

Theoretische Informatik I

Einheit 2.4

Grammatiken



1. Arbeitsweise
2. Klassifizierung
3. Beziehung zu Automaten

- **Mathematische Mengennotation**

- Prädikate beschreiben **Eigenschaften** der Wörter
- Extrem flexibel, nicht notwendig “berechenbar”

- **Endliche Automaten**

- Beschreibung der **Verarbeitung** von Sprachen
- Schwerpunkt ist **Erkennen** korrekter Wörter

- **Reguläre Ausdrücke**

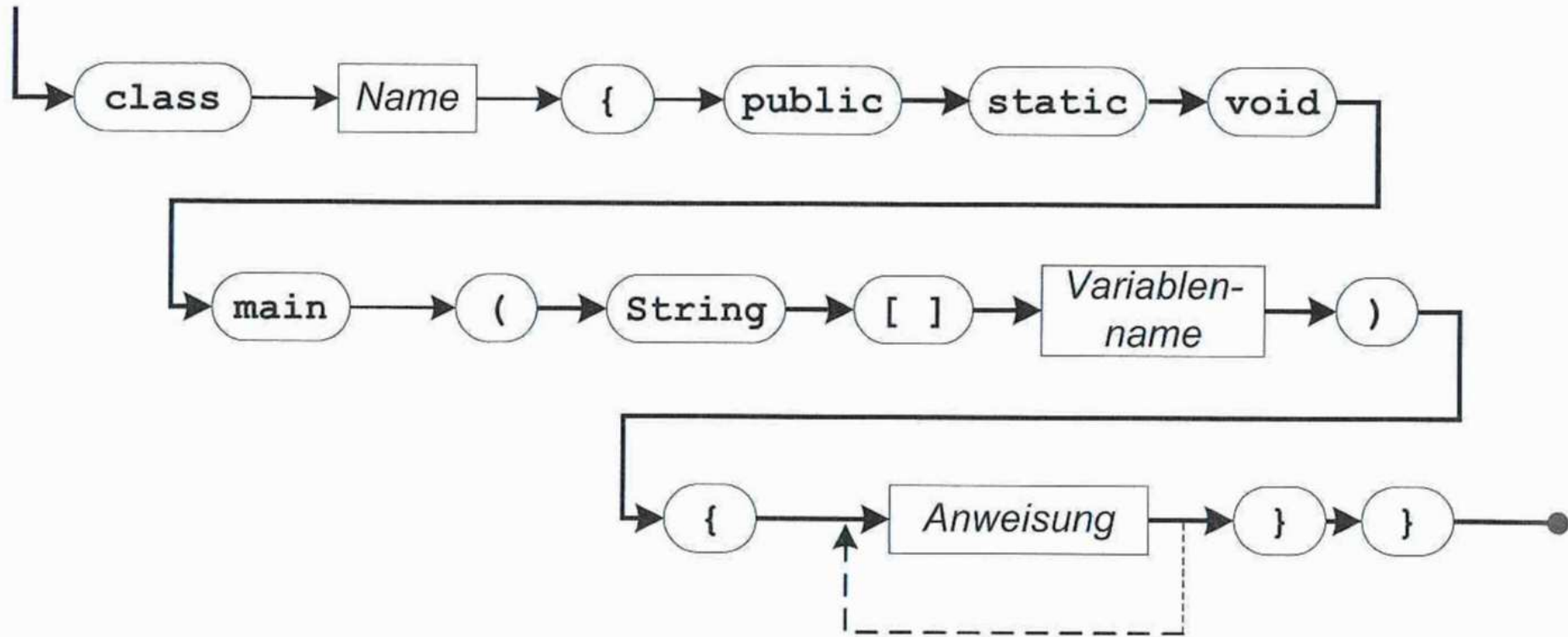
- Beschreibung der **Struktur** der Sprache

