

Theoretische Informatik I

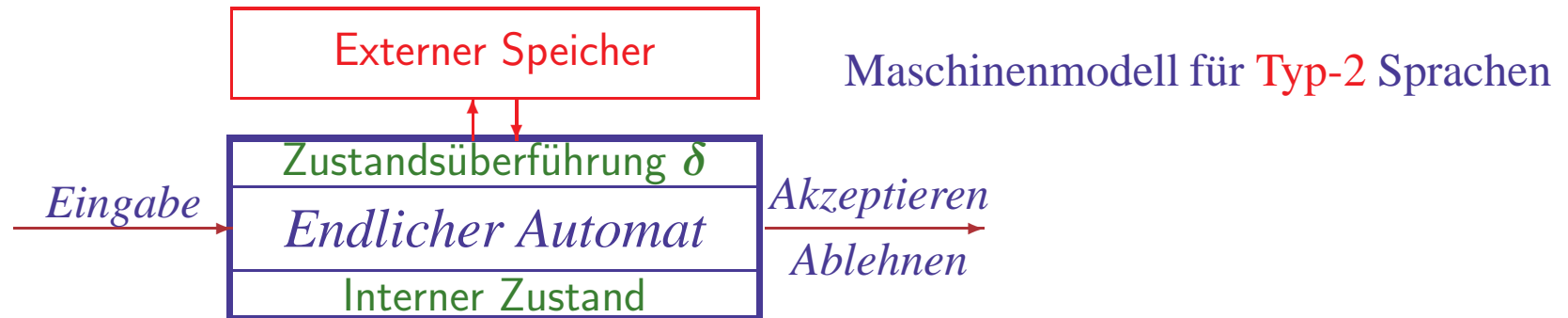
Einheit 3.2

Pushdown Automaten



1. Das Maschinenmodell
2. Arbeitsweise & erkannte Sprache
3. Beziehung zu Typ-2 Sprachen

EIN MASCHINENMODELL FÜR TYP-2 SPRACHEN



- **Typ-3 Sprachen werden von NEAs akzeptiert**
 - Typ-3 Grammatik erzeugt pro Schritt ein Terminalsymbol
 - NEA verarbeitet pro Schritt ein Eingabesymbol
 - Erzeugte Terminalsymbole stehen links von der aktuellen Variablen
 - Verarbeitete Eingabesymbole führen zu aktuellem Zustand
 - Rechts von der aktuellen Variablen steht noch nichts
 - Im Zustand ist nichts über unverarbeitete Eingabesymbole bekannt
- **Welches Maschinenmodell paßt zu Typ-2 Sprachen?**
 - Kontextfreie Grammatiken können $L_1 = \{0^m 1^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ erzeugen
 - Ohne Zwischenspeicher können endliche Automaten L_1 nicht erkennen

Typ-2 Maschinenmodell benötigt externen Speicher

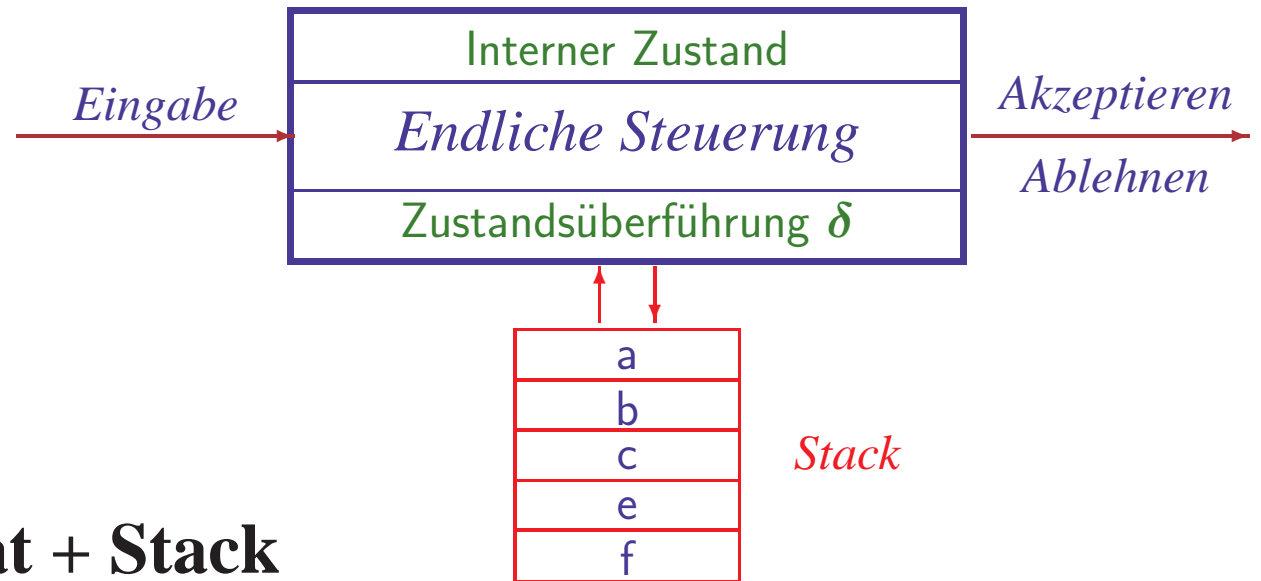
Analysiere das Verhalten von Linksableitungen

