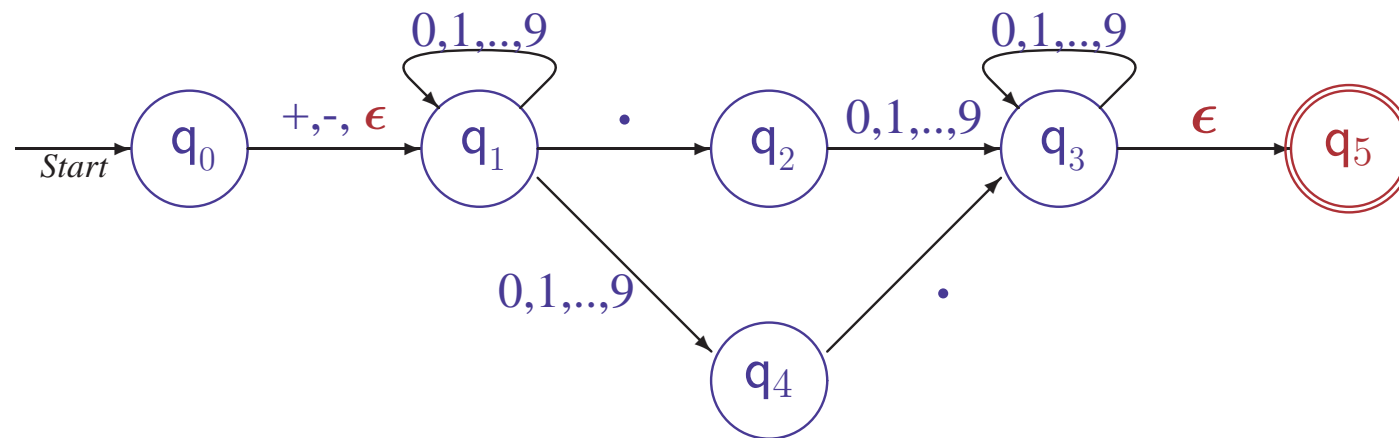
- **Erkenne Dezimalzahlen im Programmcode**
 - Zwei Zeichenreihen von Ziffern getrennt durch Dezimalpunkt
 - Eine der beiden Zeichenreihen darf leer sein, aber nicht beide
 - Optionales Vorzeichen + oder -



ϵ -ÜBERGÄNGE – VERARBEITUNG OPTIONALER EINGABEN

● **Erkenne Dezimalzahlen im Programmcode**

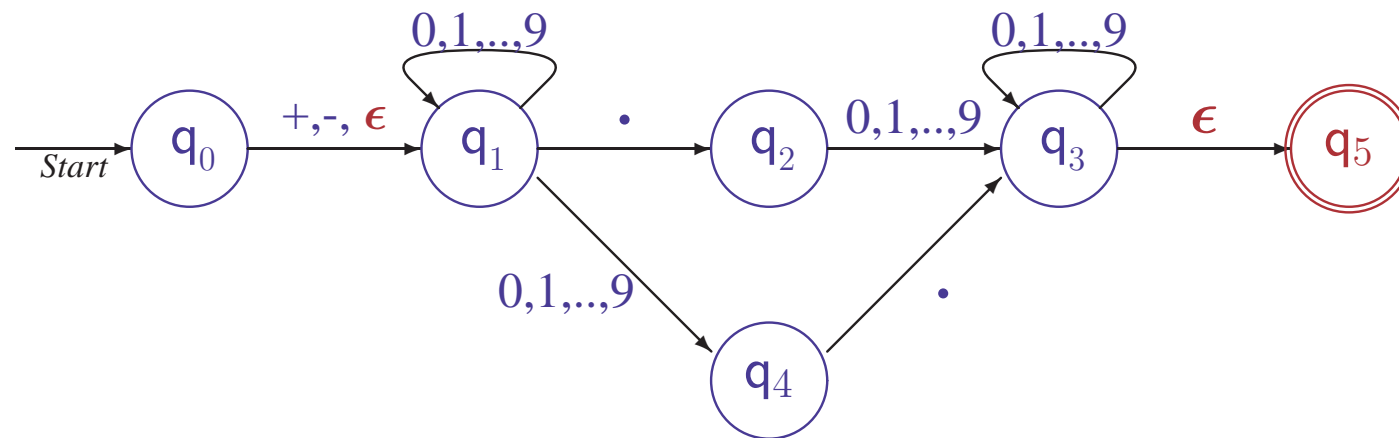
- Zwei Zeichenreihen von Ziffern getrennt durch Dezimalpunkt
- Eine der beiden Zeichenreihen darf leer sein, aber nicht beide
- Optionales Vorzeichen + oder - separater Endzustand



ϵ -ÜBERGÄNGE – VERARBEITUNG OPTIONALER EINGABEN

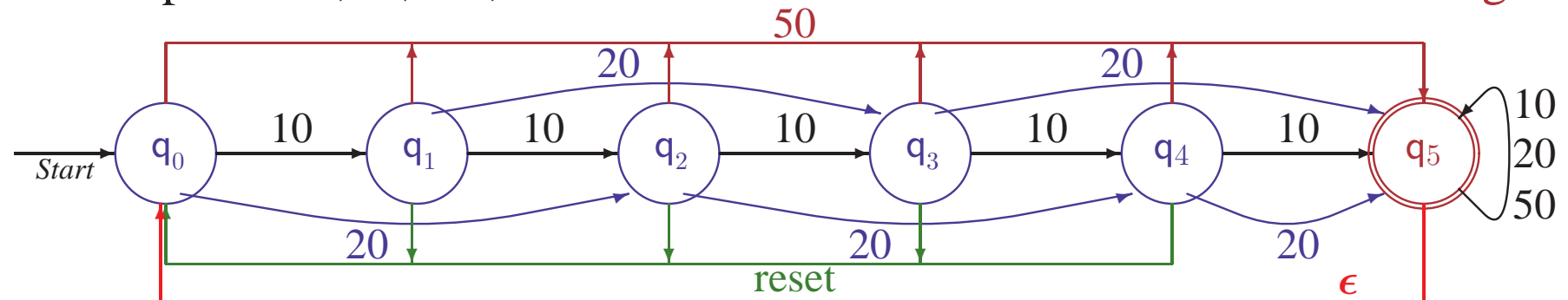
• **Erkenne Dezimalzahlen im Programmcode**

- Zwei Zeichenreihen von Ziffern getrennt durch Dezimalpunkt
- Eine der beiden Zeichenreihen darf leer sein, aber nicht beide
- Optionales Vorzeichen + oder - separater Endzustand



• **50c Kaffeeautomat**

- Akzeptiert 10,20,50c, mit Reset-Taste und automatischer Rücksetzung



NICHTDETERMINISTISCHE AUTOMATEN – PRÄZISIERT



Ein **ϵ -NEA** (**nichtdeterministischer endlicher Automat mit ϵ -Übergängen**) ist ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ (endliches) **Eingabealphabet** mit $\epsilon \notin \Sigma$
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ **Zustandsüberföhrungsfunktion** *
- $q_0 \in Q$ **Startzustand**
- $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden** (End-) **Zuständen**

Ein **NEA** ist ein nichtdet. endlicher Automat ohne ϵ -Übergänge

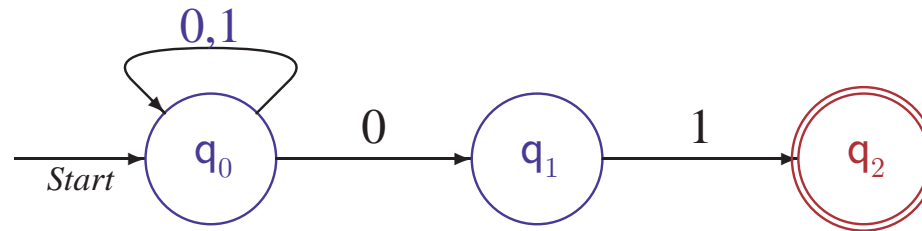
Oft wird "NEA" als Oberbegriff für Automaten mit und ohne ϵ -Übergänge verwendet

* $\mathcal{P}(Q) = \{S \mid S \subseteq Q\}$ (**Potenzmenge** von Q)

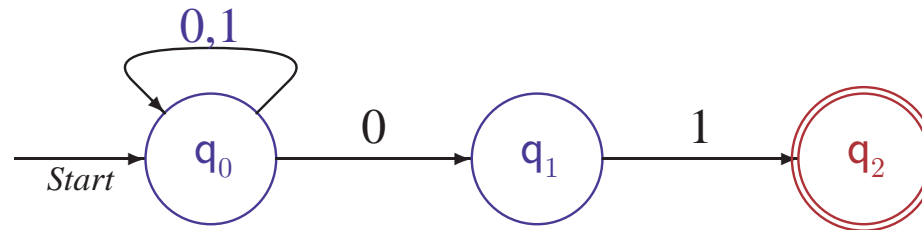
Bei ϵ -NEAs ist $\delta(q', a)$ ist eine (möglicherweise leere) Menge von Zuständen

ARBEITSWEISE VON NEAs

Erkenne Strings, die mit 01 enden

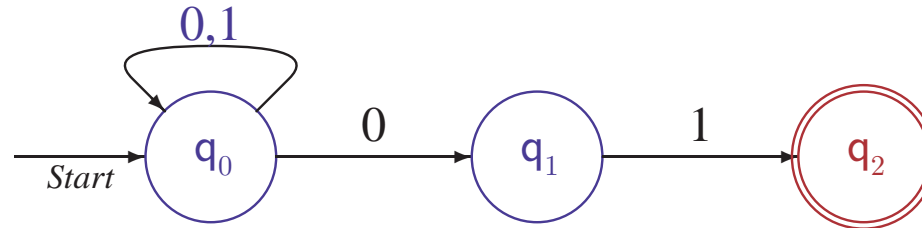


Erkenne Strings, die mit 01 enden



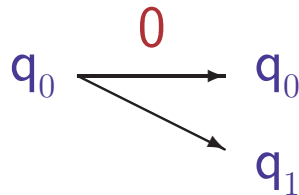
- (1) Jedes Teilwort kann in q_0 bleiben
- (2) Ein Teilwort muss mit 0 enden, um nach q_1 zu führen
- (3) Ein Teilwort muss mit 01 enden, um nach q_2 zu führen
- (4) In q_2 muss das Wort abgearbeitet sein

Erkenne Strings, die mit 01 enden



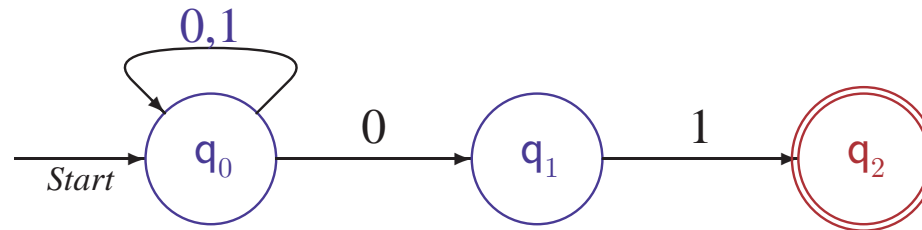
- (1) Jedes Teilwort kann in q_0 bleiben
- (2) Ein Teilwort muss mit 0 enden, um nach q_1 zu führen
- (3) Ein Teilwort muss mit 01 enden, um nach q_2 zu führen
- (4) In q_2 muss das Wort abgearbeitet sein

Beispiel: Abarbeitung von 00101



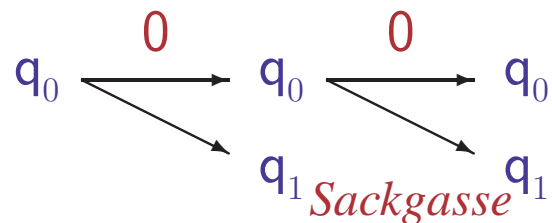
ARBEITSWEISE VON NEAs

Erkenne Strings, die mit 01 enden



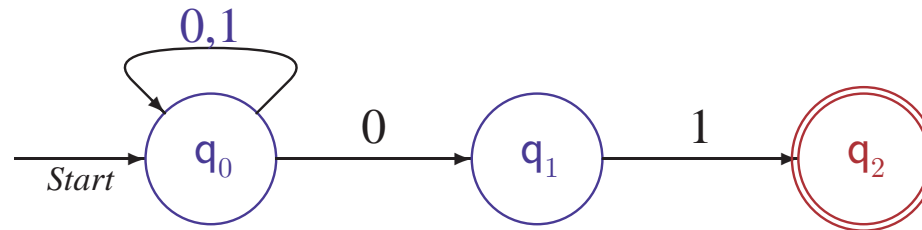
- (1) Jedes Teilwort kann in q_0 bleiben
- (2) Ein Teilwort muss mit 0 enden, um nach q_1 zu führen
- (3) Ein Teilwort muss mit 01 enden, um nach q_2 zu führen
- (4) In q_2 muss das Wort abgearbeitet sein

Beispiel: Abarbeitung von 00101



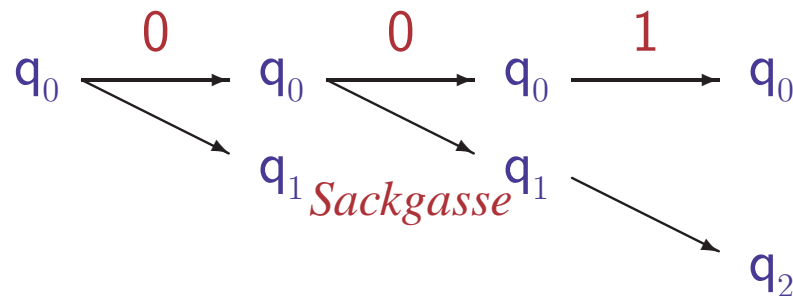
ARBEITSWEISE VON NEAs

Erkenne Strings, die mit 01 enden



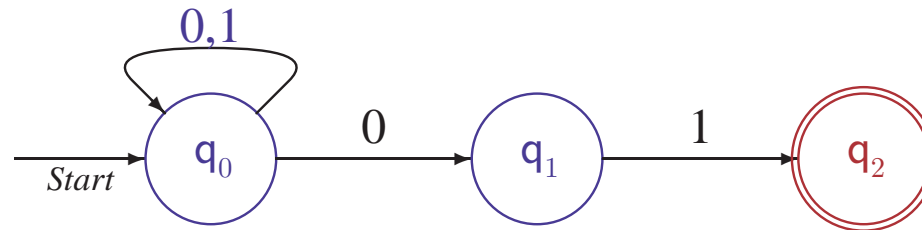
- (1) Jedes Teilwort kann in q_0 bleiben
- (2) Ein Teilwort muss mit 0 enden, um nach q_1 zu führen
- (3) Ein Teilwort muss mit 01 enden, um nach q_2 zu führen
- (4) In q_2 muss das Wort abgearbeitet sein

Beispiel: Abarbeitung von 00101



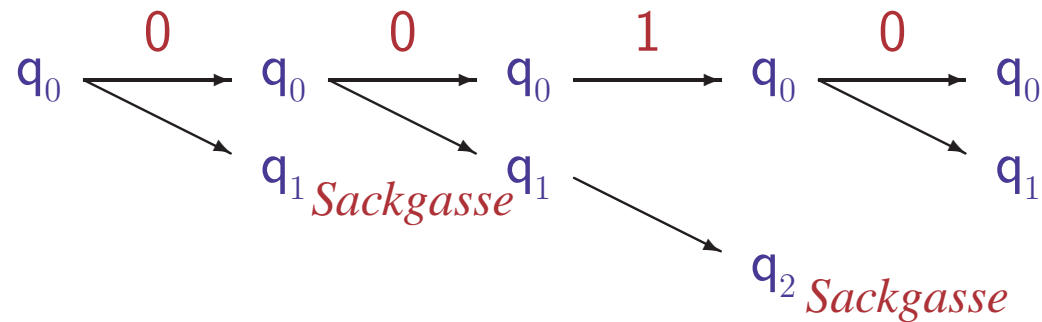
ARBEITSWEISE VON NEAs

Erkenne Strings, die mit 01 enden



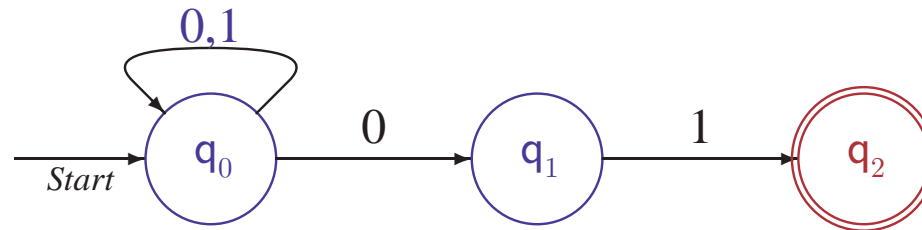
- (1) Jedes Teilwort kann in q_0 bleiben
- (2) Ein Teilwort muss mit 0 enden, um nach q_1 zu führen
- (3) Ein Teilwort muss mit 01 enden, um nach q_2 zu führen
- (4) In q_2 muss das Wort abgearbeitet sein

Beispiel: Abarbeitung von 00101



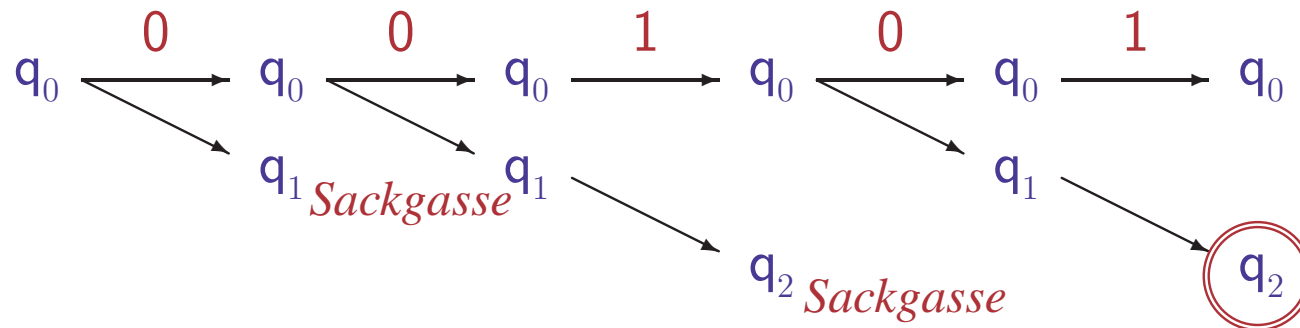
ARBEITSWEISE VON NEAs

Erkenne Strings, die mit 01 enden



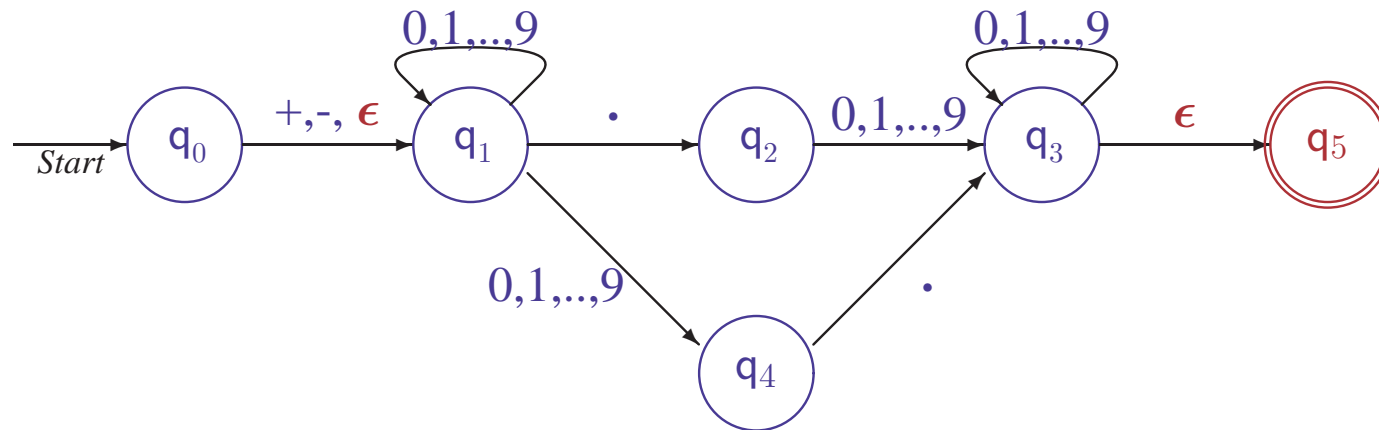
- (1) Jedes Teilwort kann in q_0 bleiben
- (2) Ein Teilwort muss mit 0 enden, um nach q_1 zu führen
- (3) Ein Teilwort muss mit 01 enden, um nach q_2 zu führen
- (4) In q_2 muss das Wort abgearbeitet sein