- **Grammatiken**

- **Produktionsregeln** beschreiben **Aufbau** der Wörter
- Auch für komplexere Strukturen als reguläre Sprachen
- Gängig für die Beschreibung von **Programmiersprachen**

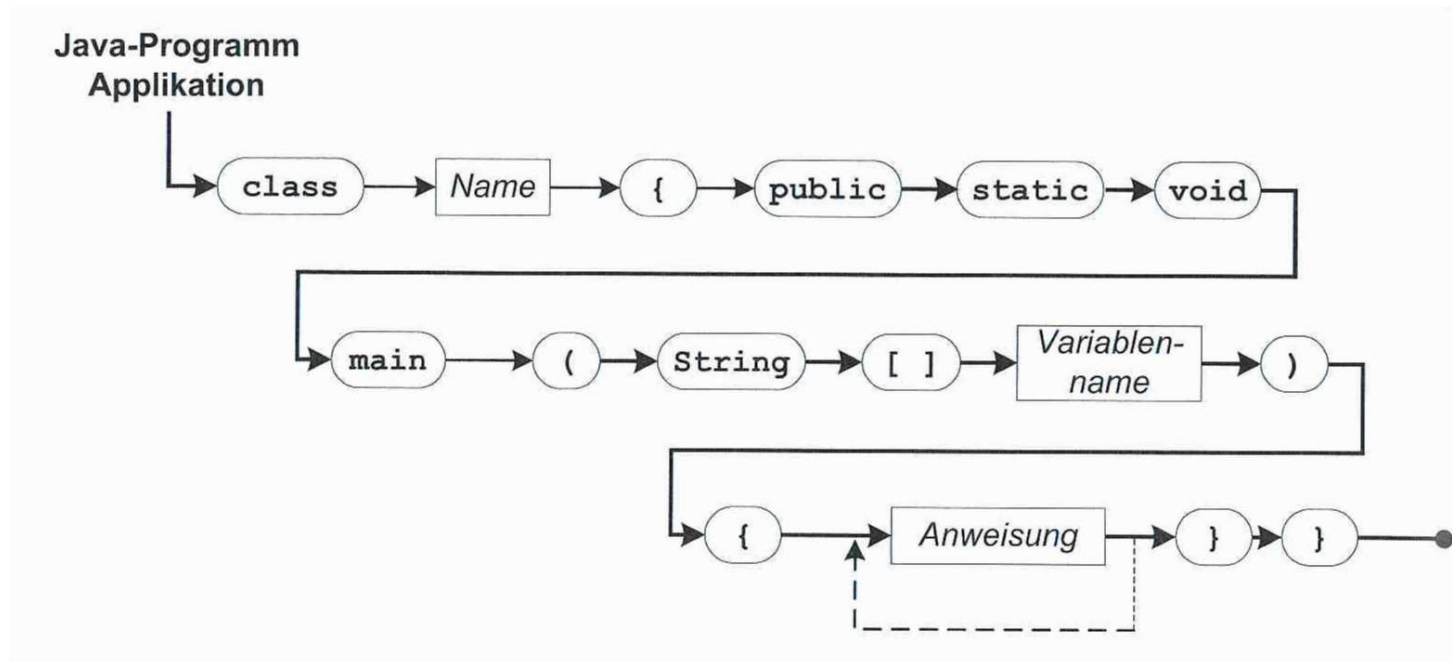
BEISPIEL: AUSZUG DER GRAMMATIK VON JAVA

Java-Programm
Applikation



- **Terminalsymbole: Alphabet der Sprache**
 - Symbole, aus denen die erzeugten Wörter bestehen sollen
 - Bei Programmiersprachen meist **ASCII-Symbole ohne Kontrollzeichen**
- **Variablen: Hilfsalphabet für Verarbeitung**
 - Beschreiben die **syntaktischen Kategorien** der Sprache
 - Bei JAVA z.B. **Applikation, Name, Variablenname, Anweisung, ...**
 - Andere Bezeichnung: **Nichtterminale Symbole**
- **Produktionen: Regeln zur Erzeugung von Wörtern**
 - Erklären wie syntaktischen Kategorien aufgebaut sind
 - Erklären **Erzeugung von Wörtern der Sprache** in den einzelnen Kategorien
 - z.B. **“Eine Applikation beginnt mit class gefolgt von einem Namen, ...”**
- **Startsymbol**
 - Erklärt welche syntaktische Kategorie beschrieben werden soll