- **Links** von der aktuellen Variablen A stehen **nur erzeugte Terminalsymbole**
 - Entspricht den **schon verarbeiteten Eingabesymbolen** des Automaten
- **Rechts** von A können bereits Terminalsymbole stehen
Abarbeitung von A schiebt weiteren Text in die Mitte
 - Bei Verarbeitung eines Eingabewortes muß der **Automat Information speichern**, welche Symbole **am Ende des Wortes kommen müssen**
- **Ist A komplett abgearbeitet, so “springt” die Ableitung über Terminalsymbole zur nächsten Variablen**
 - Automaten muß **zuletzt erzeugte Information zuerst abarbeiten**



Speicher des Automaten sollte ein Stack sein

PUSHDOWN-AUTOMATEN INTUITIV



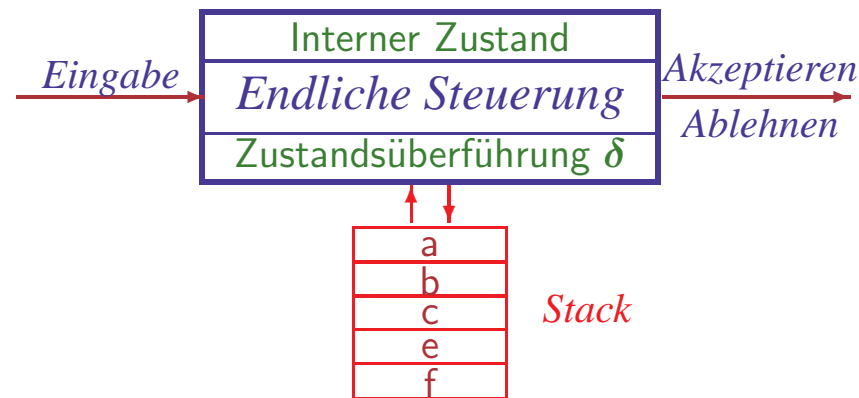
- **Endlicher Automat + Stack**

- Endliche Steuerung liest Eingabesymbole
- Gleichzeitig kann das oberste Symbol im Stack beobachtet werden

- **Eingabe und Stack wird gleichzeitig bearbeitet**

- Gelesenes Symbol wird aus Eingabe “entfernt”
- Zustand kann verändert werden
- Oberstes Stacksymbol wird durch (mehrere) neue Stacksymbole ersetzt
- Nichtdeterministische Entscheidungen / spontane ϵ -Übergänge möglich