Beispiel: Abarbeitung von 00101

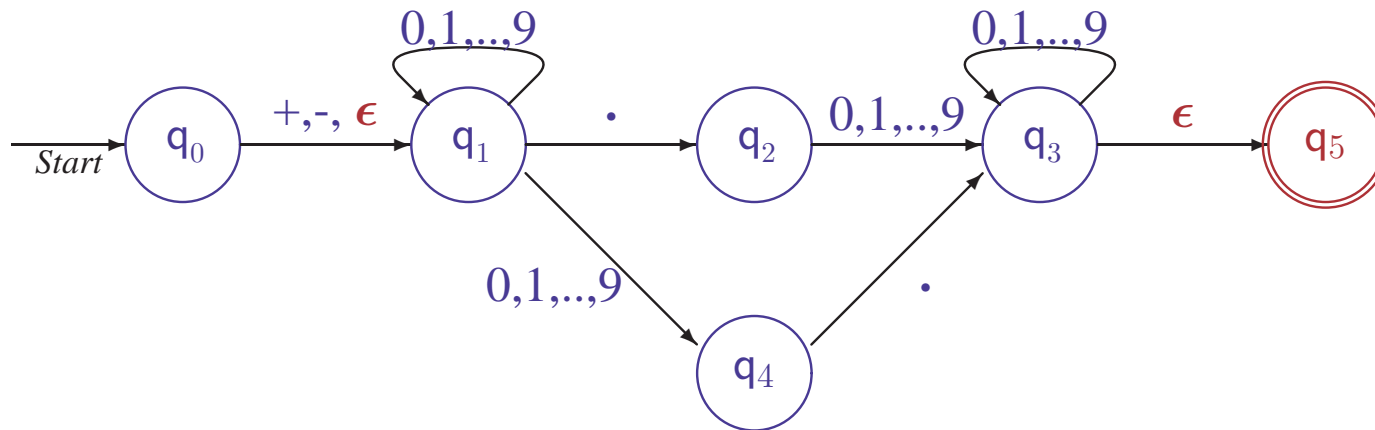


Ein Abarbeitungsweg führt zu einem akzeptierenden Zustand

ARBEITSWEISE VON NEAS MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN

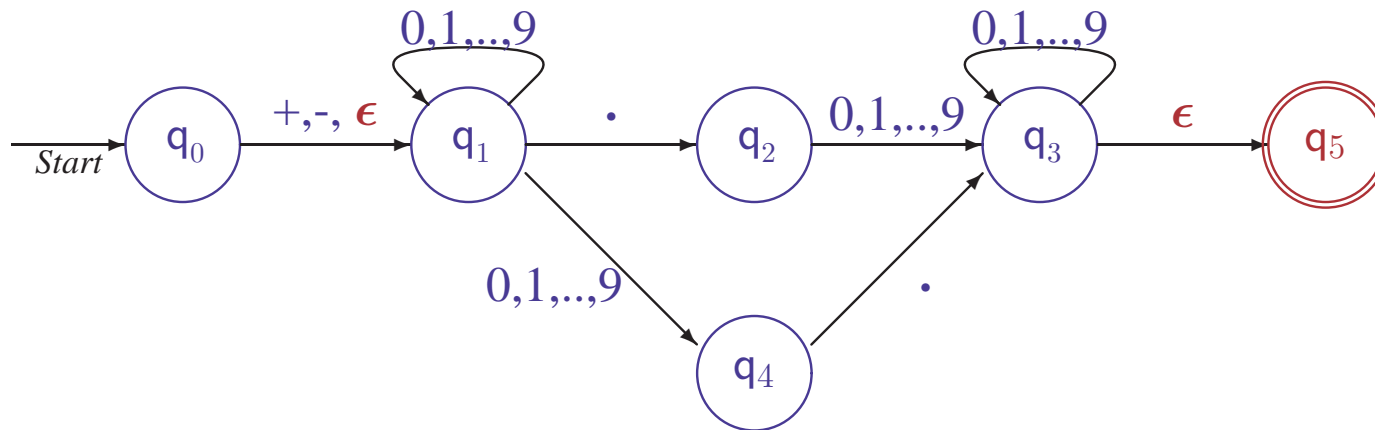


ARBEITSWEISE VON NEAS MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN



- (1) Die Teilwörter $+$, $-$, und ϵ führen nach q_1
- (2) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^+$ mit $v \in \{+, -, \epsilon\}$ führen nach q_1 oder q_4
- (3) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^+.$ führen nach q_2 oder q_3
- (4) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^*.\{0..9\}^+$ führen nach q_3
- (5) Wörter die nach q_3 führen, führen auch zum Endzustand q_5

ARBEITSWEISE VON NEAs MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN

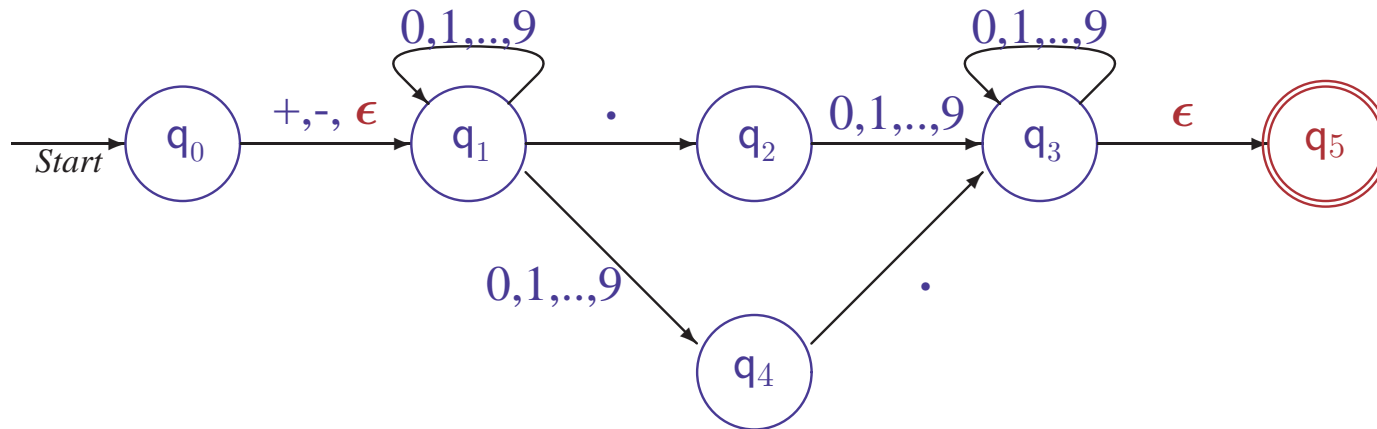


- (1) Die Teilwörter $+$, $-$, und ϵ führen nach q_1
- (2) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^+$ mit $v \in \{+, -, \epsilon\}$ führen nach q_1 oder q_4
- (3) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^+.$ führen nach q_2 oder q_3
- (4) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^*.\{0..9\}^+$ führen nach q_3
- (5) Wörter die nach q_3 führen, führen auch zum Endzustand q_5

Beispiel: Abarbeitung von 3.14159

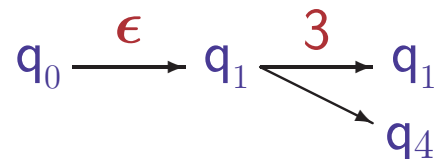
$q_0 \xrightarrow{\epsilon} q_1$

ARBEITSWEISE VON NEAs MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN

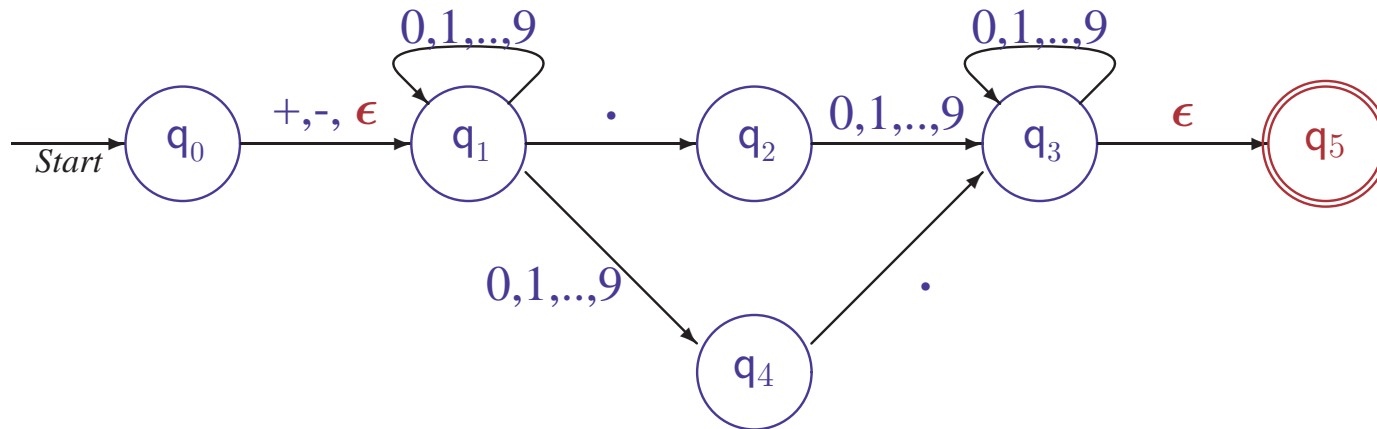


- (1) Die Teilwörter $+$, $-$, und ϵ führen nach q_1
- (2) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^+$ mit $v \in \{+, -, \epsilon\}$ führen nach q_1 oder q_4
- (3) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^+.$ führen nach q_2 oder q_3
- (4) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^*.\{0..9\}^+$ führen nach q_3
- (5) Wörter die nach q_3 führen, führen auch zum Endzustand q_5

Beispiel: Abarbeitung von 3.14159

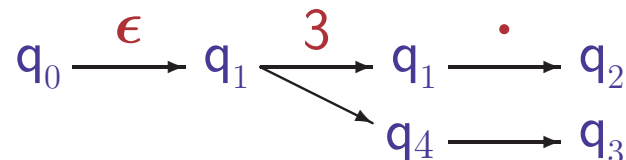


ARBEITSWEISE VON NEAs MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN

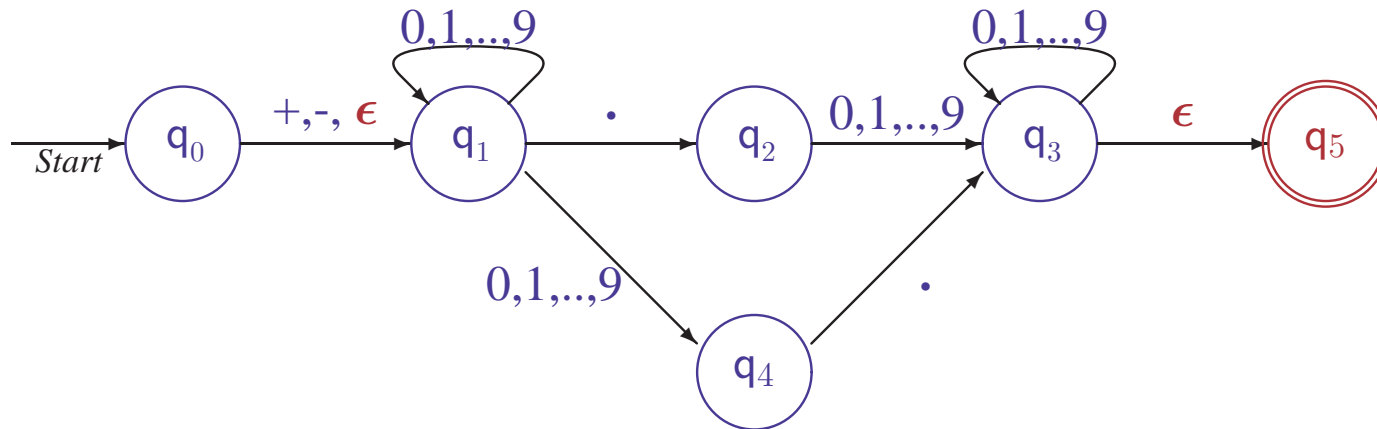


- (1) Die Teilwörter $+$, $-$, und ϵ führen nach q_1
- (2) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^+$ mit $v \in \{+, -, \epsilon\}$ führen nach q_1 oder q_4
- (3) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^+.$ führen nach q_2 oder q_3
- (4) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^*.\{0..9\}^+$ führen nach q_3
- (5) Wörter die nach q_3 führen, führen auch zum Endzustand q_5

Beispiel: Abarbeitung von 3.14159

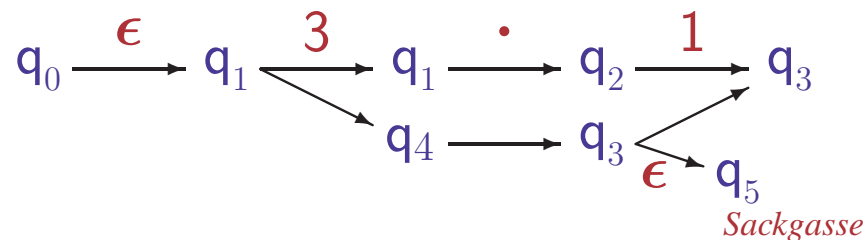


ARBEITSWEISE VON NEAS MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN

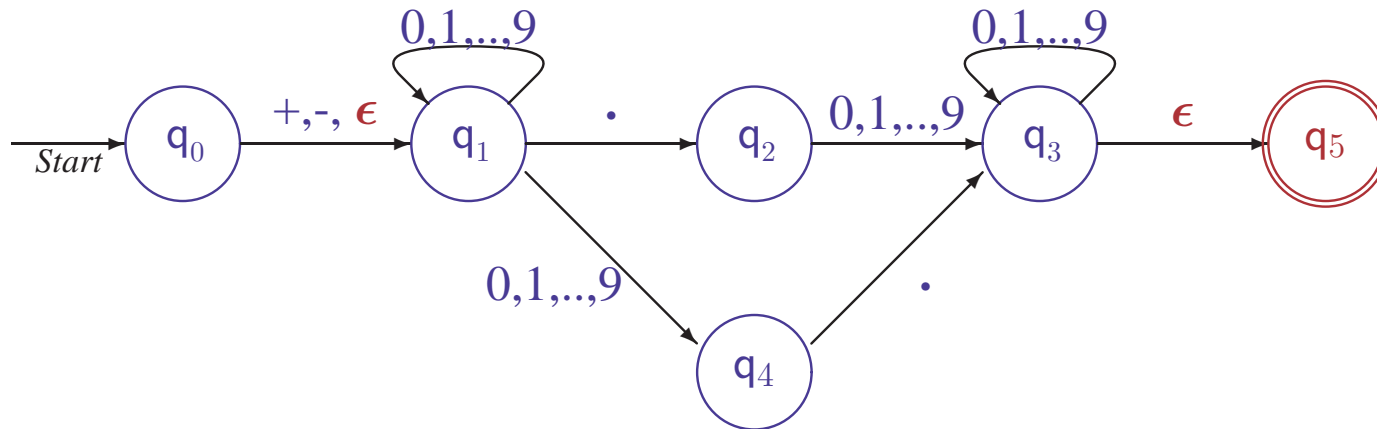


- (1) Die Teilwörter $+$, $-$, und ϵ führen nach q_1
- (2) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^+$ mit $v \in \{+, -, \epsilon\}$ führen nach q_1 oder q_4
- (3) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^+.$ führen nach q_2 oder q_3
- (4) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^*.\{0..9\}^+$ führen nach q_3
- (5) Wörter die nach q_3 führen, führen auch zum Endzustand q_5

Beispiel: Abarbeitung von 3.14159

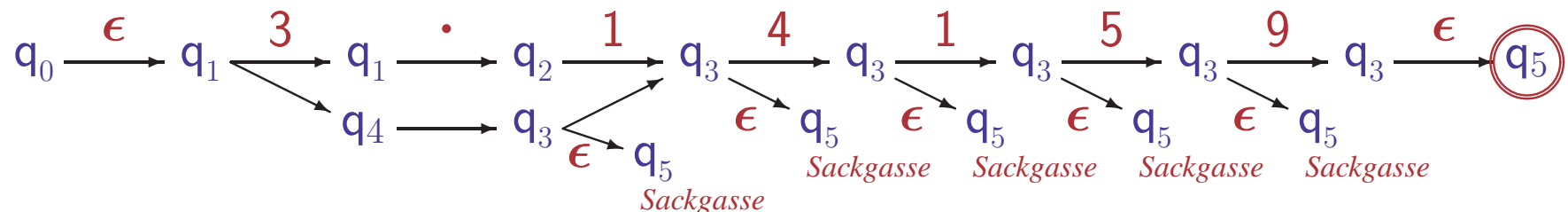


ARBEITSWEISE VON NEAS MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN



- (1) Die Teilwörter $+$, $-$, und ϵ führen nach q_1
- (2) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^+$ mit $v \in \{+, -, \epsilon\}$ führen nach q_1 oder q_4
- (3) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^+.$ führen nach q_2 oder q_3
- (4) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^*.\{0..9\}^+$ führen nach q_3
- (5) Wörter die nach q_3 führen, führen auch zum Endzustand q_5

Beispiel: Abarbeitung von 3.14159



Ein Abarbeitungsweg mit ϵ -Übergängen führt zu einem Endzustand

ARBEITSWEISE VON ϵ -NEAS – PRÄZISIERT

- **Beschreibe ϵ -Hülle eines Zustands q**
 - Die von q mit ϵ -Übergängen erreichbaren Zustände
 - **Iterative Definition:** Kleinste Menge mit der Eigenschaft
 $q \in \epsilon\text{-Hülle}(q)$ und $p \in \epsilon\text{-Hülle}(q) \wedge r \in \delta(p, \epsilon) \Rightarrow r \in \epsilon\text{-Hülle}(q)$

ARBEITSWEISE VON ϵ -NEAS – PRÄZISIERT

- **Beschreibe ϵ -Hülle eines Zustands q**

- Die von q mit ϵ -Übergängen erreichbaren Zustände

- **Iterative Definition:** Kleinste Menge mit der Eigenschaft

$$q \in \epsilon\text{-Hülle}(q) \text{ und } p \in \epsilon\text{-Hülle}(q) \wedge r \in \delta(p, \epsilon) \Rightarrow r \in \epsilon\text{-Hülle}(q)$$

- **Erweiterte Überföhrungsfunktion $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$**

- Aufsammeln **aller** bei der Abarbeitung erreichbaren Zustände einschließlich derjenigen, die ohne Eingabe erreicht werden

- **Induktive Definition** (kaskadisches Aufsammeln von Zuständen)

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} \epsilon\text{-Hülle}(q) & \text{falls } w = \epsilon, \\ \bigcup_{q' \in \hat{\delta}(q, v)} \bigcup_{q'' \in \delta(q', a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') & \text{falls } w = v a \text{ (} a \in \Sigma \text{)} \end{cases} *$$

* d.h. $p \in \hat{\delta}(q, w)$ gdw. es gibt ein $q' \in \hat{\delta}(q, v)$ und $q'' \in \delta(q', a)$ so dass $p \in \epsilon\text{-Hülle}(q'')$

ARBEITSWEISE VON ϵ -NEAS – PRÄZISIERT

- **Beschreibe ϵ -Hülle eines Zustands q**

- Die von q mit ϵ -Übergängen erreichbaren Zustände

- **Iterative Definition:** Kleinste Menge mit der Eigenschaft

$$q \in \epsilon\text{-Hülle}(q) \text{ und } p \in \epsilon\text{-Hülle}(q) \wedge r \in \delta(p, \epsilon) \Rightarrow r \in \epsilon\text{-Hülle}(q)$$

- **Erweiterte Überföhrungsfunktion $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$**

- Aufsammeln **aller** bei der Abarbeitung erreichbaren Zustände einschließlich derjenigen, die ohne Eingabe erreicht werden

- **Induktive Definition** (kaskadisches Aufsammeln von Zuständen)

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} \epsilon\text{-Hülle}(q) & \text{falls } w = \epsilon, \\ \bigcup_{q' \in \hat{\delta}(q, v)} \bigcup_{q'' \in \delta(q', a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') & \text{falls } w = v a \text{ (} a \in \Sigma \text{)} \end{cases} *$$

* d.h. $p \in \hat{\delta}(q, w)$ gdw. es gibt ein $q' \in \hat{\delta}(q, v)$ und $q'' \in \delta(q', a)$ so dass $p \in \epsilon\text{-Hülle}(q'')$