GRAMMATIKEN – MATHEMATISCH PRÄZISIERT



Eine **Grammatik** ist ein 4-Tupel $G = (V, T, P, S)$ mit

- V endliches **Hilfsalphabet**
- T endliches **Terminalalphabet** mit $V \cap T = \emptyset$
- $P \subseteq \Gamma^+ \times \Gamma^*$ endliche Menge der **Produktionen** (wobei $\Gamma = V \cup T$)
Schreibweise für Produktionen: $l \rightarrow r \in P$ statt $(l, r) \in P$
- $S \in V$ **Startsymbol**

ARBEITSWEISE: PRODUKTION VON WÖRTERN DER ZIELSPRACHE

- $G_1 = (\{S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit $P = \{S \rightarrow S1, S \rightarrow S0, S \rightarrow \epsilon\}$

Erzeugung von Wörtern:

$$S \rightarrow \epsilon$$

$$S \rightarrow S0 \rightarrow 0$$

$$S \rightarrow S0 \rightarrow S10 \rightarrow S010 \rightarrow S0010 \rightarrow 0010$$

- Nur Wörter über dem Terminalalphabet sind von Interesse
- $\epsilon, 0, 0010$ gehören zur erzeugten Sprache
- $S, S0, S10, S010, S0010$ sind nur “Zwischenschritte”

- $G_2 = (\{S, A, B, C\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit

$$P = \{S \rightarrow B, S \rightarrow CA0, A \rightarrow BBB, B \rightarrow C1, B \rightarrow 0, CC1 \rightarrow \epsilon\}$$

Ableitungen:

$$S \rightarrow B \rightarrow 0$$

$$S \rightarrow B \rightarrow C1$$

Erfolglos, kein Wort der Zielsprache erreichbar ✓

$$S \rightarrow CA0 \rightarrow CBBB0 \rightarrow CC1BB0 \rightarrow BB0 \rightarrow 0B0 \rightarrow 000 \quad \checkmark$$

- **Ableitungsrelation** $\longrightarrow \subseteq \Gamma^+ \times \Gamma^*$

- $w \longrightarrow z \equiv \exists x, y \in \Gamma^*. \exists l \rightarrow r \in P. w = x l y \wedge z = x r y$

Anwendung von Produktionen auf Wörter

- **Erweiterte Ableitungsrelation** $\xrightarrow{*} \subseteq \Gamma^+ \times \Gamma^*$

- $w \xrightarrow{0} z \equiv w = z$

- $w \xrightarrow{n+1} z \equiv \exists u \in \Gamma^*. w \longrightarrow u \wedge u \xrightarrow{n} z$

- $w \xrightarrow{*} z \equiv \exists n \in \mathbb{N}. w \xrightarrow{n} z$

- Grammatik durch optionalen Index $G (\xrightarrow{*}_G)$ spezifizierbar

- **Von G erzeugte Sprache**

- Menge der Terminalwörter, die aus S abgeleitet werden können

$$L(G) \equiv \{w \in T^* \mid S \xrightarrow{*} w\}$$

GRAMMATIK FÜR $L = \{0^k 1^l \mid k \leq l\}$

• $G_3 = (\{S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit $P = \{S \rightarrow S1, S \rightarrow 0S1, S \rightarrow \epsilon\}$

• Zeige $L(G_3) = L$ per Induktion über Länge der Ableitung

– Ableitungen der Länge 0 liefern keine Terminalwörter

– Zeige: $\forall l \in \mathbb{N}. \forall w \in \{0, 1\}^*. S \xrightarrow{l+1} w \Leftrightarrow (\exists k \leq l. w = 0^k 1^l)$