PUSHDOWN-AUTOMATEN – MATHEMATISCH PRÄZISIERT



Ein **Pushdown-Automat (PDA, Kellerautomat)**

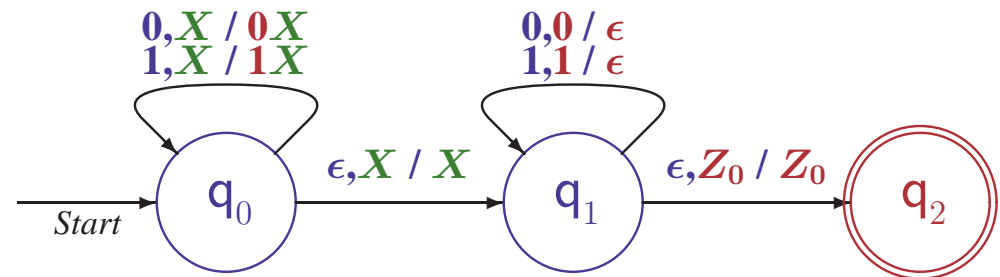
ist ein 7-Tupel $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ endliches **Eingabealphabet**
- Γ endliches **Stackalphabet**
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma^*)$ **Überföhrungsfunktion** (endlich)
- $q_0 \in Q$ **Startzustand**
- $Z_0 \in \Gamma$ **Initialsymbol des Stacks**
- $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden (End-)Zuständen**

Pushdown-Automaten sind üblicherweise nichtdeterministisch!

BESCHREIBUNG VON PUSHDOWN-AUTOMATEN

• Übergangsdiagramme



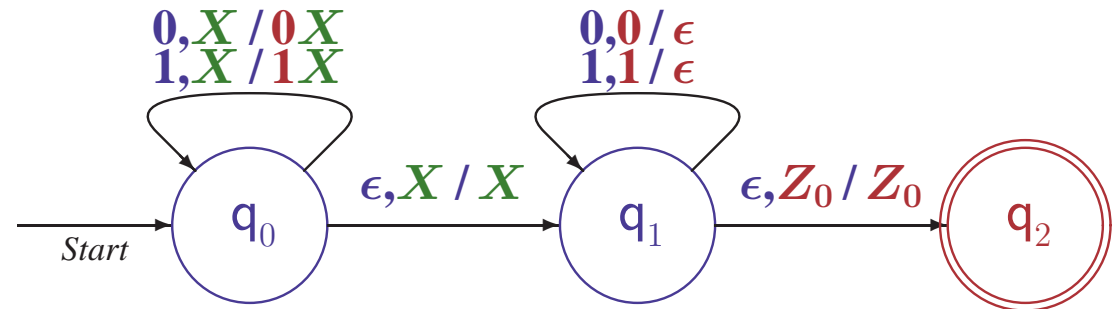
- Jeder Zustand in Q wird durch einen **Knoten** (Kreise) dargestellt
- Für $(p, \alpha) \in \delta(q, a, X)$, $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ hat das Diagramm eine **Kante** $q \xrightarrow{a, X / \alpha} p$ (Mehrfachbeschriftungen und **Platzhalter** für beliebige $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $X \in \Gamma$ möglich)
- q_0 wird durch einen mit *Start* beschrifteten Pfeil angezeigt
- Endzustände in F werden durch **doppelte Kreise** gekennzeichnet
- Σ und Γ implizit durch Diagramm bestimmt, **Initialsymbol** heißt Z_0

• Übergangstabellen

- Tabellarische Darstellung der Funktion δ
- Kennzeichnung von q_0 durch einen Pfeil
- Kennzeichnung von F durch Sterne
- Σ , Γ und Q implizit durch die Tabelle bestimmt
- **Platzhalter** für $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $X \in \Gamma$ erlaubt

	Q	$\Sigma + \epsilon$	Γ	Resultat
→	q_0	0	X	$q_0, 0X$
→	q_0	1	X	$q_0, 1X$
→	q_0	ϵ	X	q_1, X
	q_1	0	0	q_1, ϵ
	q_1	1	1	q_1, ϵ
	q_1	ϵ	Z_0	q_2, Z_0
*	q_2			