- **Von A akzeptierte Sprache**

- Menge der Eingaben w , für die $\hat{\delta}(q_0, w)$ einen Endzustand enthält

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

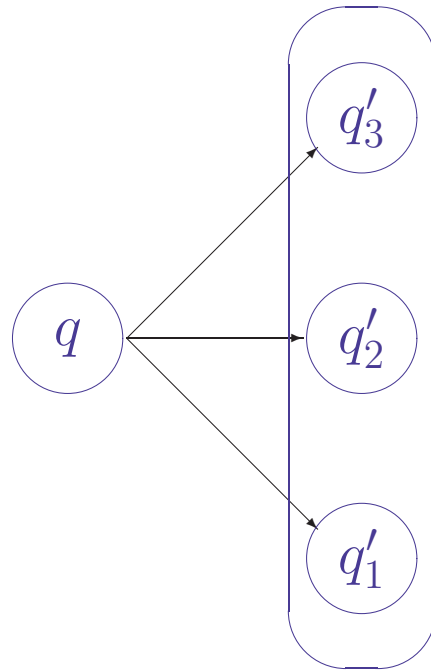
ERWEITERTE ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} \epsilon\text{-Hülle}(q) & w = \epsilon, \\ \bigcup_{q' \in \hat{\delta}(q, v)} \bigcup_{q'' \in \delta(q', a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') & w = v a \ (a \in \Sigma) \end{cases}^*$$

q

ERWEITERTE ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION

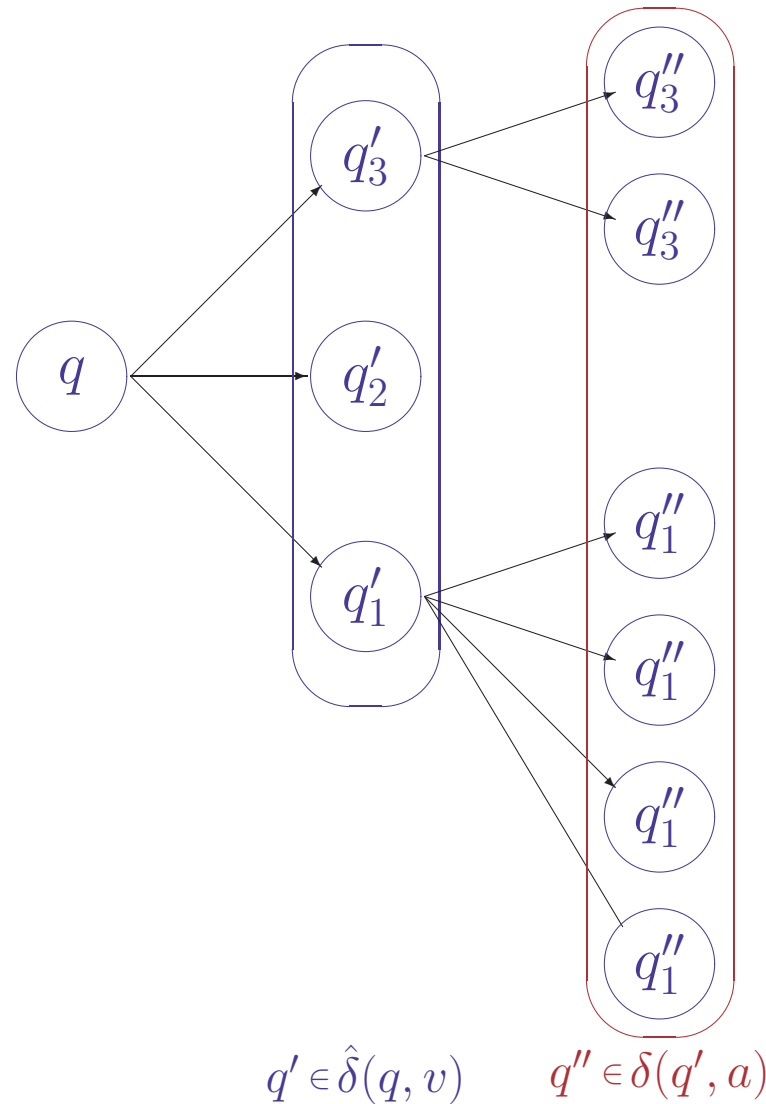
$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} \epsilon\text{-Hülle}(q) & w = \epsilon, \\ \bigcup_{q' \in \hat{\delta}(q, v)} \bigcup_{q'' \in \delta(q', a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') & w = v a \ (a \in \Sigma) \end{cases}^*$$



$$q' \in \hat{\delta}(q, v)$$

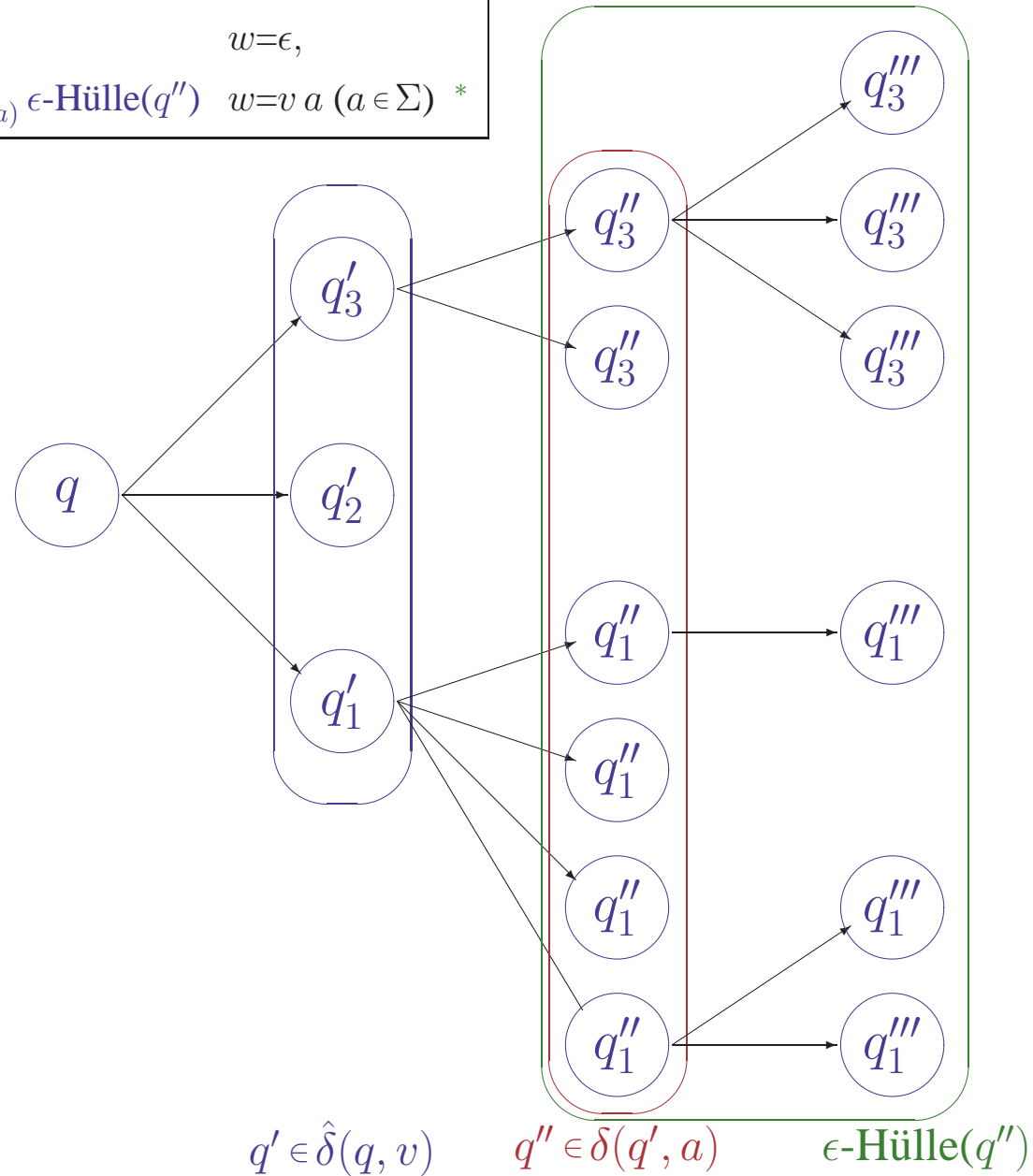
ERWEITERTE ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} \epsilon\text{-Hülle}(q) & w = \epsilon, \\ \bigcup_{q' \in \hat{\delta}(q, v)} \bigcup_{q'' \in \delta(q', a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') & w = v a \ (a \in \Sigma) \end{cases}^*$$

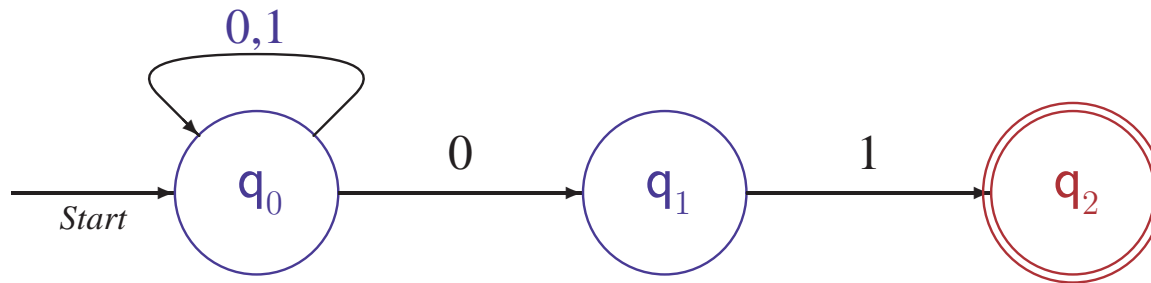


ERWEITERTE ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION

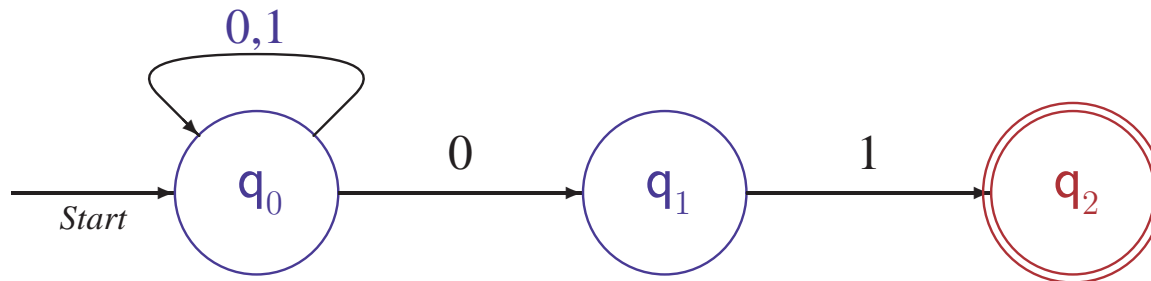
$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} \epsilon\text{-Hülle}(q) & w = \epsilon, \\ \bigcup_{q' \in \hat{\delta}(q, v)} \bigcup_{q'' \in \delta(q', a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') & w = v a \ (a \in \Sigma)^* \end{cases}$$



ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION $\hat{\delta}$ (OHNE ϵ -ÜBERGÄNGE)



ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION $\hat{\delta}$ (OHNE ϵ -ÜBERGÄNGE)

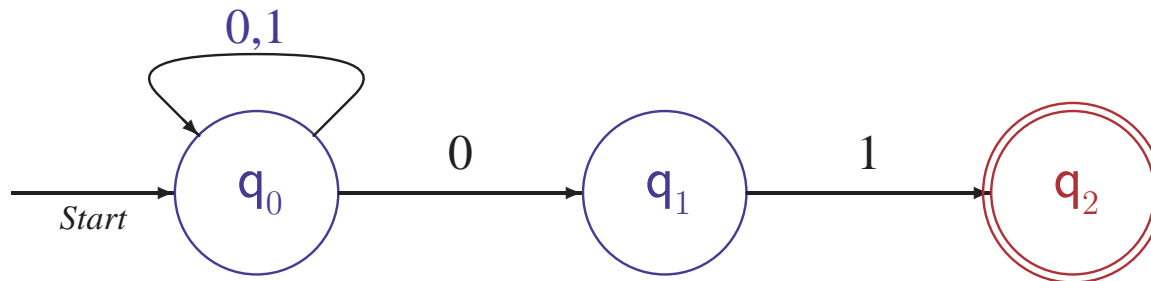


- **Abarbeitung von 00101**

– $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) =$

$\{q_0\}$

ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION $\hat{\delta}$ (OHNE ϵ -ÜBERGÄNGE)



• Abarbeitung von 00101

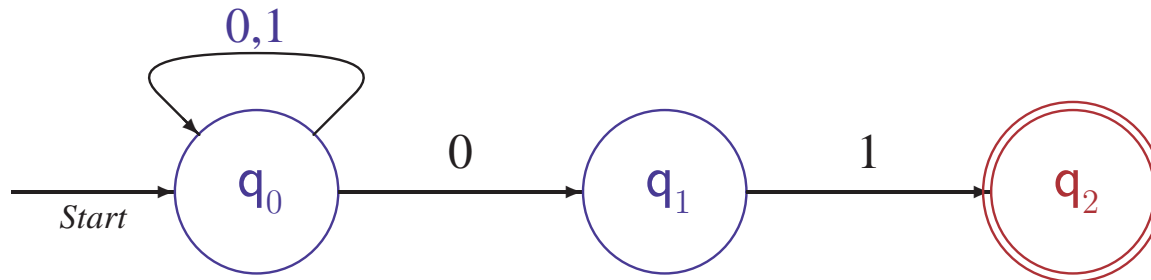
$$- \hat{\delta}(q_0, \epsilon) =$$

 $\{q_0\}$

$$- \hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) =$$

 $\{q_0, q_1\}$

ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION $\hat{\delta}$ (OHNE ϵ -ÜBERGÄNGE)



• Abarbeitung von 00101

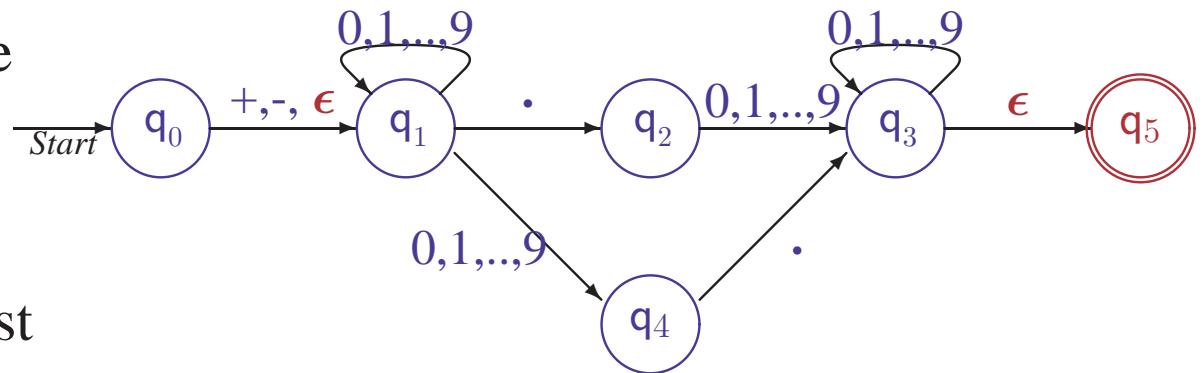
- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$

- **00101 wird akzeptiert da $\hat{\delta}(q_0, 00101) \cap F = \{q_2\}$**

BESTIMMUNG DER ϵ -HÜLLE

• Dezimalautomat

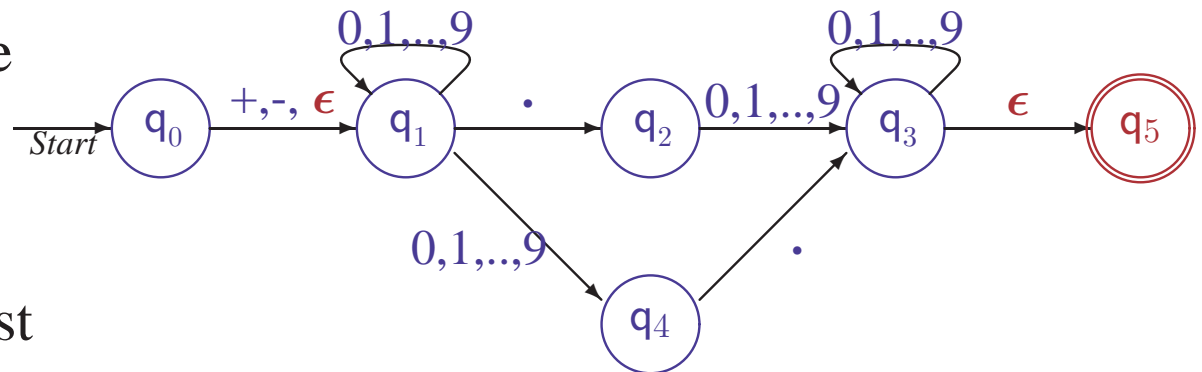
- Nur zwei ϵ -Übergänge
- ϵ -Hülle(q_0) = $\{q_0, q_1\}$
- ϵ -Hülle(q_3) = $\{q_3, q_5\}$
- ϵ -Hülle(q_i) = $\{q_i\}$ sonst



BESTIMMUNG DER ϵ -HÜLLE

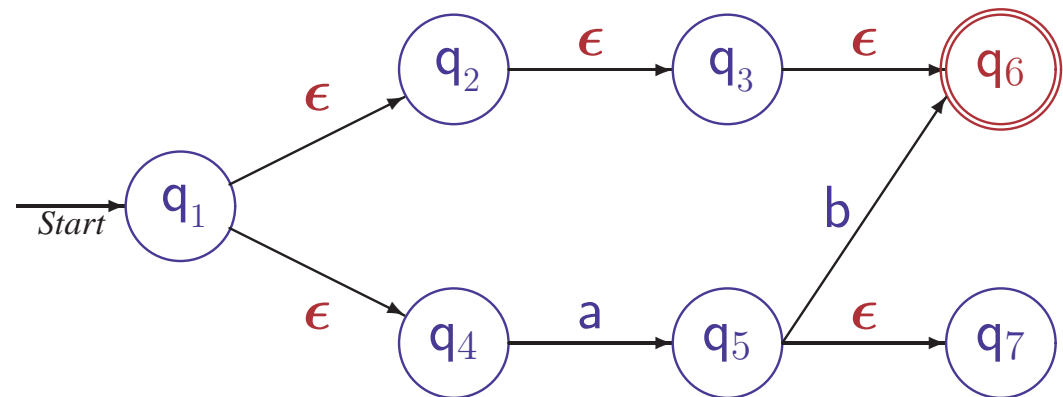
• Dezimalautomat

- Nur zwei ϵ -Übergänge
- ϵ -Hülle(q_0) = $\{q_0, q_1\}$
- ϵ -Hülle(q_3) = $\{q_3, q_5\}$
- ϵ -Hülle(q_i) = $\{q_i\}$ sonst

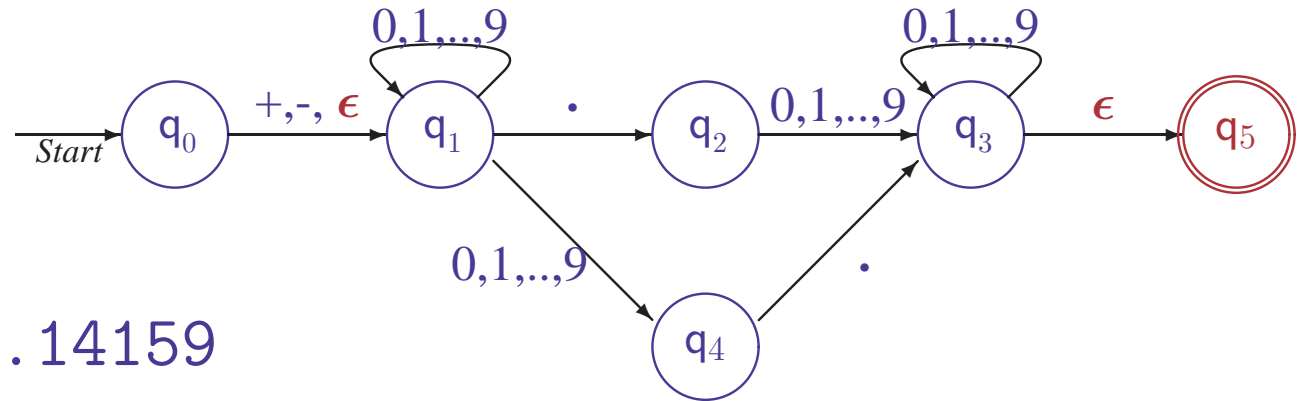


• Viele ϵ -Übergänge

- ϵ -Hülle(q_1) = $\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_6\}$
- ϵ -Hülle(q_2) = $\{q_2, q_3, q_6\}$
- ϵ -Hülle(q_3) = $\{q_3, q_6\}$
- ϵ -Hülle(q_4) = $\{q_4\}$
- ϵ -Hülle(q_5) = $\{q_5, q_7\}$
- ϵ -Hülle(q_6) = $\{q_6\}$
- ϵ -Hülle(q_7) = $\{q_7\}$



ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION $\hat{\delta}$ (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)

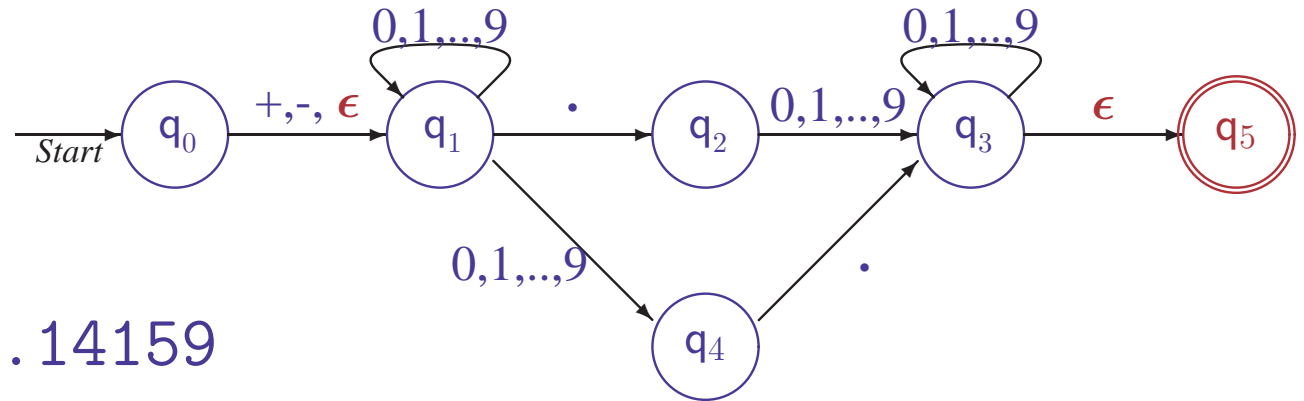


Abarbeitung von 3.14159

– $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \epsilon$ -Hülle(q_0) =

$\{q_0, q_1\}$

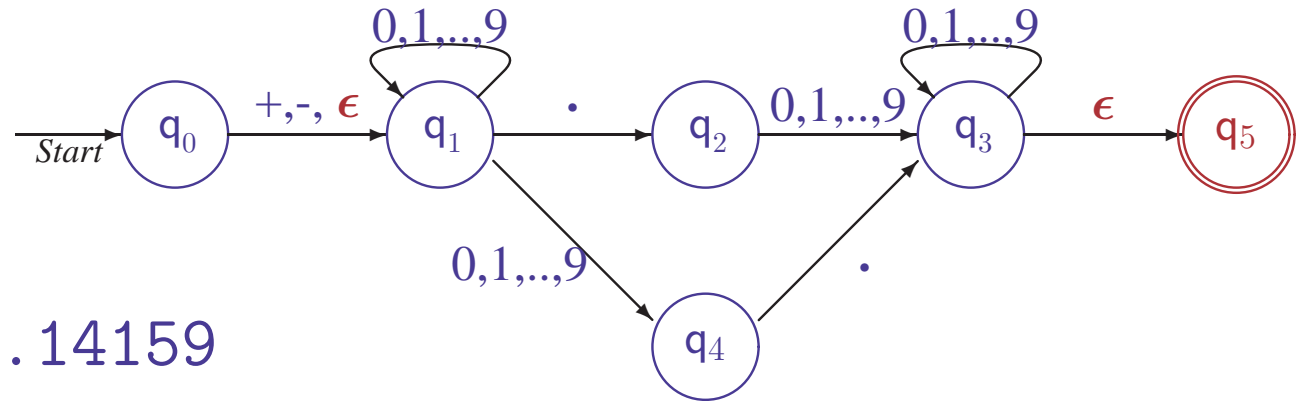
ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION $\hat{\delta}$ (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)



Abarbeitung von 3.14159

- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3): \delta(q_0, 3) \cup \delta(q_1, 3) = \emptyset \cup \{q_1, q_4\} = \{q_1, q_4\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3) = \epsilon\text{-Hülle}(q_1) \cup \epsilon\text{-Hülle}(q_4) = \{q_1\} \cup \{q_4\} = \{q_1, q_4\}$