• Basisfall

– $S \xrightarrow{1} w \Leftrightarrow (S \rightarrow w) \in P \Leftrightarrow w = \epsilon \Leftrightarrow \exists k \leq 0. w = 0^k 1^0$

✓

• Induktionsschritt

– Es gelte $\forall w \in \{0, 1\}^*. S \xrightarrow{l+1} w \Leftrightarrow (\exists k \leq l. w = 0^k 1^l)$

$S \xrightarrow{l+2} v$

$\Leftrightarrow S \rightarrow S1 \xrightarrow{l+1} v \vee S \rightarrow 0S1 \xrightarrow{l+1} v$

$\Leftrightarrow \exists w \in \{0, 1\}^*. S \xrightarrow{l+1} w \wedge (v = w1 \vee v = 0w1)$

$\Leftrightarrow \exists w \in \{0, 1\}^*. \exists k \leq l. w = 0^k 1^l \wedge (v = w1 \vee v = 0w1)$ (Annahme)

$\Leftrightarrow \exists k \leq l. v = 0^k 1^{l+1} \vee v = 0^{k+1} 1^{l+1}$

$\Leftrightarrow \exists k \leq (l + 1). v = 0^k 1^{l+1}$

✓

KLASSIFIZIERUNG VON GRAMMATIKEN

- **allgemein (Typ 0)**: keine Einschränkung an die Produktionen
- **kontextsensitiv (Typ 1)**
 - nur Regeln der Form $x A y \rightarrow x z y$ oder $S \rightarrow \epsilon$ ($x, y, z \in \Gamma^*$, $A \in V$, $z \neq \epsilon$)
($S \rightarrow \epsilon$ nur erlaubt, wenn S nicht rechts in einer anderen Regel auftaucht, $\Gamma = V \cup T$)
- **expansiv**
 - nur Regeln der Form $x \rightarrow z$ mit $|x| \leq |z|$, oder $S \rightarrow \epsilon$ ($x, z \in \Gamma^+$)
($S \rightarrow \epsilon$ nur erlaubt, wenn S nicht rechts in einer anderen Regel auftaucht)
- **kontextfrei (Typ 2)**
 - nur Regeln der Form $A \rightarrow z$ ($z \in \Gamma^*$, $A \in V$)
- **linear**
 - nur Regeln der Form $A \rightarrow \epsilon$ oder $A \rightarrow u B v$ ($A, B \in V$, $u, v \in T^*$)
- **rechtslinear (Typ 3)**
 - nur Regeln der Form $A \rightarrow \epsilon$ oder $A \rightarrow a B$ ($A, B \in V$, $a \in T$)
Manche Bücher: nur Regeln der Form $A \rightarrow \epsilon$ oder $A \rightarrow v B$ ($A, B \in V$, $v \in T^*$)
- **linkslinear**
 - nur Regeln der Form $A \rightarrow \epsilon$ oder $A \rightarrow B a$ ($A, B \in V$, $a \in T$)

BEISPIELE FÜR GRAMMATIKKLASSEN

- **kontextsensitiv**: Regeln $x A y \rightarrow x z y$ oder $S \rightarrow \epsilon$
- **expansiv**: Regeln $x \rightarrow z$ mit $|x| \leq |z|$, oder $S \rightarrow \epsilon$
- **kontextfrei**: Regeln $A \rightarrow z$
- **linear**: Regeln $A \rightarrow \epsilon$ oder $A \rightarrow u B v$
- **rechtslinear**: Regeln $A \rightarrow \epsilon$ oder $A \rightarrow a B$
- **linkslinear**: Regeln $A \rightarrow \epsilon$ oder $A \rightarrow B a$