PUSHDOWN-AUTOMAT FÜR $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$



- **Speichere w in q_0**
 - Es wird je ein Symbol gelesen und auf den Stack gelegt
 - $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, aX)\}$ für $a \in \{0,1\}$, $X \in \Gamma$
- **Spontaner Wechsel “in der Mitte”**
 - $\delta(q_0, \epsilon, X) = \{(q_1, X)\}$ für $X \in \Gamma$ (nichtdeterministischer ϵ -Übergang)
- **Verarbeite w^R in q_1** (w steht in umgekehrter Reihenfolge im Stack)
 - Jedes gelesene Symbol wird dem obersten Stacksymbol verglichen
 - $\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \epsilon)\}$ für $a \in \{0,1\}$
- **“Leerer” Stack akzeptiert**
 - Wenn Stack leer ist, wurde w^R in q_1 verarbeitet
 - $\delta(q_1, \epsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$ (deterministischer ϵ -Übergang)

$$P = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$$

Generalisiere Konzept der Konfigurationsübergänge

- **Erweitere Begriff der Konfiguration**

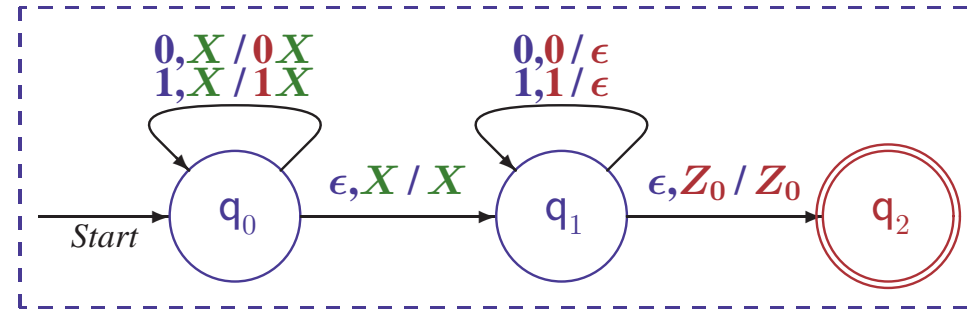
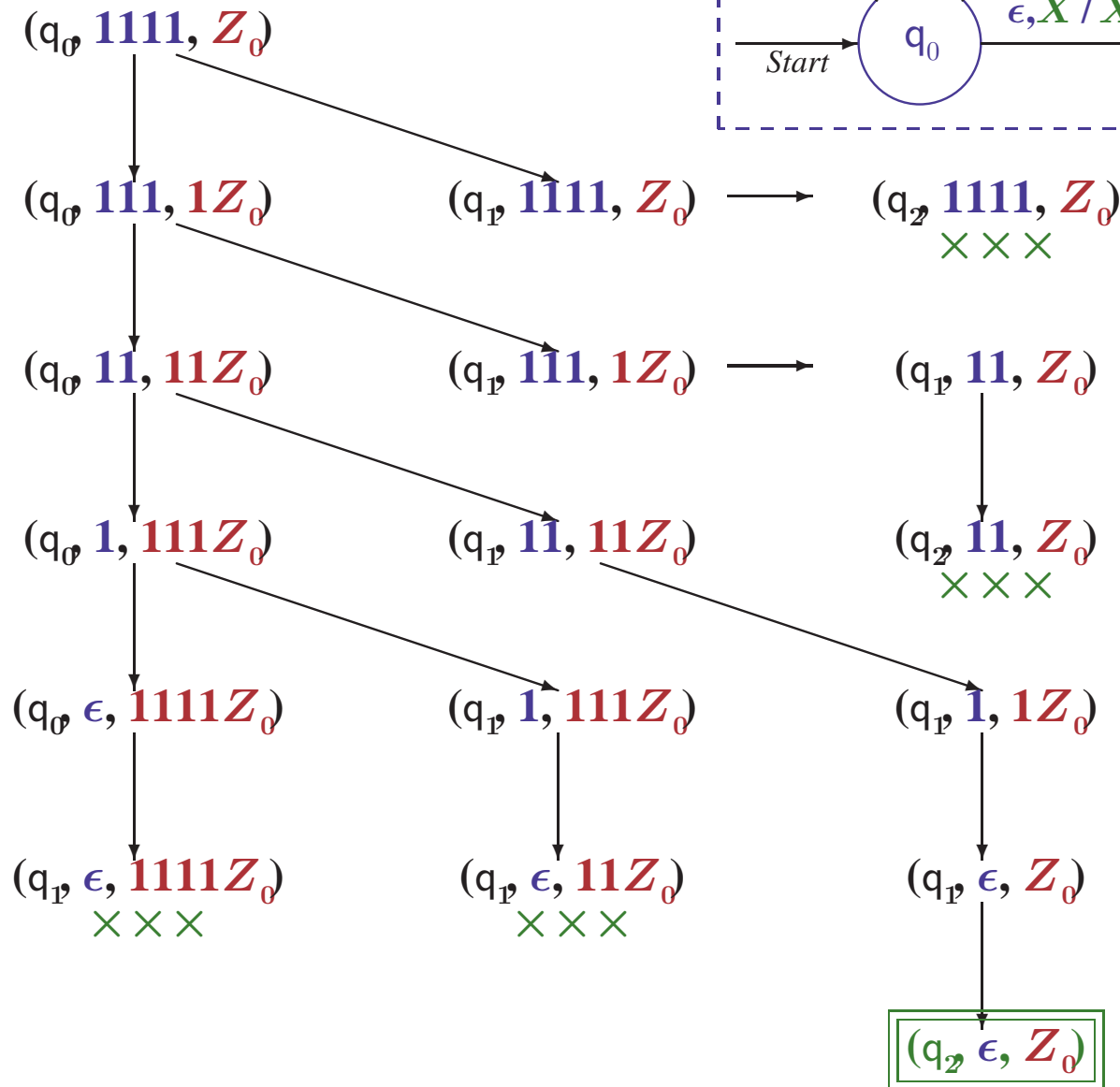
- Aktueller Zustand, unverarbeitete Eingabe und Inhalt des Stacks zählt
- Formal dargestellt als Tripel $K = (q, w, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$