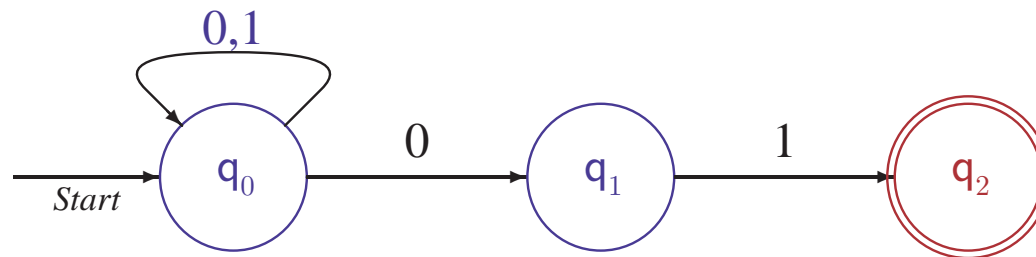
ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION $\hat{\delta}$ (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)



Abarbeitung von 3.14159

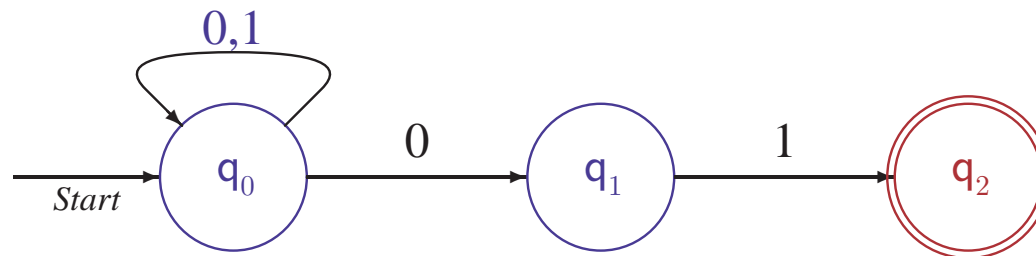
- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3): \delta(q_0, 3) \cup \delta(q_1, 3) = \emptyset \cup \{q_1, q_4\} = \{q_1, q_4\}$
 $\hat{\delta}(q_0, 3) = \epsilon\text{-Hülle}(q_1) \cup \epsilon\text{-Hülle}(q_4) = \{q_1\} \cup \{q_4\} = \{q_1, q_4\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.): \delta(q_1, .) \cup \delta(q_4, .) = \{q_2\} \cup \{q_3\} = \{q_2, q_3\}$
 $\hat{\delta}(q_0, 3.) = \epsilon\text{-Hülle}(q_2) \cup \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_2\} \cup \{q_3, q_5\} = \{q_2, q_3, q_5\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.1): \delta(q_2, 1) \cup \delta(q_3, 1) \cup \delta(q_5, 1) = \{q_3\} \cup \{q_3\} \cup \emptyset = \{q_3\}$
 $\hat{\delta}(q_0, 3.1) = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_5\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.14) = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_5\}$
- ⋮
- $\hat{\delta}(q_0, \mathbf{3.14159}) = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_5\}$

NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (OHNE ϵ -ÜBERGÄNGE)



$$L(A) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ endet mit } 01\}$$

NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (OHNE ϵ -ÜBERGÄNGE)



$$L(A) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ endet mit } 01\}$$

• **Zeige durch simultane Induktion für alle $w \in \{0, 1\}^*$**

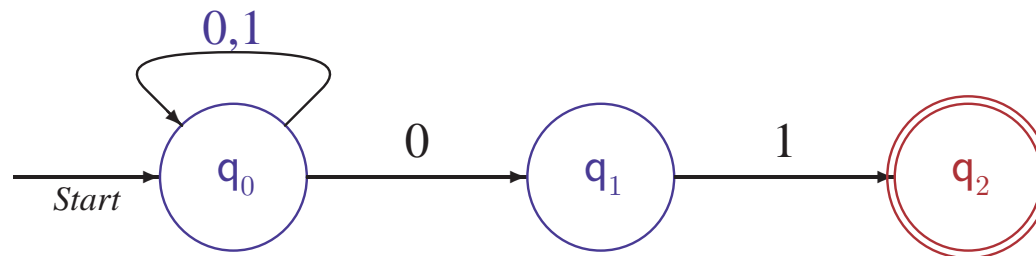
a) $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

b) $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit **0** endet

c) $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit **01** endet

Dann folgt $w \in L(A) \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \cap \{q_2\} \neq \emptyset \Leftrightarrow w$ endet mit **01**

NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (OHNE ϵ -ÜBERGÄNGE)



$$L(A) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ endet mit } 01\}$$

- **Zeige durch simultane Induktion für alle $w \in \{0, 1\}^*$**

- a) $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

- b) $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 0 endet

- c) $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 01 endet

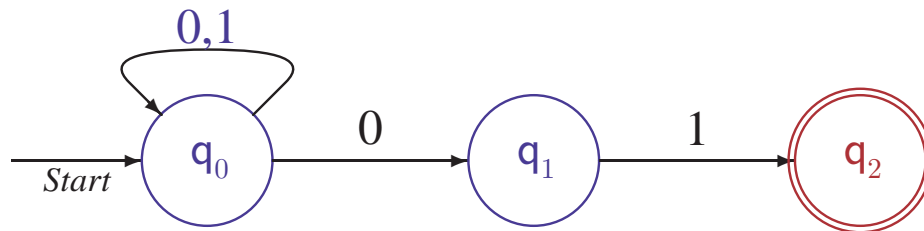
Dann folgt $w \in L(A) \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \cap \{q_2\} \neq \emptyset \Leftrightarrow w$ endet mit 01

- **Induktionsanfang $w = \epsilon$**

- Per Definition ist $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$. Also gilt Aussage a)

- w endet nicht mit 0 oder 01. Aussagen b) und c) gelten trivialerweise

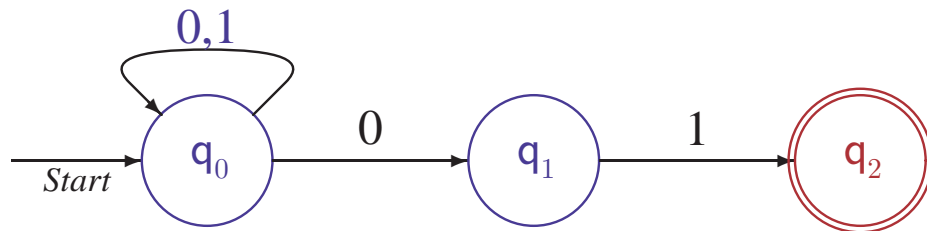
NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE II (semiformal)



- a) $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$
- b) $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 0 endet
- c) $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 01 endet

- **Induktionsschritt:** $w = va$ für $v \in \{0, 1\}^*$, $a \in \{0, 1\}$
 - Die Aussagen a), b), und c) seien für v gültig

NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE II (semiformal)



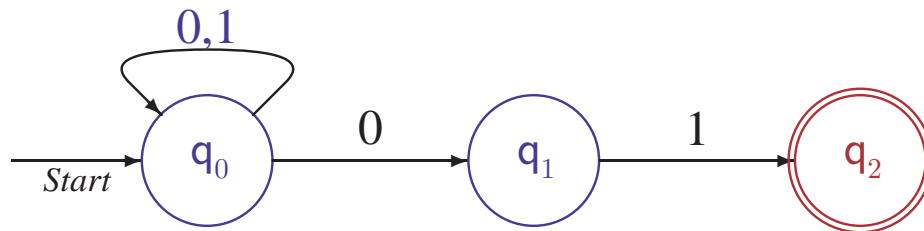
- a) $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$
- b) $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 0 endet
- c) $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 01 endet

● Induktionsschritt: $w = va$ für $v \in \{0, 1\}^*$, $a \in \{0, 1\}$

– Die Aussagen a), b), und c) seien für v gültig

a) Wegen $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ und $q_0 \in \delta(q_0, a)$ für $a \in \{0, 1\}$ folgt $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE II (semiformal)



- a) $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$
- b) $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 0 endet
- c) $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 01 endet

● Induktionsschritt: $w = va$ für $v \in \{0, 1\}^*$, $a \in \{0, 1\}$

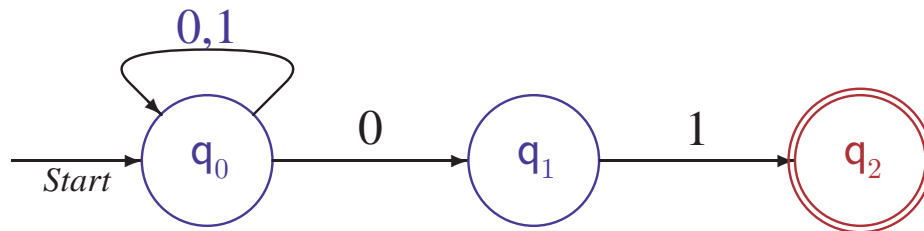
– Die Aussagen a), b), und c) seien für v gültig

a) Wegen $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ und $q_0 \in \delta(q_0, a)$ für $a \in \{0, 1\}$ folgt $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

b) Sei $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$. Wegen $q_1 \in \delta(q, a) \Leftrightarrow q=q_0 \wedge a=0$ muss w mit 0 enden

Wenn umgekehrt w mit 0 endet, dann ist $a=0$.

Wegen $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ und $q_1 \in \delta(q_0, a)$ folgt $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$



- a) $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$
- b) $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 0 endet
- c) $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 01 endet

● **Induktionsschritt:** $w = va$ für $v \in \{0, 1\}^*$, $a \in \{0, 1\}$

– Die Aussagen a), b), und c) seien für v gültig

a) Wegen $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ und $q_0 \in \delta(q_0, a)$ für $a \in \{0, 1\}$ folgt $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

b) Sei $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$. Wegen $q_1 \in \delta(q, a) \Leftrightarrow q=q_0 \wedge a=0$ muss w mit 0 enden
 Wenn umgekehrt w mit 0 endet, dann ist $a=0$.

Wegen $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ und $q_1 \in \delta(q_0, a)$ folgt $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

c) Sei $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$. Wegen $q_2 \in \delta(q, a) \Leftrightarrow q=q_1 \wedge a=1$ muss w mit 1 enden
 und $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ gelten. Wegen b) für v endet v mit 0, also w mit 01

Wenn umgekehrt w mit 01 endet, dann ist $a=1$ und v endet mit 0.

Wegen $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ nach b) und $q_2 \in \delta(q_1, a)$ folgt $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

ARBEITSWEISE VON ϵ -NEAs – ALTERNATIVE BESCHREIBUNG MIT KONFIGURATIONSÜBERGÄNGEN

- **Definiere Konfigurationen**

- Formal dargestellt als Tupel $K = (q, w) \in Q \times \Sigma^*$

- **Definiere Konfigurationsübergangsrelation \vdash^***

- Wechsel zwischen Konfigurationen durch Abarbeitung von Wörtern

- $(q, aw) \vdash (p, w)$, falls $p \in \delta(q, a)$

- $(q, w) \vdash (p, w)$, falls $p \in \delta(q, \epsilon)$

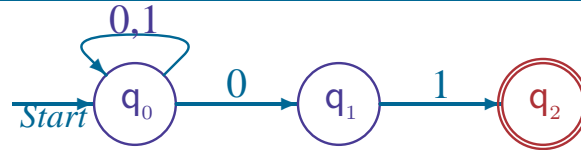
- $K_1 \vdash^* K_2$, falls $K_1 = K_2$ oder

- es gibt eine Konfiguration K mit $K_1 \vdash K$ und $K \vdash^* K_2$

- **Akzeptierte Sprache**

- Menge der Eingaben, für die \vdash^* zu akzeptierenden Zustand führt

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F. (q_0, w) \vdash^* (p, \epsilon)\}$$



$$L(A) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01\}$$

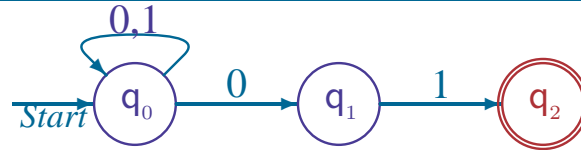
- Zeige durch **simultane Induktion** für alle $w \in \{0, 1\}^*$

$$S_1(w): (q_0, w) \vdash^* (q_0, \epsilon)$$

$$S_2(w): (q_0, w) \vdash^* (q_1, \epsilon) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v0$$

$$S_3(w): (q_0, w) \vdash^* (q_2, \epsilon) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01$$

Formulierung ungeeignet für Induktionsbeweise



$$L(A) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01\}$$

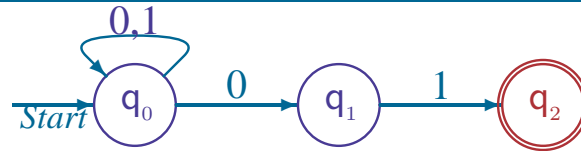
- Zeige durch **simultane Induktion** für alle $w, u \in \{0, 1\}^*$

$$S_1(w): (q_0, wu) \vdash^* (q_0, u)$$

$$S_2(w): (q_0, wu) \vdash^* (q_1, u) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v0$$

$$S_3(w): (q_0, w) \vdash^* (q_2, \epsilon) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01$$

Besser: erlaube, daß nach Abarbeitung von w ein Restwort u noch ungelesen ist



$$L(A) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01\}$$

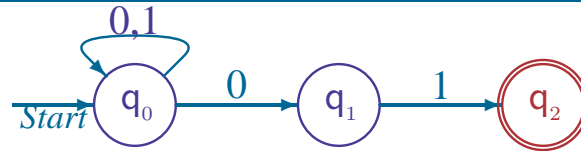
- Zeige durch **simultane Induktion** für alle $w, u \in \{0, 1\}^*$

$$S_1(w): (q_0, wu) \vdash^* (q_0, u)$$

$$S_2(w): (q_0, wu) \vdash^* (q_1, u) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v0$$

$$S_3(w): (q_0, w) \vdash^* (q_2, \epsilon) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01$$

$$\text{Dann folgt } w \in L(A) \Leftrightarrow (q_0, w) \vdash^* (q_2, \epsilon) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01$$



$$L(A) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01\}$$

- Zeige durch **simultane Induktion** für alle $w, u \in \{0, 1\}^*$

$$S_1(w): (q_0, wu) \vdash^* (q_0, u)$$

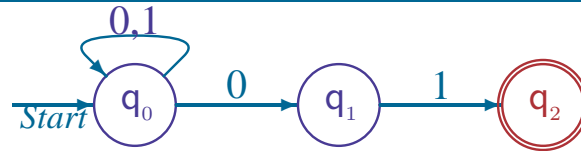
$$S_2(w): (q_0, wu) \vdash^* (q_1, u) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v0$$

$$S_3(w): (q_0, w) \vdash^* (q_2, \epsilon) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01$$

$$\text{Dann folgt } w \in L(A) \Leftrightarrow (q_0, w) \vdash^* (q_2, \epsilon) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01$$

- **Induktionsanfang** $w = \epsilon$

– Per Definition gilt $(q_0, u) \vdash^* (q_0, u)$, $(q_0, u) \not\vdash^* (q_1/2, u)$ und $\epsilon \neq v0$, $\epsilon \neq v01$ ✓



$$L(A) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01\}$$

- Zeige durch **simultane Induktion** für alle $w, u \in \{0, 1\}^*$

$$S_1(w): (q_0, w u) \vdash^* (q_0, u)$$

$$S_2(w): (q_0, w u) \vdash^* (q_1, u) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v0$$

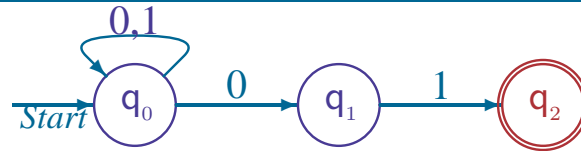
$$S_3(w): (q_0, w) \vdash^* (q_2, \epsilon) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01$$

$$\text{Dann folgt } w \in L(A) \Leftrightarrow (q_0, w) \vdash^* (q_2, \epsilon) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01$$

- **Induktionsanfang** $w = \epsilon$

– Per Definition gilt $(q_0, u) \vdash^* (q_0, u)$, $(q_0, u) \not\vdash^* (q_1, u)$ und $\epsilon \neq v0, \epsilon \neq v01$ ✓

- **Induktionsannahme:** $S_1(w') - S_3(w')$ sei gezeigt für $w' \in \{0, 1\}^*$



$$L(A) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01\}$$

- Zeige durch **simultane Induktion** für alle $w, u \in \{0, 1\}^*$

$$S_1(w): (q_0, w u) \vdash^* (q_0, u)$$

$$S_2(w): (q_0, w u) \vdash^* (q_1, u) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v0$$

$$S_3(w): (q_0, w) \vdash^* (q_2, \epsilon) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01$$

$$\text{Dann folgt } w \in L(A) \Leftrightarrow (q_0, w) \vdash^* (q_2, \epsilon) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = v01$$

- **Induktionsanfang** $w = \epsilon$

– Per Definition gilt $(q_0, u) \vdash^* (q_0, u)$, $(q_0, u) \not\vdash^* (q_1, u)$ und $\epsilon \neq v0$, $\epsilon \neq v01$ ✓

- **Induktionsannahme:** $S_1(w')$ – $S_3(w')$ sei gezeigt für $w' \in \{0, 1\}^*$

- **Induktionsschritt:** sei $w = w'a$ für ein beliebiges $a \in \{0, 1\}$

$S_1(w)$: Wegen $S_1(w'u)$ und $q_0 \in \delta(q_0, a)$ folgt $(q_0, w u) \vdash^* (q_0, u)$ ✓

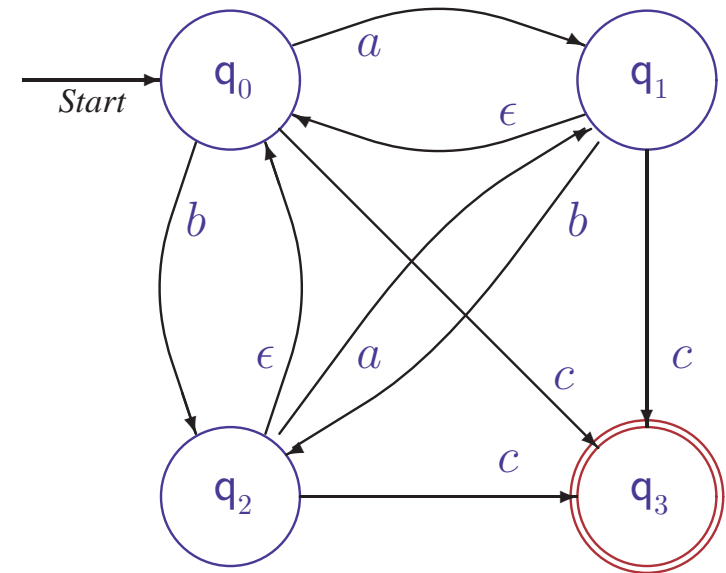
$S_2(w)$: Wegen $q_1 \in \delta(q, a) \Leftrightarrow q = q_0 \wedge a = 0$ gilt

$$(q_0, w u) \vdash^* (q_1, u) \Leftrightarrow (q_0, w' a u) \vdash^* (q_0, a u) \vdash (q_1, u) \Leftrightarrow \exists w' \in \{0, 1\}^*. w = w'0 \quad \checkmark$$

$S_3(w)$: Wegen $q_2 \in \delta(q, a) \Leftrightarrow q = q_1 \wedge a = 1$ gilt

$$(q_0, w) \vdash^* (q_2, \epsilon) \Leftrightarrow (q_0, w' a) \vdash^* (q_1, a) \vdash (q_2, \epsilon) \Leftrightarrow \exists v \in \{0, 1\}^*. w = w'1 = v01 \quad \checkmark$$

NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)



NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)

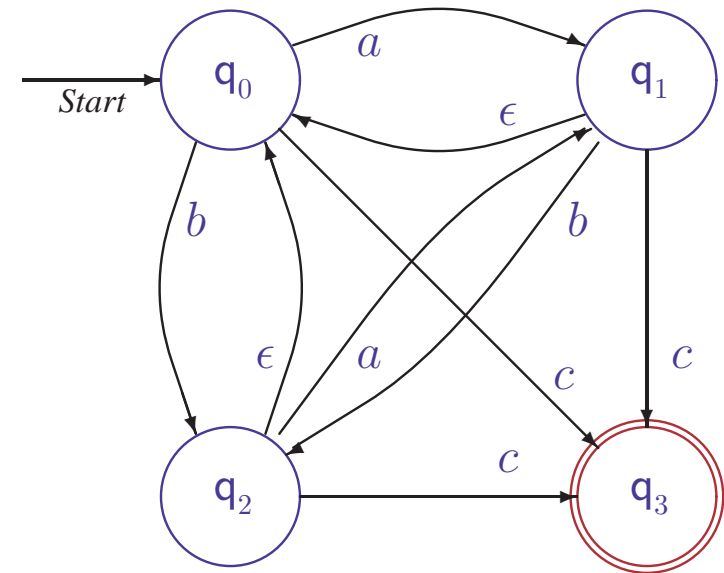
- **Mit welchen Wörtern werden die q_i erreicht?**

q_0 : Gleiche Wörter wie q_1 oder q_2

q_1 : Letztes Symbol ist ein a ,

q_2 : Letztes Symbol ist ein b

q_3 : Letztes Symbol ist ein c



NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)

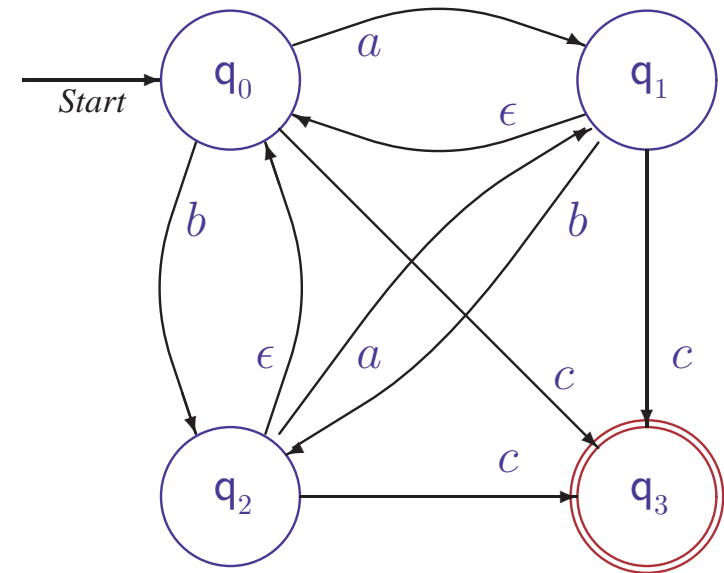
- **Mit welchen Wörtern werden die q_i erreicht?**

q_0 : Gleiche Wörter wie q_1 oder q_2

q_1 : Letztes Symbol ist ein a , davor b 's oder a 's

q_2 : Letztes Symbol ist ein b

q_3 : Letztes Symbol ist ein c



NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)