- $G_1 = (\{S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit $P = \{S \rightarrow S1, S \rightarrow S0, S \rightarrow \epsilon\}$
– linkslinear, kontextfrei, nicht expansiv, nicht kontextsensitiv (S rechts, $S \rightarrow \epsilon$)
- $G_2 = (\{S, A, B, C\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow B, S \rightarrow CA0, A \rightarrow BBB, B \rightarrow C1, B \rightarrow 0, CC1 \rightarrow \epsilon\}$
– allgemein (keine anderen Bedingungen erfüllt)
- $G_3 = (\{S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit $P = \{S \rightarrow S1, S \rightarrow 0S1, S \rightarrow \epsilon\}$
– linear, kontextfrei, nicht expansiv, nicht kontextsensitiv
- $G_4 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit $P = \{S \rightarrow aCBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$
– expansiv, nicht kontextfrei, nicht kontextsensitiv

- **Typ-0 Sprachen**
 - Sprachen der Form $L = L(G)$ für eine beliebige Grammatik G
- **Typ-1 Sprachen (kontextsensitive Sprachen)**
 - Sprachen der Form $L = L(G)$ für eine kontextsensitive Grammatik G
 - L ist kontextsensitiv g.d.w. $L = L(G)$ für eine expansive Grammatik G
- **Typ-2 Sprachen (kontextfreie Sprachen)**
 - Sprachen der Form $L = L(G)$ für eine kontextfreie Grammatik G
- **Lineare Sprachen**
 - Sprachen der Form $L = L(G)$ für eine lineare Grammatik G
- **Typ-3 Sprachen (reguläre Sprachen)**
 - Sprachen der Form $L = L(G)$ für eine rechtslineare Grammatik G
 - L ist regulär g.d.w. $L = L(G)$ für eine linkslineare Grammatik G

$$\mathcal{L}_i \equiv \{ L \mid L \text{ ist Sprache vom Typ } i \}$$

Wie hängen Grammatiken und Automaten zusammen?

- **Automaten verarbeiten Eingabewörter**
 - Jedes Symbol wird in einem Schritt abgearbeitet
 - Symbol bestimmt, ob Automat im Zustand bleibt oder wechselt
 - **Grammatiken erzeugen Wörter**
 - Hilfssymbole werden im Endeffekt in Terminalwörter umgewandelt
 - Nichtlineare Grammatiken erzeugen mehrere Symbole gleichzeitig
 - Ableitungen in rechts-/linkslinearen Grammatiken erzeugen pro Schritt ein Terminalsymbol und verwenden jeweils nur ein Hilfssymbol
 - **Wie kann man umwandeln?**
 - Konstruiere zu jedem DEA eine äquivalente rechtslineare Grammatik
 - Konstruiere zu jeder rechtslinearen Grammatik einen äquivalenten DEA
- ↳ $\mathcal{L}_3 = \{ L \mid L \text{ ist regulär} \}$

**Für jeden DEA A gibt es eine
Typ-3 Grammatik G mit $L(G) = L(A)$**

• **Gegeben DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$**

- Wandle Abarbeitung von Symbolen in Erzeugung durch Grammatik um
- Setze $G := (Q, \Sigma, P, q_0)$ mit $P = \{q \rightarrow aq' \mid \delta(q, a) = q'\} \cup \{q \rightarrow \epsilon \mid q \in F\}$
- G ist per Konstruktion rechtslinear, also vom Typ 3