- **Modifiziere Konfigurationsübergangsrelation \vdash^***

- Wechsel zwischen Konfigurationen durch Abarbeitung von Wörtern
- $(q, aw, X\beta) \vdash (p, w, \alpha\beta)$, falls $(p, \alpha) \in \delta(q, a, X)$
- $(q, w, X\beta) \vdash (p, w, \alpha\beta)$, falls $(p, \alpha) \in \delta(q, \epsilon, X)$
(Im Zustand q ist a das erste Eingabesymbol und X oben im Stack.
 a wird abgearbeitet, X durch α ersetzt, der Rest bleibt stehen)
- $K_1 \vdash^* K_2$, falls $K_1 = K_2$ oder
es gibt eine Konfiguration K mit $K_1 \vdash K$ und $K \vdash^* K_2$

ABARBEITUNG DES PALINDROM PDA

Verarbeitung von 1111



Zwei alternative Definitionen möglich

- Akzeptanz durch **akzeptierende Endzustände**

$$L_F(P) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F. \exists \beta \in \Gamma^*. (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \beta) \}$$

- Standarddefinition: Nach Abarbeitung der Eingabe entscheidet der Zustand, ob das Wort akzeptiert wird

- Akzeptanz durch **leeren Stack**

$$L_\epsilon(P) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q. (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon) \}$$

- Oft praktischer: Nach Abarbeitung der Eingabe sind auch alle zwischengelagerten Symbole verarbeitet

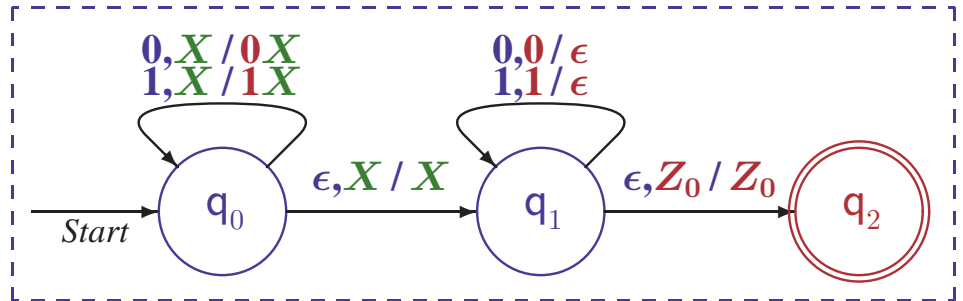
- **Definitionen haben verschiedene Effekte**