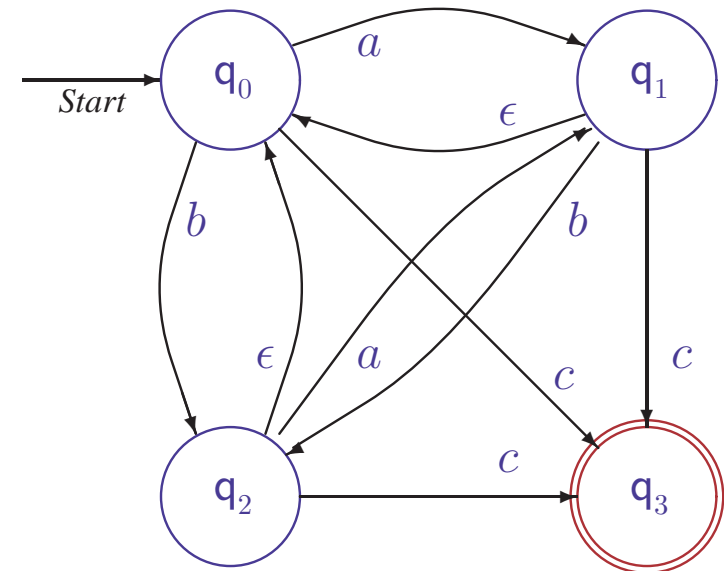
- **Mit welchen Wörtern werden die q_i erreicht?**

q_0 : Gleiche Wörter wie q_1 oder q_2

q_1 : Letztes Symbol ist ein a , davor b 's oder a 's

q_2 : Letztes Symbol ist ein b , davor a 's oder b 's

q_3 : Letztes Symbol ist ein c



NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)

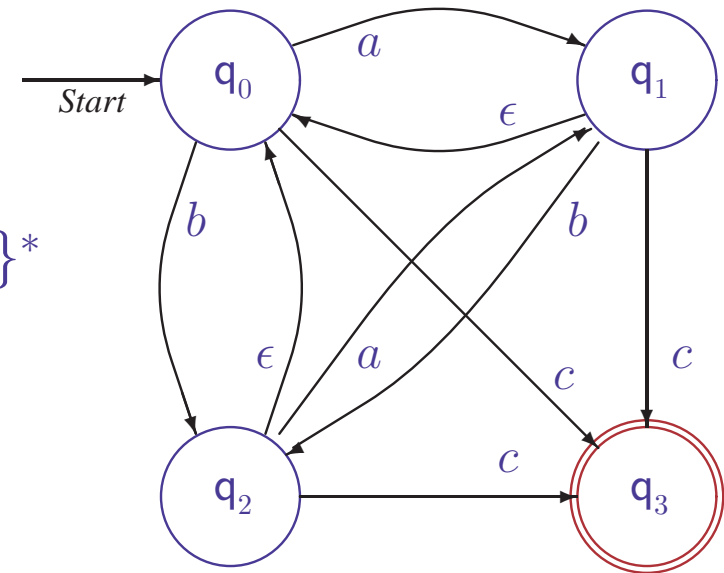
- **Mit welchen Wörtern werden die q_i erreicht?**

q_0 : Gleiche Wörter wie q_1 oder q_2 und ϵ , also $\{a, b\}^*$

q_1 : Letztes Symbol ist ein a , davor b 's oder a 's

q_2 : Letztes Symbol ist ein b , davor a 's oder b 's

q_3 : Letztes Symbol ist ein c



NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)

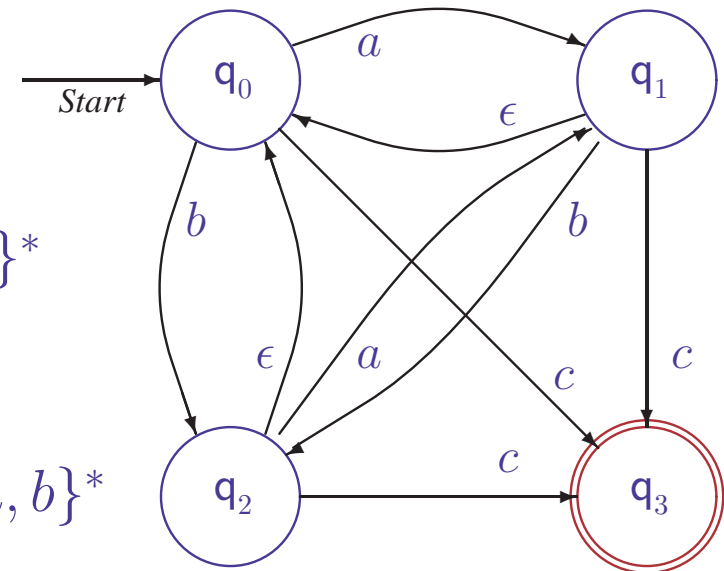
- **Mit welchen Wörtern werden die q_i erreicht?**

q_0 : Gleiche Wörter wie q_1 oder q_2 und ϵ , also $\{a, b\}^*$

q_1 : Letztes Symbol ist ein a , davor b 's oder a 's

q_2 : Letztes Symbol ist ein b , davor a 's oder b 's

q_3 : Letztes Symbol ist ein c , davor ein Wort aus $\{a, b\}^*$



NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)

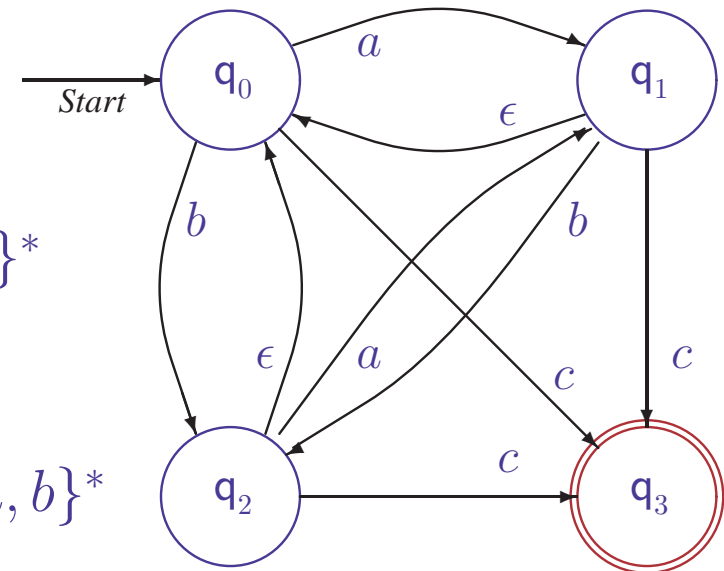
- **Mit welchen Wörtern werden die q_i erreicht?**

q_0 : Gleiche Wörter wie q_1 oder q_2 und ϵ , also $\{a, b\}^*$

q_1 : Letztes Symbol ist ein a , davor b 's oder a 's

q_2 : Letztes Symbol ist ein b , davor a 's oder b 's

q_3 : Letztes Symbol ist ein c , davor ein Wort aus $\{a, b\}^*$



- **Formuliere Aussage mit Konfigurationen**

$$S_0(w): (q_0, w) \vdash^* (q_0, \epsilon) \Leftrightarrow w \in \{a, b\}^*$$

$$S_1(w): (q_0, w) \vdash^* (q_1, \epsilon) \Leftrightarrow w = ua \text{ für ein } u \in \{a, b\}^*$$

$$S_2(w): (q_0, w) \vdash^* (q_2, \epsilon) \Leftrightarrow w = ub \text{ für ein } u \in \{a, b\}^*$$

$$S_3(w): (q_0, w) \vdash^* (q_3, \epsilon) \Leftrightarrow w = uc \text{ für ein } u \in \{a, b\}^*$$

Formulierung ungeeignet für Induktionsbeweise

NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)

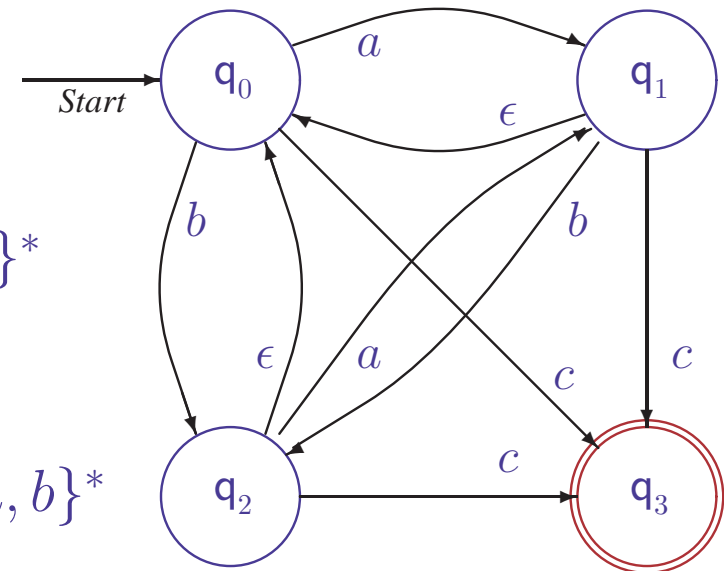
- **Mit welchen Wörtern werden die q_i erreicht?**

q_0 : Gleiche Wörter wie q_1 oder q_2 und ϵ , also $\{a, b\}^*$

q_1 : Letztes Symbol ist ein a , davor b 's oder a 's

q_2 : Letztes Symbol ist ein b , davor a 's oder b 's

q_3 : Letztes Symbol ist ein c , davor ein Wort aus $\{a, b\}^*$



- **Formuliere Aussage mit Konfigurationen**

$S_0(w)$: $(q_0, wv) \vdash^* (q_0, v) \Leftrightarrow w \in \{a, b\}^*$

$S_1(w)$: $(q_0, wv) \vdash^* (q_1, v) \Leftrightarrow w = ua$ für ein $u \in \{a, b\}^*$

$S_2(w)$: $(q_0, wv) \vdash^* (q_2, v) \Leftrightarrow w = ub$ für ein $u \in \{a, b\}^*$

$S_3(w)$: $(q_0, w) \vdash^* (q_3, \epsilon) \Leftrightarrow w = uc$ für ein $u \in \{a, b\}^*$

Besser: erlaube, daß nach Abarbeitung von w ein Restwort v noch ungelesen ist

NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)

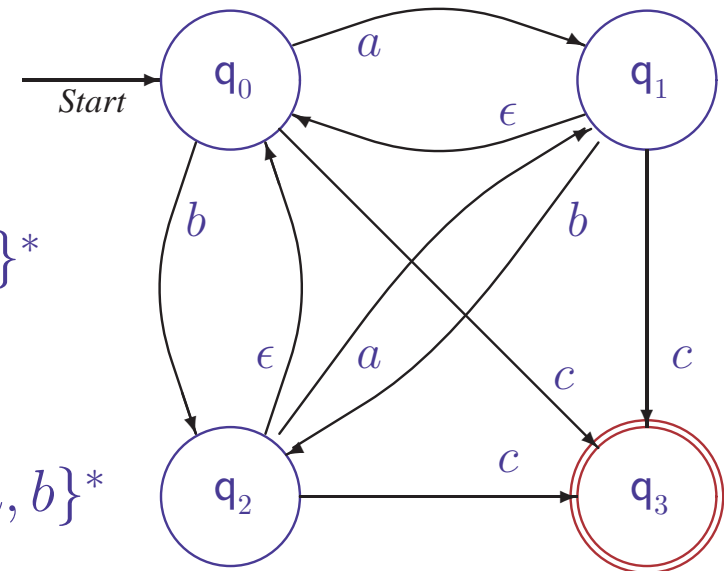
- **Mit welchen Wörtern werden die q_i erreicht?**

q_0 : Gleiche Wörter wie q_1 oder q_2 und ϵ , also $\{a, b\}^*$

q_1 : Letztes Symbol ist ein a , davor b 's oder a 's

q_2 : Letztes Symbol ist ein b , davor a 's oder b 's

q_3 : Letztes Symbol ist ein c , davor ein Wort aus $\{a, b\}^*$



- **Formuliere Aussage mit Konfigurationen**

$S_0(w)$: $(q_0, wv) \vdash^* (q_0, v) \Leftrightarrow w \in \{a, b\}^*$

$S_1(w)$: $(q_0, wv) \vdash^* (q_1, v) \Leftrightarrow w = ua$ für ein $u \in \{a, b\}^*$

$S_2(w)$: $(q_0, wv) \vdash^* (q_2, v) \Leftrightarrow w = ub$ für ein $u \in \{a, b\}^*$

$S_3(w)$: $(q_0, w) \vdash^* (q_3, \epsilon) \Leftrightarrow w = uc$ für ein $u \in \{a, b\}^*$

Behauptung S_3 folgt unmittelbar aus S_0 – S_2

NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)

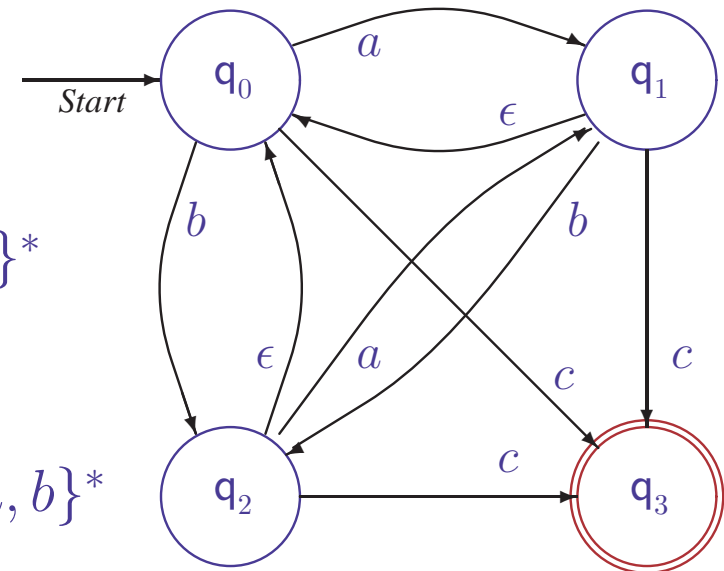
- **Mit welchen Wörtern werden die q_i erreicht?**

q_0 : Gleiche Wörter wie q_1 oder q_2 und ϵ , also $\{a, b\}^*$

q_1 : Letztes Symbol ist ein a , davor b 's oder a 's

q_2 : Letztes Symbol ist ein b , davor a 's oder b 's

q_3 : Letztes Symbol ist ein c , davor ein Wort aus $\{a, b\}^*$



- **Formuliere Aussage mit Konfigurationen**

$S_0(w)$: $(q_0, wv) \vdash^* (q_0, v) \Leftrightarrow w \in \{a, b\}^*$

$S_1(w)$: $(q_0, wv) \vdash^* (q_1, v) \Leftrightarrow w = ua$ für ein $u \in \{a, b\}^*$

$S_2(w)$: $(q_0, wv) \vdash^* (q_2, v) \Leftrightarrow w = ub$ für ein $u \in \{a, b\}^*$

$S_3(w)$: $(q_0, w) \vdash^* (q_3, \epsilon) \Leftrightarrow w = uc$ für ein $u \in \{a, b\}^*$

Behauptung S_3 folgt unmittelbar aus S_0 – S_2

- **Es folgt $L(A) = \{w \mid (q_0, w) \vdash^* (q_3, \epsilon)\} = \{w \mid \exists u \in \{a, b\}^*. w = uc\}$**

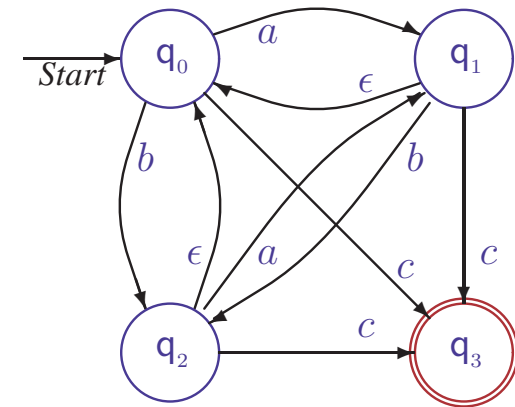
INDUKTIVER BEWEIS FÜR NEA'S MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN

- Zeige simultan für alle Wörter $w, v \in \{a, b, c\}^*$:

$$S_0(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_0, v) \Leftrightarrow w \in \{a, b\}^*$$

$$S_1(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_1, v) \Leftrightarrow w = ua \text{ für ein } u \in \{a, b\}^*$$

$$S_2(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_2, v) \Leftrightarrow w = ub \text{ für ein } u \in \{a, b\}^*$$



INDUKTIVER BEWEIS FÜR NEA'S MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN

- Zeige simultan für alle Wörter $w, v \in \{a, b, c\}^*$:

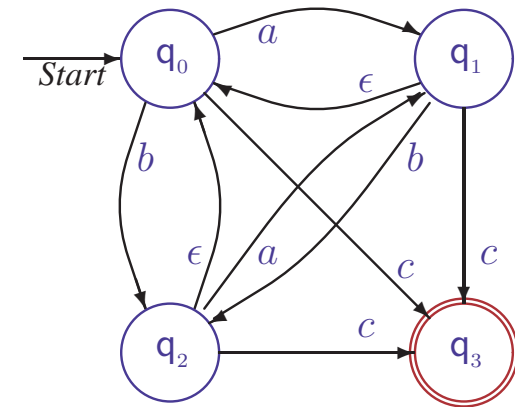
$$S_0(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_0, v) \Leftrightarrow w \in \{a, b\}^*$$

$$S_1(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_1, v) \Leftrightarrow w = ua \text{ für ein } u \in \{a, b\}^*$$

$$S_2(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_2, v) \Leftrightarrow w = ub \text{ für ein } u \in \{a, b\}^*$$

- Induktionsanfang $w = \epsilon$

– Per Definition gilt $(q_0, v) \vdash^* (q_0, v)$ und $w \in \{a, b\}^*$, und $w \neq ua, w \neq ub$ ✓



INDUKTIVER BEWEIS FÜR NEA'S MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN

- **Zeige simultan für alle Wörter $w, v \in \{a, b, c\}^*$:**

$$S_0(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_0, v) \Leftrightarrow w \in \{a, b\}^*$$

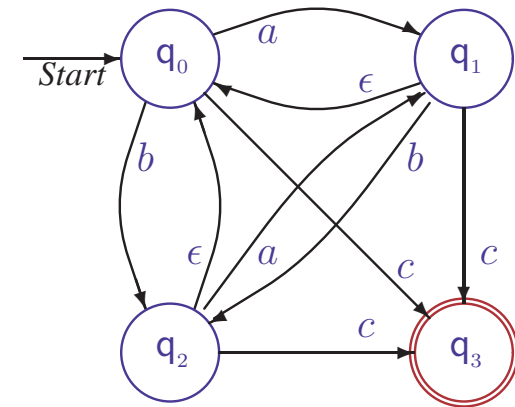
$$S_1(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_1, v) \Leftrightarrow w = ua \text{ für ein } u \in \{a, b\}^*$$

$$S_2(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_2, v) \Leftrightarrow w = ub \text{ für ein } u \in \{a, b\}^*$$

- **Induktionsanfang $w = \epsilon$**

– Per Definition gilt $(q_0, v) \vdash^* (q_0, v)$ und $w \in \{a, b\}^*$, und $w \neq ua, w \neq ub$ ✓

- **Induktionsannahme: $S_0(w')-S_2(w')$ sei gezeigt für $w' \in \{a, b, c\}^*$**



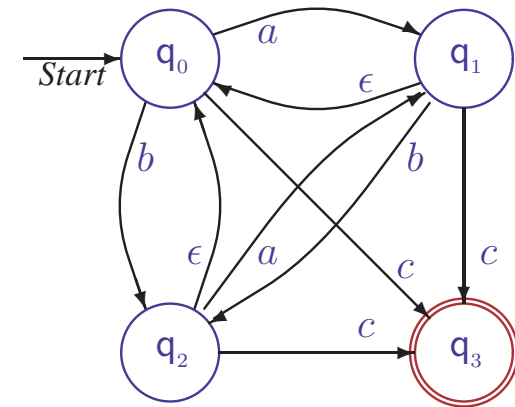
INDUKTIVER BEWEIS FÜR NEA'S MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN

- **Zeige simultan für alle Wörter $w, v \in \{a, b, c\}^*$:**

$$S_0(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_0, v) \Leftrightarrow w \in \{a, b\}^*$$

$$S_1(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_1, v) \Leftrightarrow w = ua \text{ für ein } u \in \{a, b\}^*$$

$$S_2(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_2, v) \Leftrightarrow w = ub \text{ für ein } u \in \{a, b\}^*$$



- **Induktionsanfang $w = \epsilon$**

– Per Definition gilt $(q_0, v) \vdash^* (q_0, v)$ und $w \in \{a, b\}^*$, und $w \neq ua, w \neq ub$ ✓

- **Induktionsannahme: $S_0(w')-S_2(w')$ sei gezeigt für $w' \in \{a, b, c\}^*$**

- **Induktionsschritt: sei $w = w'x$ für ein beliebiges $x \in \{a, b, c\}$**

$$S_1(w): (q_0, w'xv) \vdash^* (q_1, v) \Leftrightarrow (q_0, w'xv) \vdash^* (q_{0/2}, xv) \vdash (q_1, v)$$

$$(S_0(w'), S_2(w')) \Leftrightarrow (w' \in \{a, b\}^* \vee \exists u \in \{a, b\}^*. w' = ub) \wedge x = a \quad \checkmark$$

$$S_2(w): (q_0, w'xv) \vdash^* (q_2, v) \Leftrightarrow (q_0, w'xv) \vdash^* (q_{0/1}, xv) \vdash (q_2, v)$$

$$(S_0(w'), S_1(w')) \Leftrightarrow (w' \in \{a, b\}^* \vee \exists u \in \{a, b\}^*. w' = ua) \wedge x = b \quad \checkmark$$

$$S_0(w): (q_0, wv) \vdash^* (q_0, v) \Leftrightarrow (q_0, wv) \vdash^* (q_1, v) \vee (q_0, wv) \vdash^* (q_2, v)$$

$$(S_1(w), S_2(w)) \Leftrightarrow \exists u \in \{a, b\}^*. w = ua \vee \exists u \in \{a, b\}^*. w = ub \Leftrightarrow w \in \{a, b\}^* \quad \checkmark$$