• **Zeige $L(G) = L(A)$**

$$w = w_1..w_n \in L(G)$$

$$\Leftrightarrow q_0 \xrightarrow{*} w_1..w_n$$

$$\Leftrightarrow \exists q_1, \dots, q_n \in Q. q_0 \xrightarrow{} w_1q_1 \xrightarrow{} w_1w_2q_2 \xrightarrow{} \dots \xrightarrow{} w_1..w_nq_n \xrightarrow{} w_1..w_n$$

$$\Leftrightarrow \exists q_1, \dots, q_n \in Q. (q_0, w_1..w_n) \vdash (q_1, w_2..w_n) \vdash \dots \vdash (q_{n-1}, w_n) \vdash (q_n, \epsilon) \wedge q_n \in F$$

$$\Leftrightarrow \exists q_n \in F. q_0, w_1..w_n \vdash^* q_n, \epsilon$$

$$\Leftrightarrow w \in L(A)$$



**Für jede Typ-3 Grammatik G gibt es einen
NEA A mit $L(A) = L(G)$**

• **Gegeben Grammatik $G = (V, T, P, S)$**

– Wandle Erzeugung von Symbolen in Abarbeitung durch NEA um

– Setze $A := (V, T, \delta, S, F)$ mit $\delta(X, a) = \{X' \mid X \rightarrow aX' \in P\}$
und $F = \{X \in V \mid X \rightarrow \epsilon \in P\}$

• **Zeige $L(A) = L(G)$**

$$w = w_1..w_n \in L(A)$$

$$\Leftrightarrow \exists X_n \in F. \quad S, w_1..w_n \vdash^* X_n, \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \exists X_1, \dots, X_n \in V. (S, w_1..w_n) \vdash (X_1, w_2..w_n) \vdash \dots \vdash (X_n, \epsilon) \wedge X_n \in F$$

$$\Leftrightarrow \exists X_1, \dots, X_n \in V. S \longrightarrow w_1 X_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow w_1..w_n X_n \longrightarrow w_1..w_n$$

$$\Leftrightarrow S \xrightarrow{*} w$$

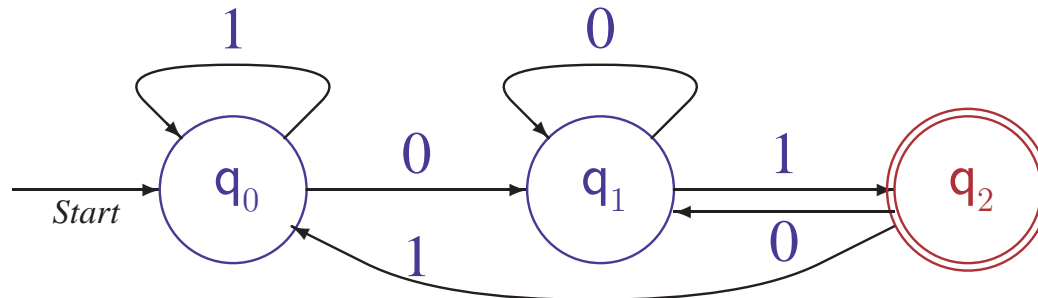
$$\Leftrightarrow w \in L(G)$$



UMWANDLUNGEN AM BEISPIEL

- **Konvertiere DEA für $(0+1)^*01$**

- $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ mit



- **Erzeuge Grammatik**

- $G = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, P, q_0)$ mit

$$P = \{q_0 \rightarrow 1q_0, q_0 \rightarrow 0q_1, q_1 \rightarrow 1q_2, q_1 \rightarrow 0q_1, q_2 \rightarrow 1q_0, q_2 \rightarrow 0q_1, q_2 \rightarrow \epsilon\}$$

- **Umwandlung von G in einen NEA**

- Transformation erzeugt ursprünglichen Automaten

DIE CHOMSKY HIERARCHIE

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$$

● Wichtige Vertreter der Klassen

- $\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_3$: $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2$: $\{0^n 1^n 2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1$: $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ ist Code eines Programms, das bei Eingabe } w \text{ anhält}\}$

● Zugehörige Automatenmodelle

- \mathcal{L}_0 : Turingmaschine
- \mathcal{L}_1 : linear platzbeschränkte nichtdeterministische Turingmaschine
- \mathcal{L}_2 : nichtdeterministischer endlicher Automat mit Kellerspeicher
- \mathcal{L}_3 : endlicher Automat

Mehr in zukünftigen Vorlesungen