- **Nichtdeterministische Automaten sind flexibler**
 - Man muss sich nicht auf eine genaue Verarbeitungsfolge festlegen
 - Man kann optionale Eingaben elegant verarbeiten

- **Nichtdeterministische Automaten sind flexibler**
 - Man muss sich nicht auf eine genaue Verarbeitungsfolge festlegen
 - Man kann optionale Eingaben elegant verarbeiten
- **DEAs sind genauso ausdrucksstark wie ϵ -NEAs**
 - Man kann Mengen von ϵ -NEA-Zuständen als DEA Zustände codieren
 - Man kann mengenwertige Zustandsüberföhrungsfunktionen codieren

- **Nichtdeterministische Automaten sind flexibler**

- Man muss sich nicht auf eine genaue Verarbeitungsfolge festlegen
- Man kann optionale Eingaben elegant verarbeiten

- **DEAs sind genauso ausdrucksstark wie ϵ -NEAs**

- Man kann Mengen von ϵ -NEA-Zuständen als DEA Zustände codieren
- Man kann mengenwertige Zustandsüberföhrungsfunktionen codieren

- **(Potenzmengen- oder) Teilmengenkonstruktion**

- Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein nichtdeterministischer Automat
- Konstruiere äquivalenten DEA $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ mit

$Q_D \subseteq \mathcal{P}(Q_N)$: (Jeder Zustand entspricht einer Menge von Zuständen)

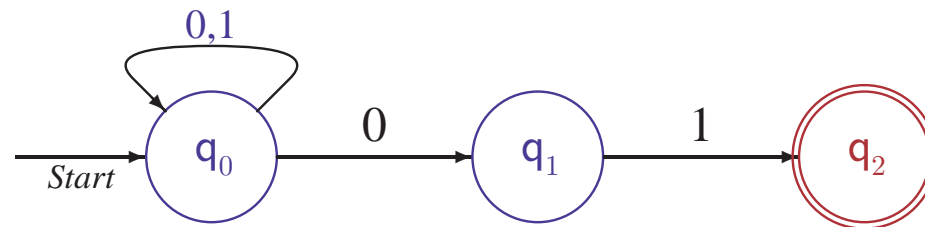
$q_D = \epsilon$ -Hölle(q_0) (Die anfangs erreichbaren Zustände von A_N , $\{q_0\}$ bei NEAs)

$\delta_D(S, a) = \{p \mid \exists q \in S. p \in \hat{\delta}_N(q, a)\}$ (Die von allen $q \in S$ erreichbaren Zustände)

$F_D = \{S \in Q_D \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$ ($S \in F_D \hat{=} \text{ein Endzustand von } A_N \text{ ist erreichbar}$)

- Naive Konstruktion benötigt $2^{|Q_N|}$ Zustände
- Optimierte Teilmengenkonstruktion erzeugt nur “notwendige” Zustände

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR NEAs

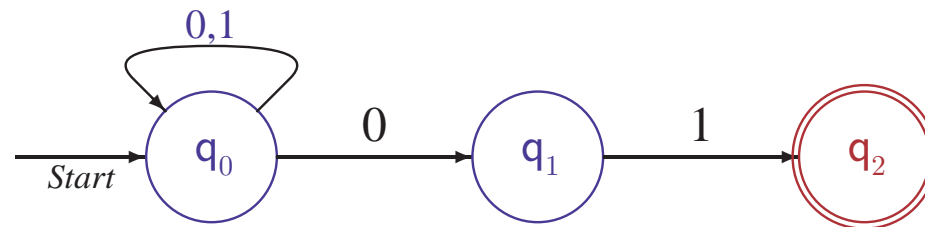


- **Konstruktion von Zustandsmengen und (reduzierter) Überföhrungsfunktion**

	0	1
$\rightarrow \{q_0\}$		

$$Q_0 := \{\{q_0\}\}$$

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR NEAs



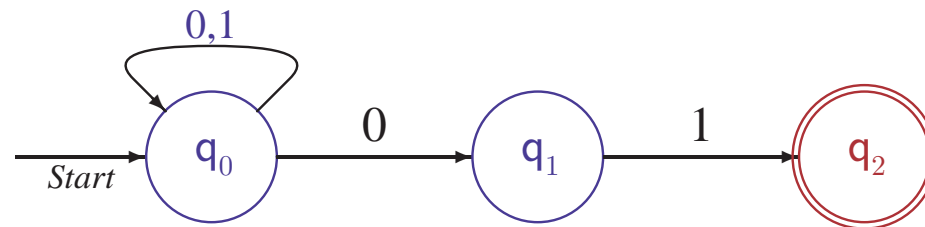
- **Konstruktion von Zustandsmengen und (reduzierter) Überföhrungsfunktion**

	0	1
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$		

$$Q_0 := \{\{q_0\}\}$$

$$Q_1 := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}\}$$

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR NEAs



- **Konstruktion von Zustandsmengen und (reduzierter) Überföhrungsfunktion**

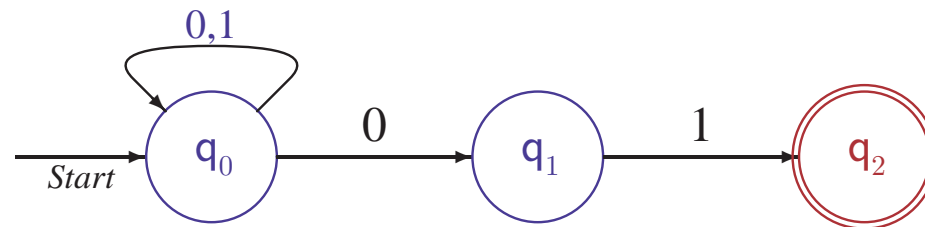
	0	1
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
* $\{q_0, q_2\}$		

$$Q_0 := \{\{q_0\}\}$$

$$Q_1 := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}\}$$

$$Q_2 := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}\}$$

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR NEAs



- **Konstruktion von Zustandsmengen und (reduzierter) Überföhrungsfunktion**

	0	1
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
* $\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

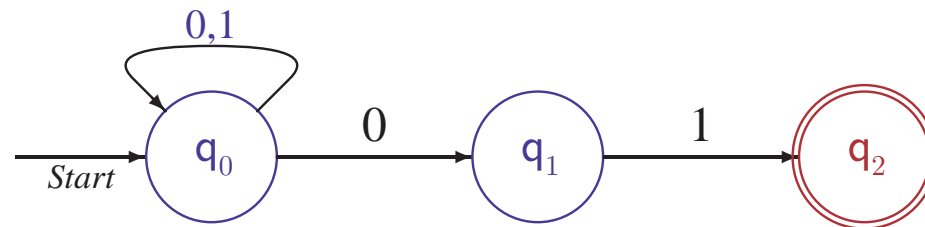
$$Q_0 := \{\{q_0\}\}$$

$$Q_1 := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}\}$$

$$Q_2 := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}\}$$

$$Q_3 = Q_2, \text{ also } Q_D = Q_2,$$

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR NEAs



- **Konstruktion von Zustandsmengen und (reduzierter) Überföhrungsfunktion**

	0	1
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
* $\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

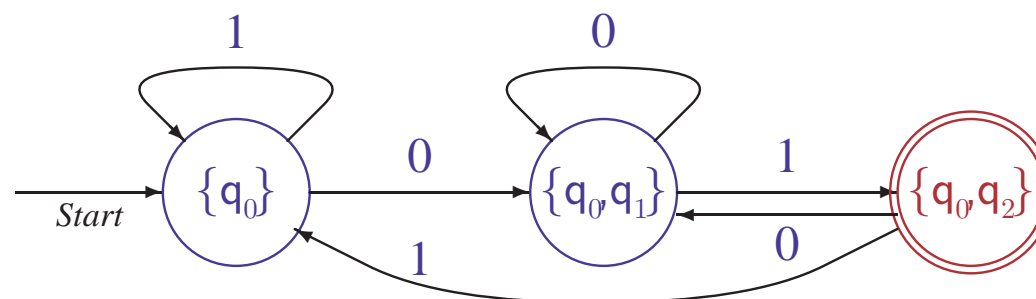
$$Q_0 := \{\{q_0\}\}$$

$$Q_1 := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}\}$$

$$Q_2 := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}\}$$

$$Q_3 = Q_2, \text{ also } Q_D = Q_2,$$

- **Resultierender deterministischer Automat**



- **Optimierung: $Q_D \hat{=}$ erreichbare Zustände**

- Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein nichtdeterministischer Automat

- Für $S \subseteq Q_N$ definiere $\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \hat{\delta}_N(q, a) = \{p \mid \exists q \in S. p \in \hat{\delta}_N(q, a)\}$
(erfaßt ϵ -Hülle)

- **Optimierung: $Q_D \hat{=}$ erreichbare Zustände**

- Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein nichtdeterministischer Automat

- Für $S \subseteq Q_N$ definiere $\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta_N(q, a) = \{p \mid \exists q \in S. p \in \delta_N(q, a)\}$
(erfaßt ϵ -Hülle)

- Konstruiere Zustandsmenge Q_D iterativ gleichzeitig mit δ_D

Start: $Q_0 := \{q_D\} = \{\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0)\}$

Schritt: $Q_{i+1} := Q_i \cup \{\delta_D(S, a) \mid S \in Q_i, a \in \Sigma\}$

Abschluss: Wenn $Q_{i+1} = Q_i$, dann halte an und setze $Q_D := Q_i$

- **Optimierung: $Q_D \hat{=}$ erreichbare Zustände**

- Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein nichtdeterministischer Automat

- Für $S \subseteq Q_N$ definiere $\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \hat{\delta}_N(q, a) = \{p \mid \exists q \in S. p \in \hat{\delta}_N(q, a)\}$
(erfaßt ϵ -Hülle)

- Konstruiere Zustandsmenge Q_D iterativ gleichzeitig mit δ_D

Start: $Q_0 := \{q_D\} = \{\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0)\}$

Schritt: $Q_{i+1} := Q_i \cup \{\delta_D(S, a) \mid S \in Q_i, a \in \Sigma\}$

Abschluss: Wenn $Q_{i+1} = Q_i$, dann halte an und setze $Q_D := Q_i$

- Setze $q_D = \epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0)$ und $F_D = \{S \in Q_D \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$

- **Optimierung: $Q_D \hat{=}$ erreichbare Zustände**

- Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein nichtdeterministischer Automat

- Für $S \subseteq Q_N$ definiere $\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \hat{\delta}_N(q, a) = \{p \mid \exists q \in S. p \in \hat{\delta}_N(q, a)\}$
(erfaßt ϵ -Hülle)

- Konstruiere Zustandsmenge Q_D iterativ gleichzeitig mit δ_D

- Start: $Q_0 := \{q_D\} = \{\epsilon\text{-Hülle}(q_0)\}$

- Schritt: $Q_{i+1} := Q_i \cup \{\delta_D(S, a) \mid S \in Q_i, a \in \Sigma\}$

- Abschluss: Wenn $Q_{i+1} = Q_i$, dann halte an und setze $Q_D := Q_i$

- Setze $q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0)$ und $F_D = \{S \in Q_D \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$

- **ϵ -NEAs und DEAs akzeptieren dieselben Sprachen**

- Jeder DEA ist als “eindeutiger” ϵ -NEA beschreibbar

Für den konstruierten DEA gilt $L(A_D) = L(A_N)$

Zeige: $\hat{\delta}_D(q_D, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$ für alle $w \in \Sigma^*$

Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau der Wörter aus Σ^*

– **Basisfall:** Sei $w = \epsilon$:

$$\hat{\delta}_D(q_D, \epsilon) = q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \hat{\delta}_N(q_0, \epsilon)$$

– **Induktionsschritt:** Sei $w = va$ für ein $v \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$:

– **Induktionsannahme:** Es gelte $\hat{\delta}_D(q_D, v) = \hat{\delta}_N(q_0, v)$

Dann gilt $\hat{\delta}_D(q_D, w)$

$$= \delta_D(\hat{\delta}_D(q_D, v), a) \quad (\text{Definition } \hat{\delta} \text{ deterministisch})$$

$$= \delta_D(\hat{\delta}_N(q_0, v), a) \quad (\text{Induktionsannahme})$$

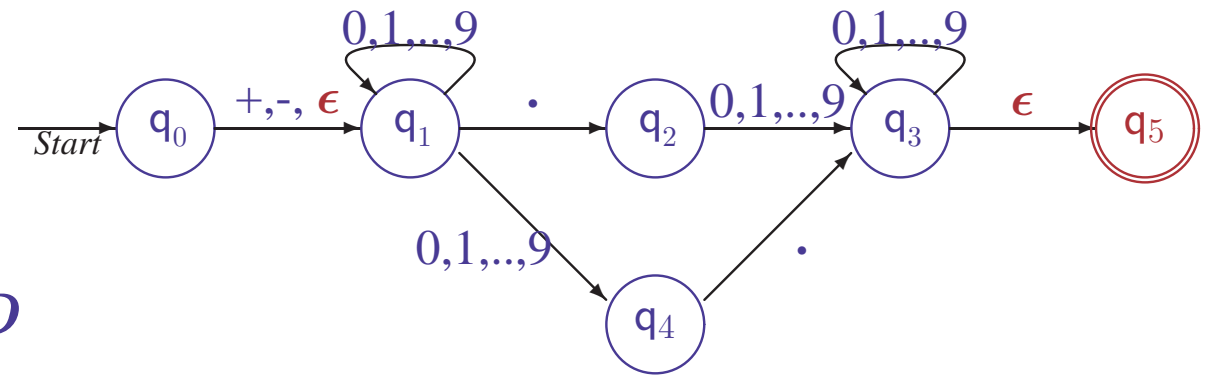
$$= \bigcup_{q' \in \hat{\delta}_N(q_0, v)} \delta_N(q', a) \quad (\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta_N(q, a))$$

$$= \bigcup_{q' \in \hat{\delta}_N(q_0, v)} \bigcup_{q'' \in \delta_N(q', a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') \quad (\text{Definition } \hat{\delta}_N(q', a))$$

$$= \hat{\delta}_N(q_0, w) \quad (\text{Definition } \hat{\delta}_N(q', va))$$

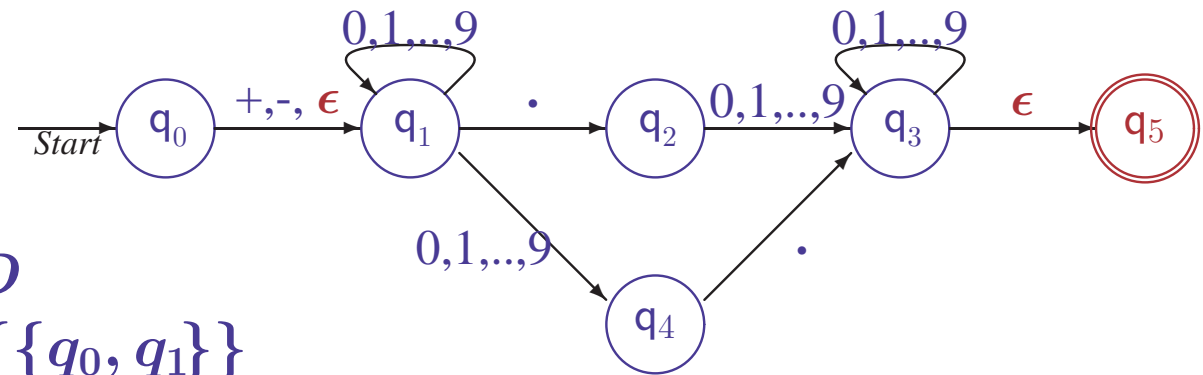
Es folgt $L(A_D) = \{w \mid \hat{\delta}_D(q_D, w) \in F_D\} = \{w \mid \hat{\delta}_N(q_0, w) \cap F_N \neq \emptyset\} = L(A_N)$

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR ϵ -NEAS



- Konstruiere Q_D und δ_D

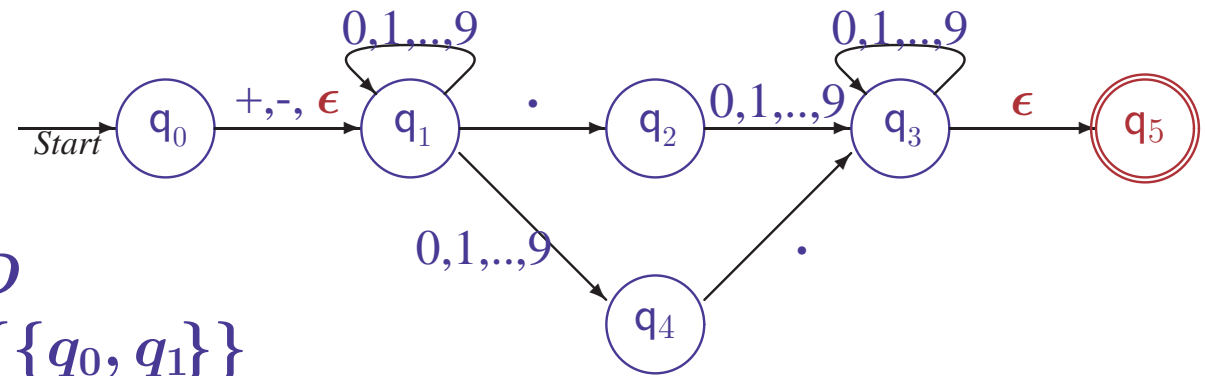
OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR ϵ -NEAS



- **Konstruiere Q_D und δ_D**

$$Q_0 = \{q_D\} = \{\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0)\} = \{\{q_0, q_1\}\}$$

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR ϵ -NEAS

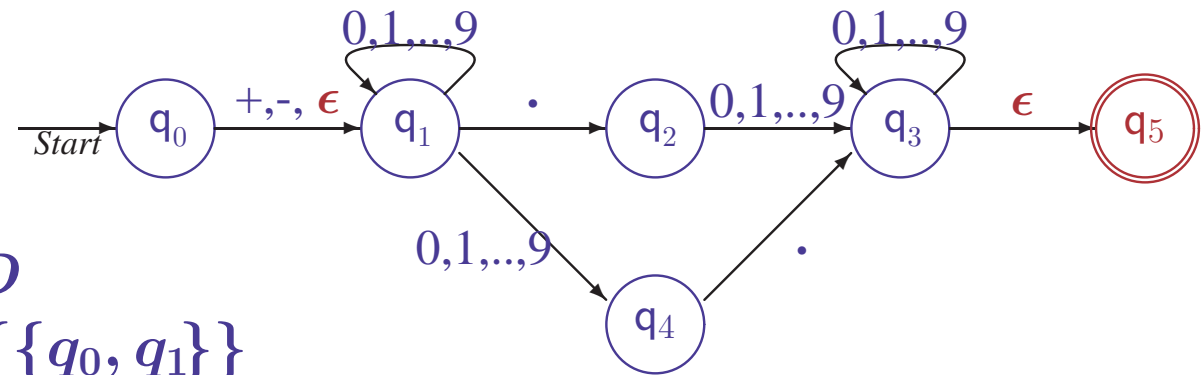


- **Konstruiere Q_D und δ_D**

$$Q_0 = \{q_D\} = \{\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0)\} = \{\{q_0, q_1\}\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, +) = \{q_1\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, -) = \{q_1\}$$

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR ϵ -NEAS



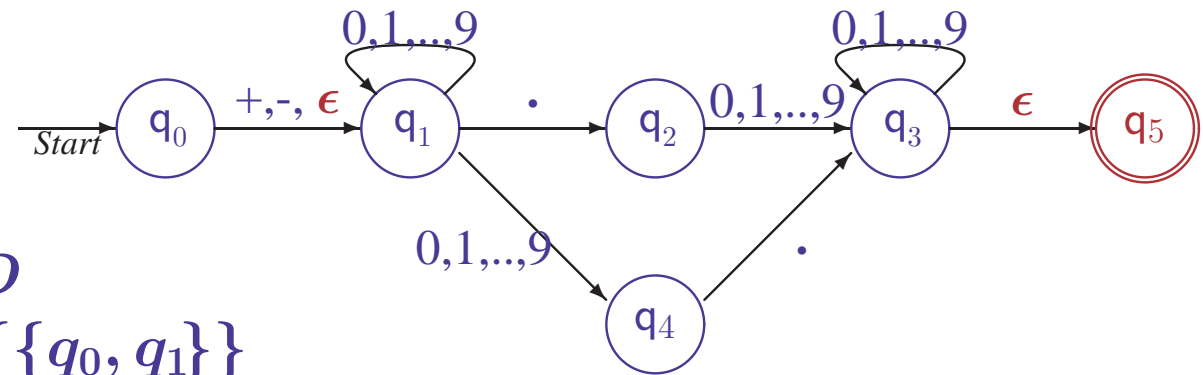
• Konstruiere Q_D und δ_D

$$Q_0 = \{q_D\} = \{\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0)\} = \{\{q_0, q_1\}\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, +) = \{q_1\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, -) = \{q_1\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_1, q_4\}, \dots \delta_D(\{q_0, q_1\}, 9) = \{q_1, q_4\},$$

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR ϵ -NEAS



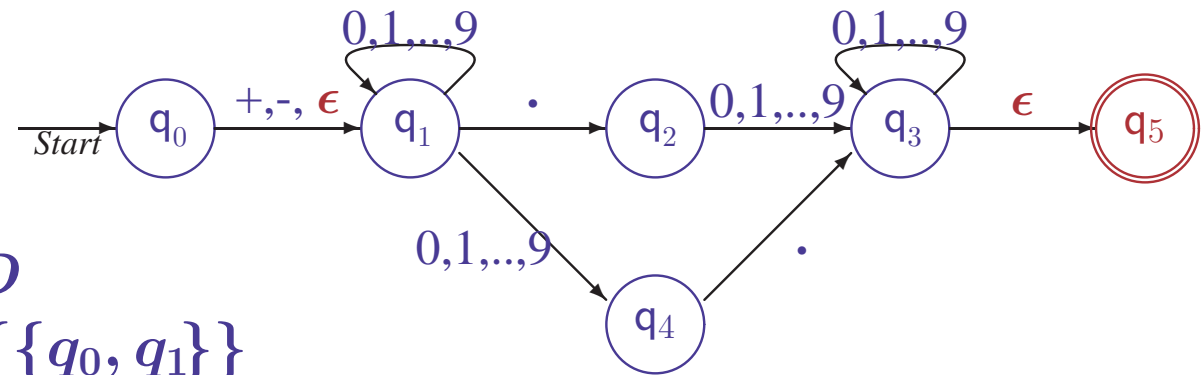
• Konstruiere Q_D und δ_D

$$Q_0 = \{q_D\} = \{\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0)\} = \{\{q_0, q_1\}\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, +) = \{q_1\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, -) = \{q_1\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_1, q_4\}, \dots \delta_D(\{q_0, q_1\}, 9) = \{q_1, q_4\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, \cdot) = \{q_2\}$$

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR ϵ -NEAS



• Konstruiere Q_D und δ_D

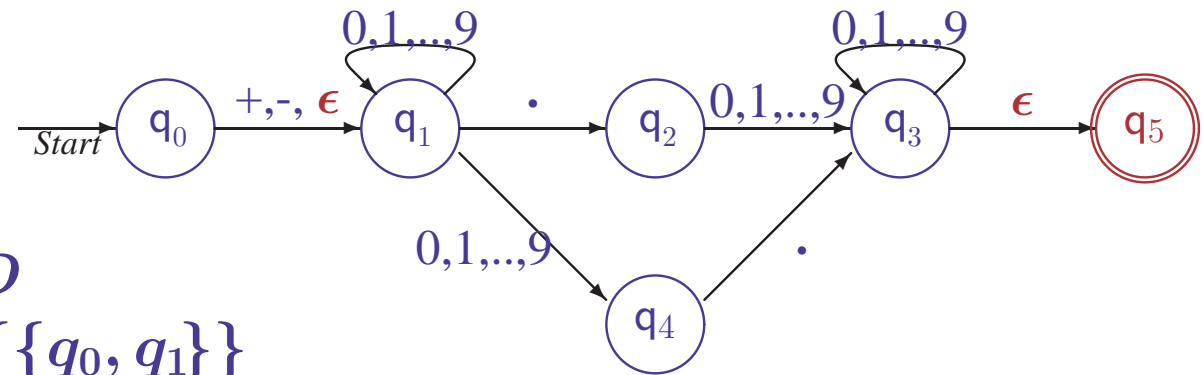
$$Q_0 = \{q_D\} = \{\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0)\} = \{\{q_0, q_1\}\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, +) = \{q_1\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, -) = \{q_1\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_1, q_4\}, \dots \delta_D(\{q_0, q_1\}, 9) = \{q_1, q_4\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, \cdot) = \{q_2\}$$

$$Q_1 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\} \}$$

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR ϵ -NEAS



• Konstruiere Q_D und δ_D

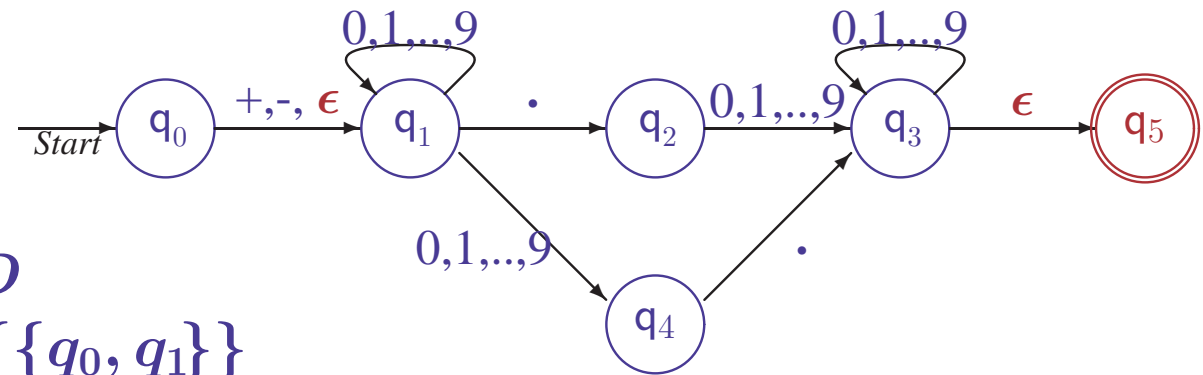
$$Q_0 = \{q_D\} = \{\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0)\} = \{\{q_0, q_1\}\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, +) = \{q_1\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, -) = \{q_1\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_1, q_4\}, \dots, \delta_D(\{q_0, q_1\}, 9) = \{q_1, q_4\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, \cdot) = \{q_2\}$$

$$Q_1 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\} \}$$

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR ϵ -NEAS



• Konstruiere Q_D und δ_D

$$Q_0 = \{q_D\} = \{\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0)\} = \{\{q_0, q_1\}\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, +) = \{q_1\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, -) = \{q_1\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_1, q_4\}, \dots \delta_D(\{q_0, q_1\}, 9) = \{q_1, q_4\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, \cdot) = \{q_2\}$$

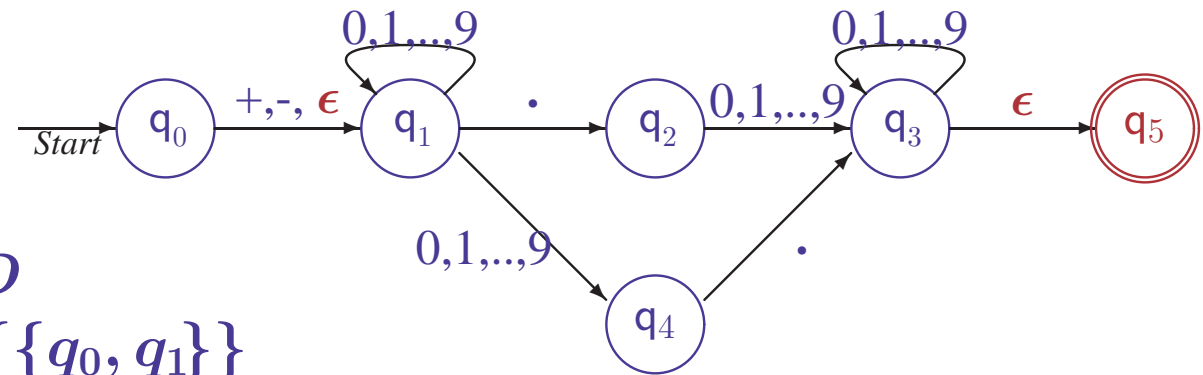
$$Q_1 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\} \}$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, +) = \delta_D(\{q_2\}, +) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, +) = \emptyset, \dots$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, 0) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, 0) = \{q_1, q_4\} \quad \delta_D(\{q_2\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \dots$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, \cdot) = \{q_2\}, \quad \delta_D(\{q_2\}, \cdot) = \emptyset \quad \delta_D(\{q_1, q_4\}, \cdot) = \{q_2, q_3, q_5\}$$

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR ϵ -NEAs



• Konstruiere Q_D und δ_D

$$Q_0 = \{q_D\} = \{\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0)\} = \{\{q_0, q_1\}\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, +) = \{q_1\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, -) = \{q_1\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_1, q_4\}, \dots \delta_D(\{q_0, q_1\}, 9) = \{q_1, q_4\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, \cdot) = \{q_2\}$$

$$Q_1 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\} \}$$

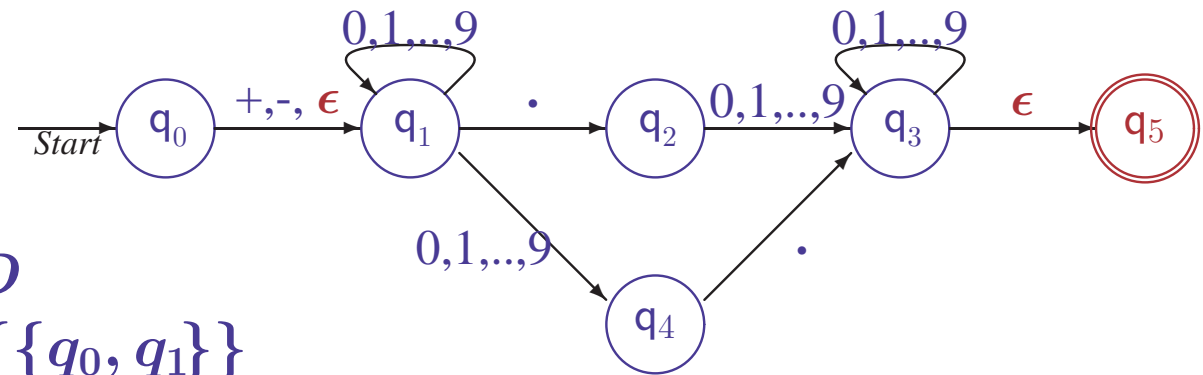
$$- \delta_D(\{q_1\}, +) = \delta_D(\{q_2\}, +) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, +) = \emptyset, \dots$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, 0) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, 0) = \{q_1, q_4\} \quad \delta_D(\{q_2\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \dots$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, \cdot) = \{q_2\}, \quad \delta_D(\{q_2\}, \cdot) = \emptyset \quad \delta_D(\{q_1, q_4\}, \cdot) = \{q_2, q_3, q_5\}$$

$$Q_2 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}, \emptyset, \{q_3, q_5\}, \{q_2, q_3, q_5\} \}$$

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR ϵ -NEAS



• Konstruiere Q_D und δ_D

$$Q_0 = \{q_D\} = \{\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0)\} = \{\{q_0, q_1\}\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, +) = \{q_1\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, -) = \{q_1\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_1, q_4\}, \dots \delta_D(\{q_0, q_1\}, 9) = \{q_1, q_4\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, \cdot) = \{q_2\}$$

$$Q_1 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\} \}$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, +) = \delta_D(\{q_2\}, +) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, +) = \emptyset, \dots$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, 0) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, 0) = \{q_1, q_4\} \quad \delta_D(\{q_2\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \dots$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, \cdot) = \{q_2\}, \quad \delta_D(\{q_2\}, \cdot) = \emptyset \quad \delta_D(\{q_1, q_4\}, \cdot) = \{q_2, q_3, q_5\}$$

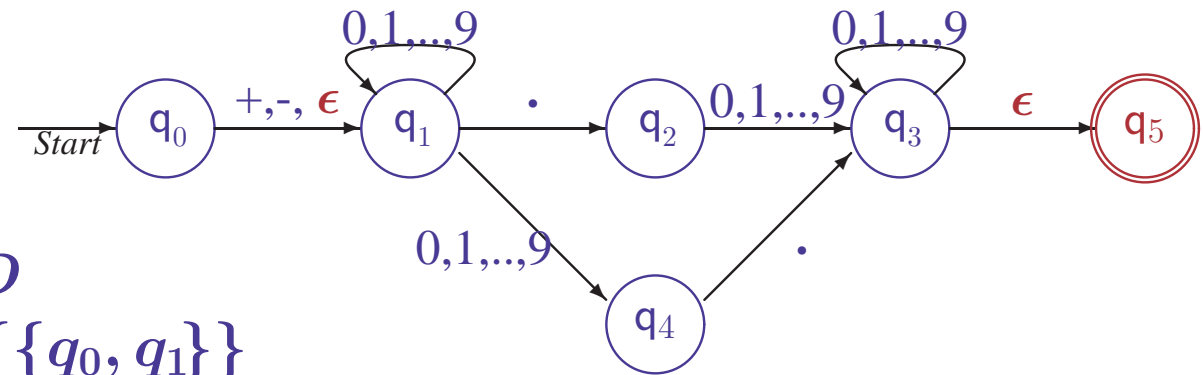
$$Q_2 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}, \emptyset, \{q_3, q_5\}, \{q_2, q_3, q_5\} \}$$

$$- \delta_D(\emptyset, +) = \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, +) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, +) = \emptyset, \dots$$

$$- \delta_D(\emptyset, 0) = \emptyset, \quad \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, 0) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \dots$$

$$- \delta_D(\emptyset, \cdot) = \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, \cdot) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, \cdot) = \emptyset$$

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR ϵ -NEAS



• Konstruiere Q_D und δ_D

$$Q_0 = \{q_D\} = \{\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0)\} = \{\{q_0, q_1\}\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, +) = \{q_1\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, -) = \{q_1\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_1, q_4\}, \dots \delta_D(\{q_0, q_1\}, 9) = \{q_1, q_4\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, \cdot) = \{q_2\}$$

$$Q_1 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\} \}$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, +) = \delta_D(\{q_2\}, +) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, +) = \emptyset, \dots$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, 0) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, 0) = \{q_1, q_4\} \quad \delta_D(\{q_2\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \dots$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, \cdot) = \{q_2\}, \quad \delta_D(\{q_2\}, \cdot) = \emptyset \quad \delta_D(\{q_1, q_4\}, \cdot) = \{q_2, q_3, q_5\}$$

$$Q_2 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}, \emptyset, \{q_3, q_5\}, \{q_2, q_3, q_5\} \}$$

$$- \delta_D(\emptyset, +) = \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, +) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, +) = \emptyset, \dots$$

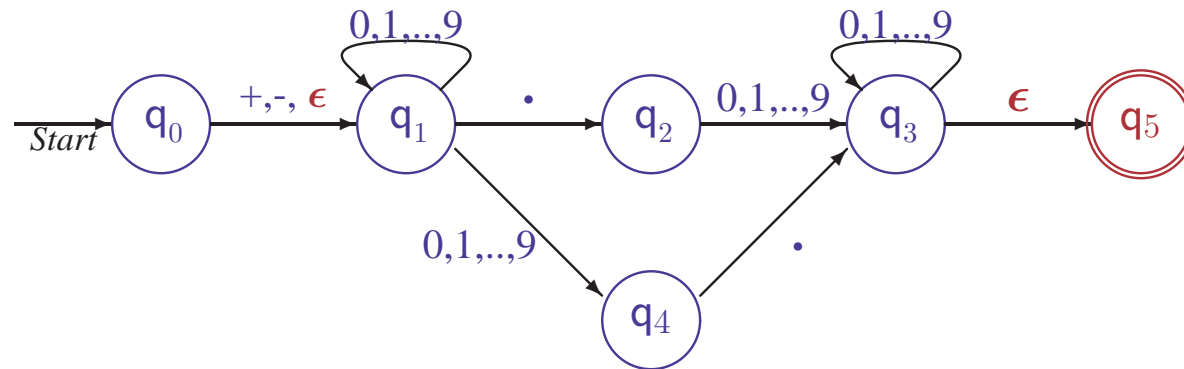
$$- \delta_D(\emptyset, 0) = \emptyset, \quad \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, 0) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \dots$$

$$- \delta_D(\emptyset, \cdot) = \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, \cdot) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, \cdot) = \emptyset$$

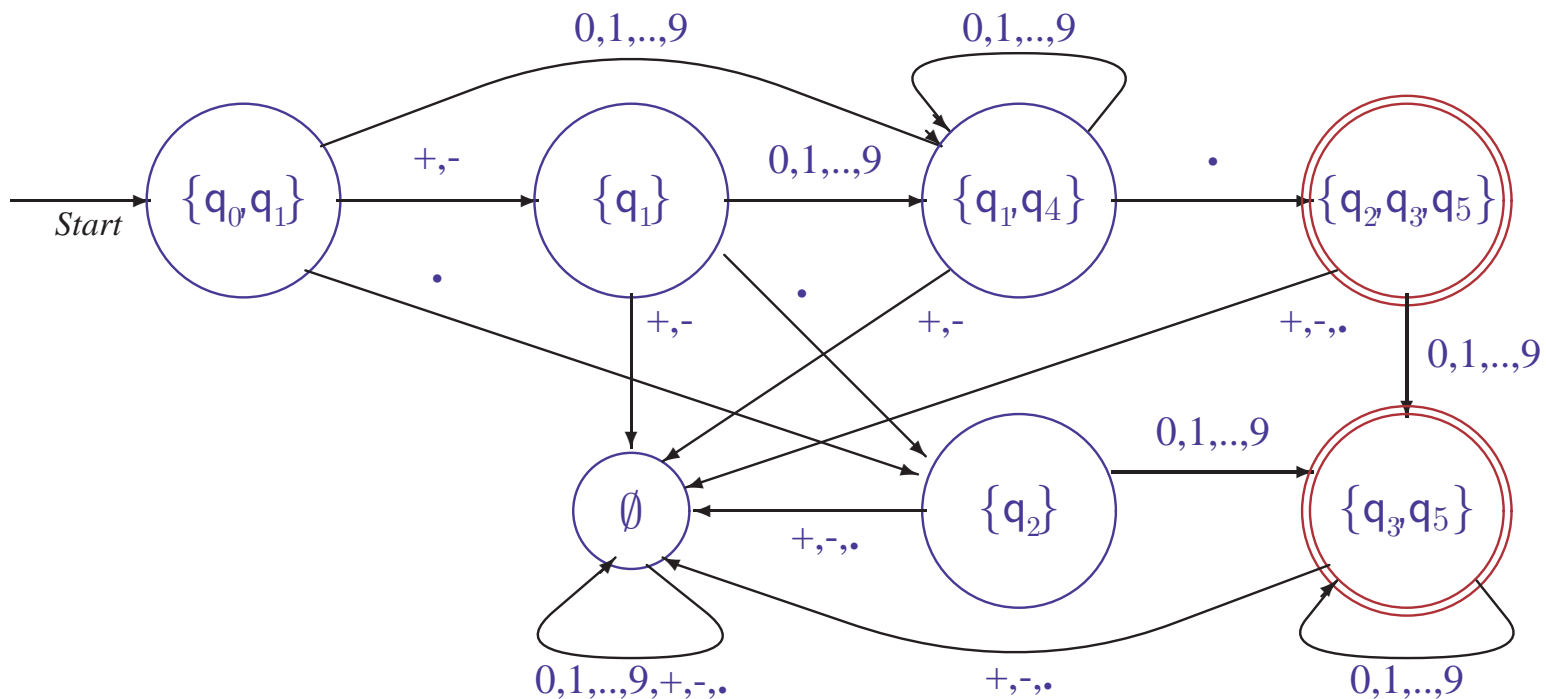
$$Q_3 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}, \emptyset, \{q_3, q_5\}, \{q_2, q_3, q_5\} \} = Q_2 =: Q_D$$

ERZEUGTER DEA FÜR DEZIMALZÄHLERKENNUNG

Ursprünglicher ϵ -NEA

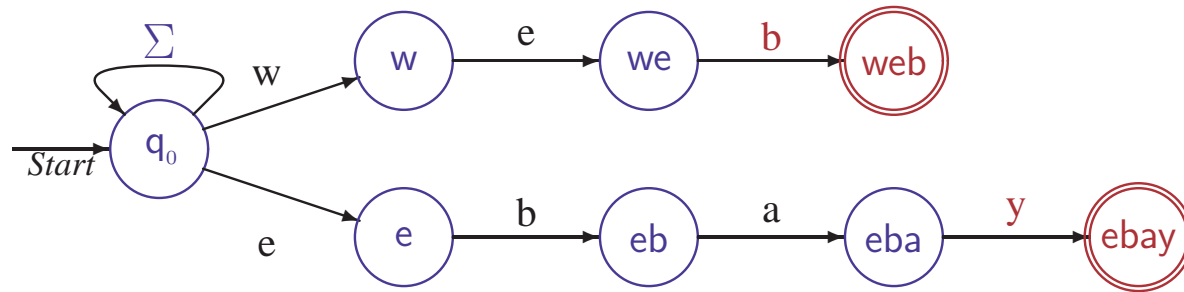


Generierter DEA



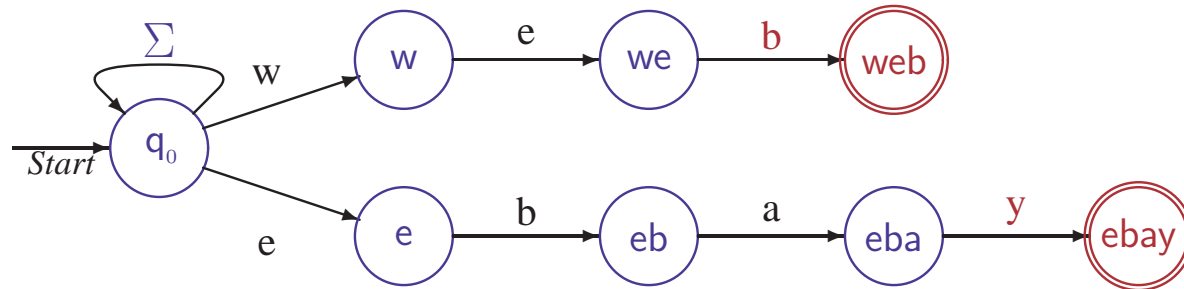
DETERMINISTISCHE AUTOMATEN FÜR TEXTANALYSE

Ursprünglicher ϵ -NEA

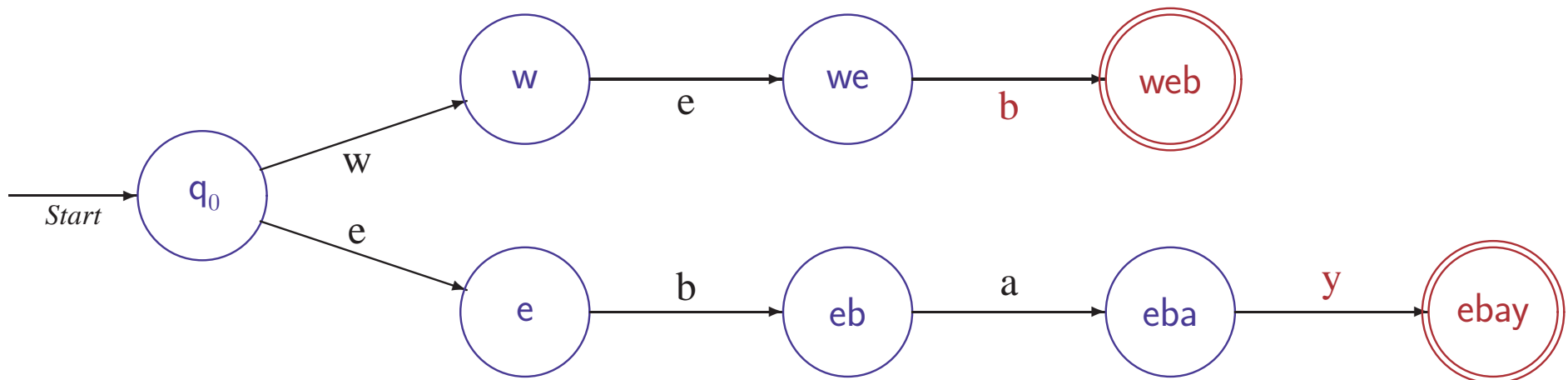


DETERMINISTISCHE AUTOMATEN FÜR TEXTANALYSE

Ursprünglicher ϵ -NEA

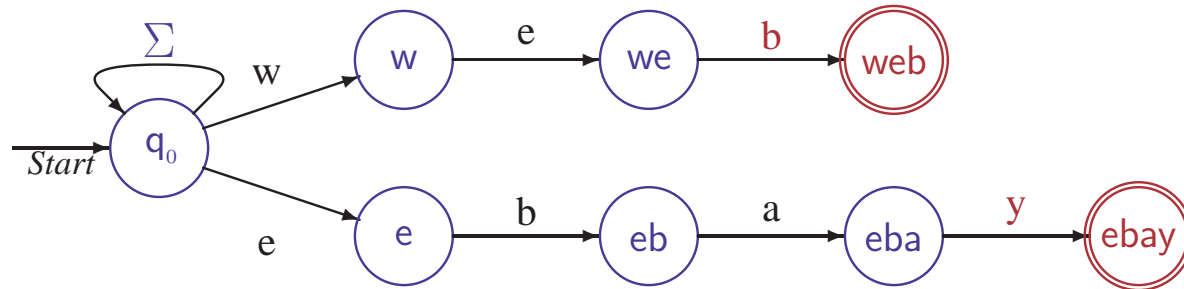


Generierter DEA

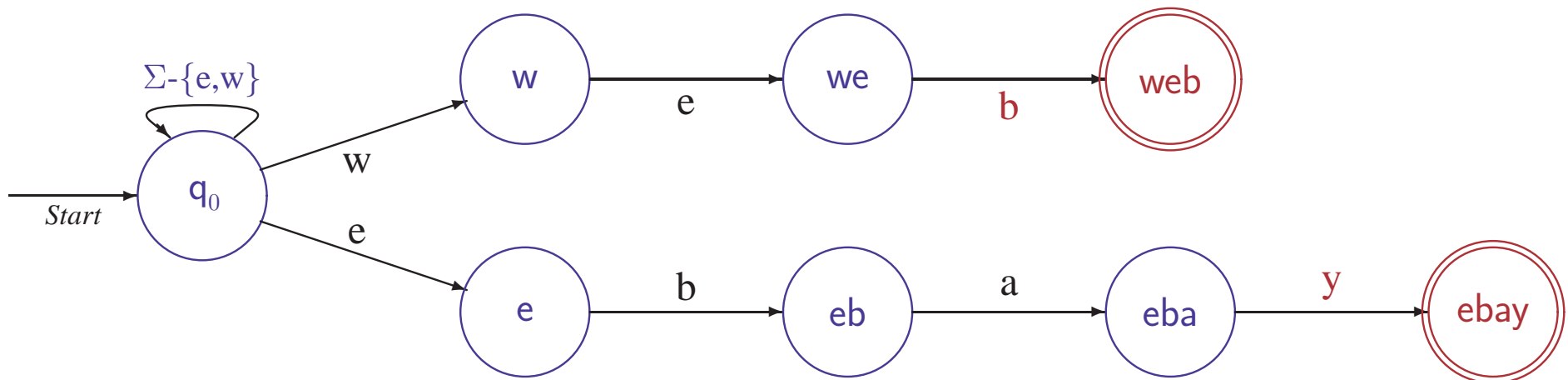


DETERMINISTISCHE AUTOMATEN FÜR TEXTANALYSE

Ursprünglicher ϵ -NEA

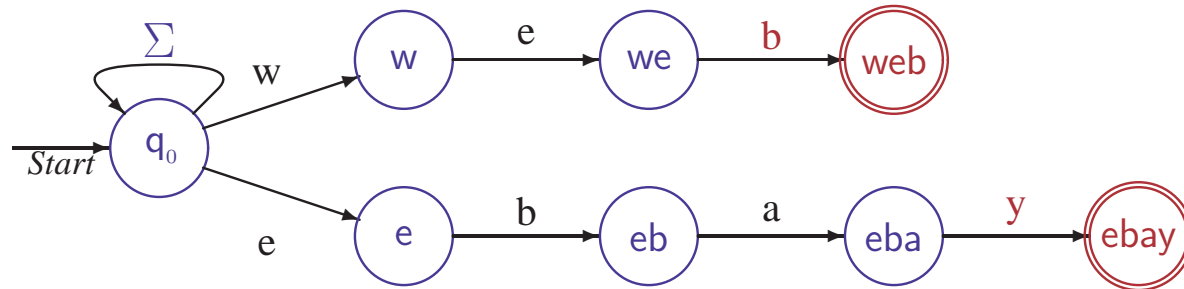


Generierter DEA

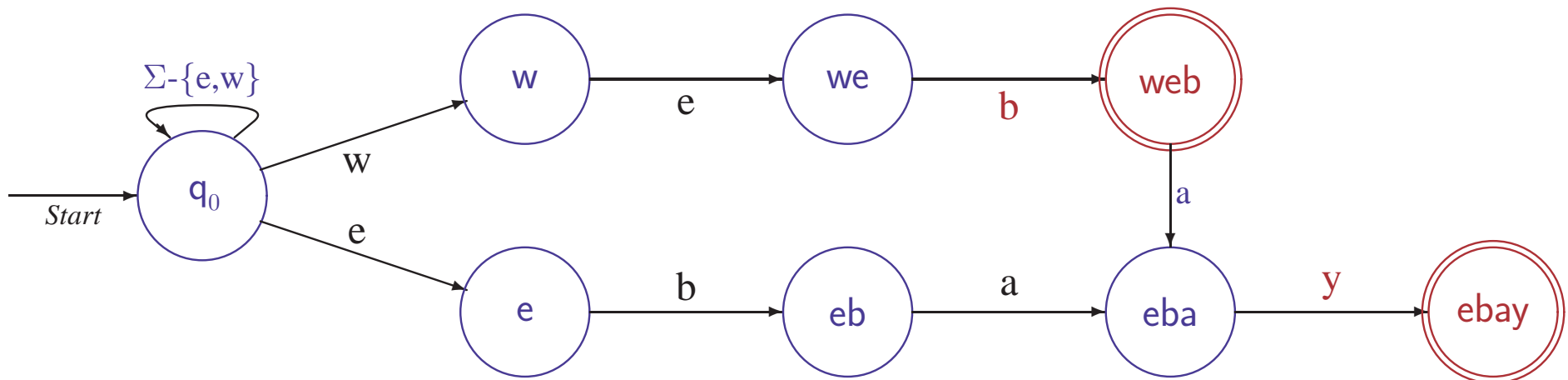


DETERMINISTISCHE AUTOMATEN FÜR TEXTANALYSE

Ursprünglicher ϵ -NEA

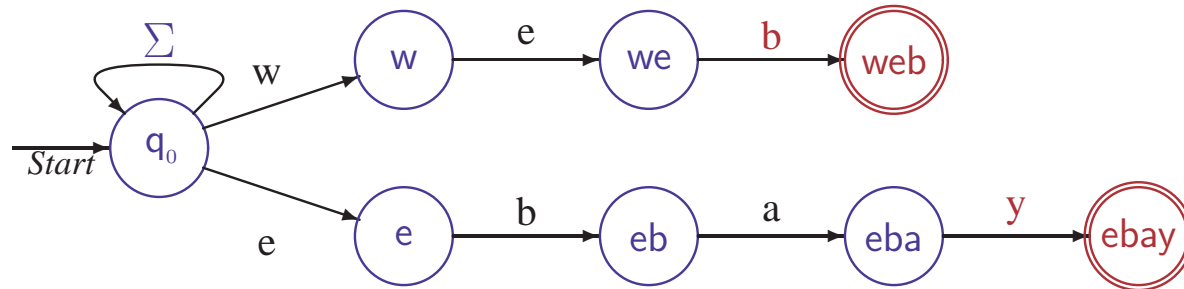


Generierter DEA

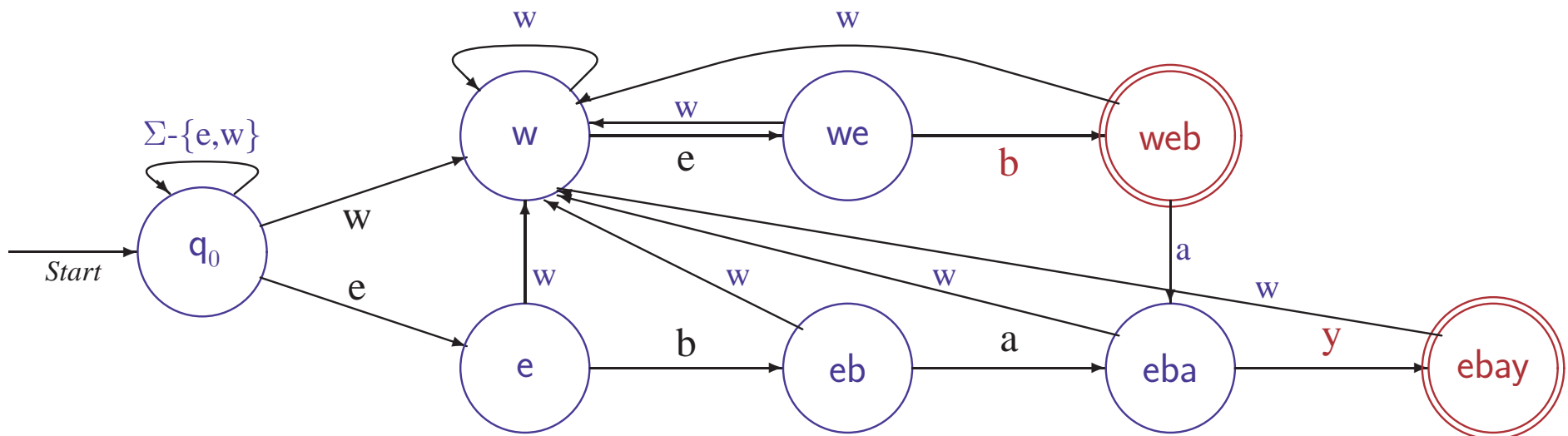


DETERMINISTISCHE AUTOMATEN FÜR TEXTANALYSE

Ursprünglicher ϵ -NEA

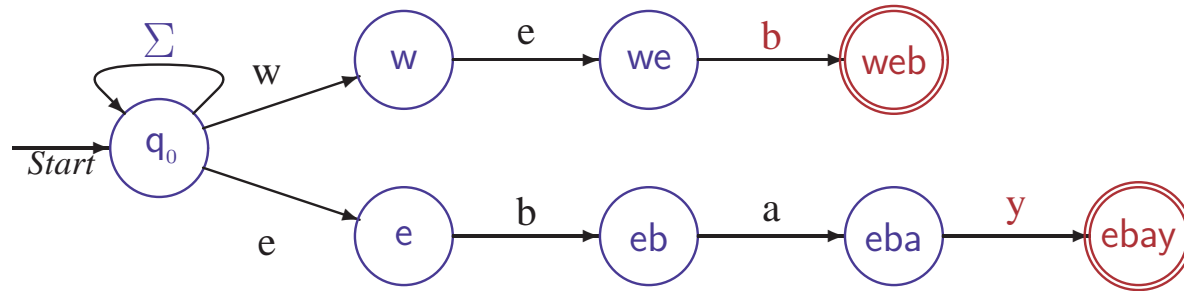


Generierter DEA

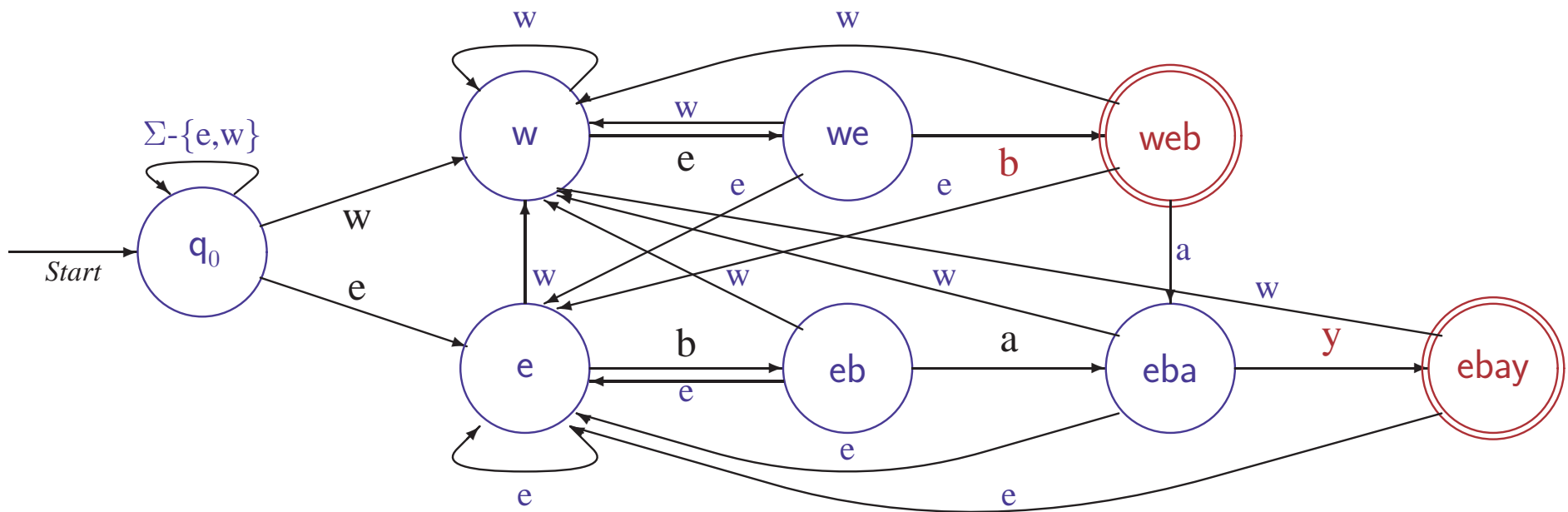


DETERMINISTISCHE AUTOMATEN FÜR TEXTANALYSE

Ursprünglicher ϵ -NEA

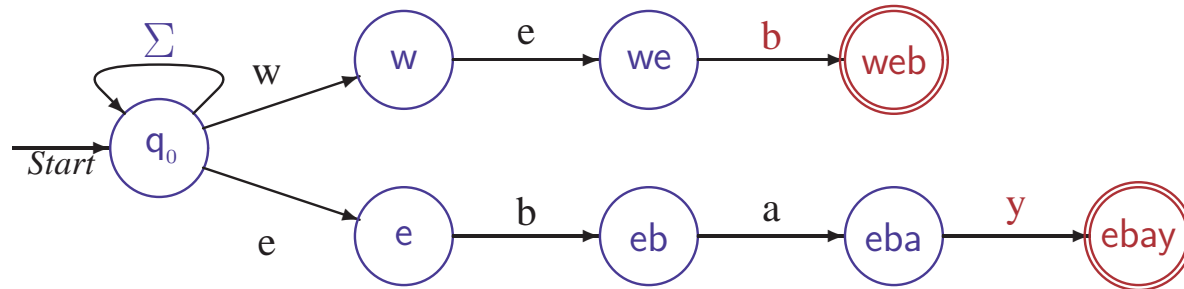


Generierter DEA

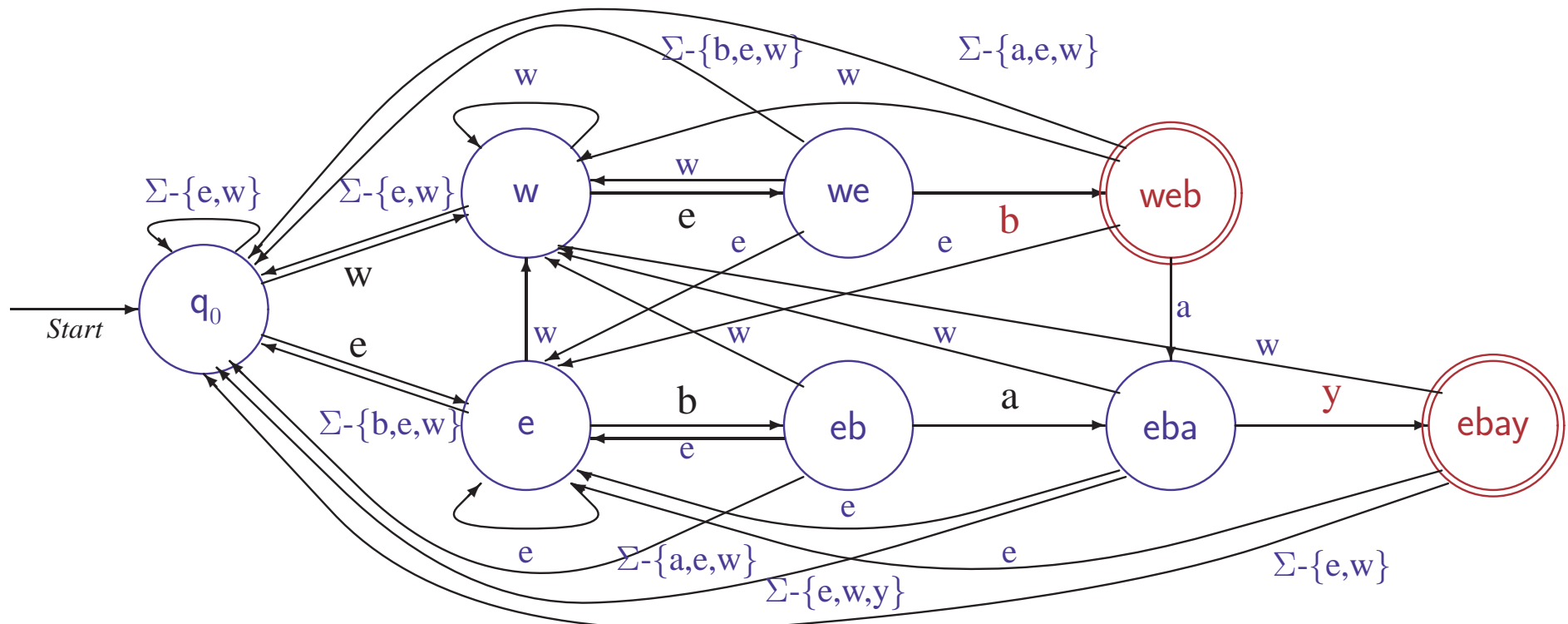


DETERMINISTISCHE AUTOMATEN FÜR TEXTANALYSE

Ursprünglicher ϵ -NEA



Generierter DEA



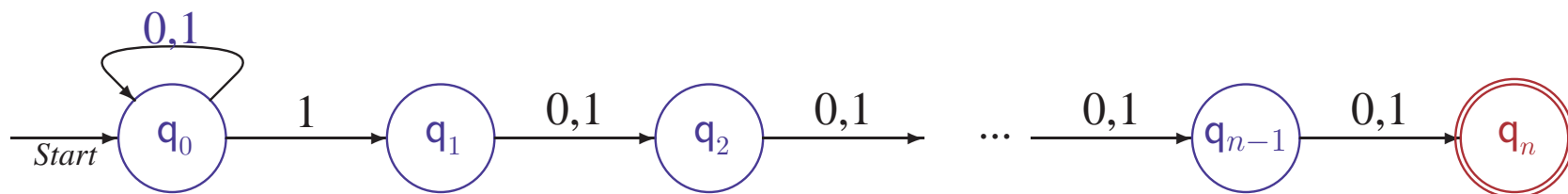
TEILMENGENKONSTRUKTION: GRÖSSE DES DEA

- A_D kann so klein sein wie A_N
 - Nur wenige Teilmengen von Q_N werden wirklich erreicht

TEILMENGENKONSTRUKTION: GRÖSSE DES DEA

- A_D kann so klein sein wie A_N
 - Nur wenige Teilmengen von Q_N werden wirklich erreicht
- A_D kann exponentiell größer werden

HMU §2.3.6



- $L(A_N) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{das } n\text{-te Zeichen vor dem Ende ist eine } 1\}$
- **Jeder DEA A für $L(A_N)$ benötigt mindestens 2^n Zustände**
- **Beweis:** Es gibt 2^n Wörter der Länge n in $\{0, 1\}^*$

Hat A weniger als 2^n Zustände, so gibt es $w = a_1..a_n$ und $v = b_1..b_n$

mit $w \neq v$ und $\hat{\delta}_A(q_0, w) = \hat{\delta}_A(q_0, v)$

(Schubfachprinzip)

Sei $a_i \neq b_i$. Für $q = \delta_A(q_0, w0^{i-1}) = \delta_A(q_0, v0^{i-1})$ folgt $q \in F$ und $q \notin F$

- **Deterministische Endliche Automaten (DEA)**
 - Endliche Menge von **Zuständen**, endliche Menge von **Eingabesymbolen**
 - Ein fester **Startzustand**, null oder mehr **akzeptierende Zustände**
 - **Überföhrungsfunktion** bestimmt Änderung des Zustands bei Abarbeitung der Eingabe
 - **Erkannte Sprache**: Eingaben, deren Abarbeitung in einem akzeptierenden Zustand endet
- **Automaten mit Ausgabe (Mealy/Moore-Automat)**
 - Wie DEA, mit zusätzlicher **Ausgabefunktion**
 - Gegenseitige Simulation möglich
- **Nichtdeterministische Automaten (ϵ -NEA / NEA)**
 - Wie DEA, aber mit **mengenwertiger Überföhrungsfunktion** und **Zustandsüberföhrung** bei leerer Eingabe
 - Durch **Teilmengenkonstruktion** in äquivalenten DEA transformierbar