- Sprachen können für konkrete PDAs sehr verschieden ausfallen

- **Beide Definitionen sind gleichmächtig**

- PDA kann passend zur anderen Definition umgewandelt werden

DIE BEIDEN SPRACHEN DES PALINDROMAUTOMATEN



- $L_F(P) = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$

⊇: Durch strukturelle Induktion zeige, daß für jedes Wort w gilt

$$(q_0, ww^R, Z_0) \vdash^* (q_0, w^R, w^R Z_0) \vdash (q_1, w^R, w^R Z_0) \vdash^* (q_1, \epsilon, Z_0) \vdash (q_2, \epsilon, Z_0)$$

⊆: Durch strukturelle Induktion über $x = x_1..x_n$ zeige

Wenn $(q_0, x, \alpha) \vdash^* (q_1, \epsilon, \alpha)$ für ein $\alpha \in \Gamma^*$, dann $x = ww^R$ für ein $w \in \{0, 1\}^*$

Kernidee des Induktionsschrittes

(Details in HMU §6.2.1)

$$\begin{aligned} \text{Wenn } (q_0, x_1..x_n, \alpha') \vdash (q_0, x_2..x_n, x_1 \alpha') \vdash^* (q_1, x_i..x_n, \beta x_1 \alpha') \\ \vdash^* (q_1, x_n, x_1 \alpha') \vdash (q_1, \epsilon, \alpha') \text{ für } \alpha', \beta \in \Gamma^*, \end{aligned}$$

dann folgt $(q_0, x_1..x_{n-1}, \alpha') \vdash (q_0, x_2..x_{n-1}, x_1 \alpha') \vdash^* \dots \vdash^* (q_1, \epsilon, x_1 \alpha')$

und $x_1 = x_n$ und per Induktion $x_2..x_{n-1} = vv^R$ für ein $v \in \{0, 1\}^*$

- $L_\epsilon(P) = \emptyset$ weil Z_0 nie gelöscht wird

Modifikation von P : Ändere Kantenbeschriftung von q_1 nach q_2 in $\epsilon, Z_0 / \epsilon$

Für den resultierenden PDA P' gilt: $L_\epsilon(P') = L_F(P) = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$

WICHTIGE ERKENNTNISSE ZU AUSSAGEN ÜBER KONFIGURATIONSÜBERGÄNGE IN BEWEISEN

- **Ungelesene Eingaben können ignoriert werden**

Gilt $(q, xw, \alpha) \vdash^* (p, yw, \beta)$ **dann gilt auch**

$(q, x, \alpha) \vdash^* (p, y, \beta)$ **für alle** $w \in \Sigma^*$

Dagegen kann es von Bedeutung sein, ob im Stack hinter α etwas steht

– Beweis durch Induktion über Anzahl der Konfigurationsschritte

– Kernargument: $(q, ayw, X\beta) \vdash (p, yw, \gamma\beta)$ verlangt $(p, \gamma) \in \delta(q, a, X)$

also $(q, ay, X\beta) \vdash (p, y, \gamma\beta)$

- **Erweiterung von Eingabe oder Stack ändert nichts**

Gilt $(q, x, \alpha) \vdash^* (p, y, \beta)$ **dann gilt auch**

$(q, xw, \alpha\gamma) \vdash^* (p, yw, \beta\gamma)$ **für alle** $w \in \Sigma^*, \gamma \in \Gamma^*$

Weder w noch γ werden bei der Verarbeitung angesehen

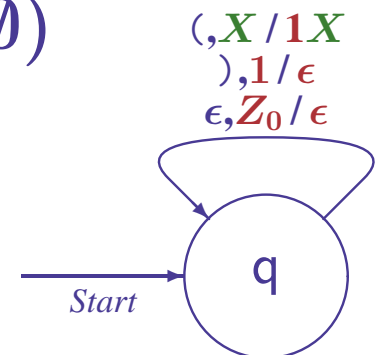
– Beweis durch Induktion über Anzahl der Konfigurationsschritte

– Kernargument: $(q, aw, X\gamma) \vdash (p, w, \beta\gamma)$, falls $(p, \beta) \in \delta(q, a, X)$

was hinter a bzw. X kommt, bleibt unangetastet

Konstruiere PDA für korrekte Klammerausdrücke

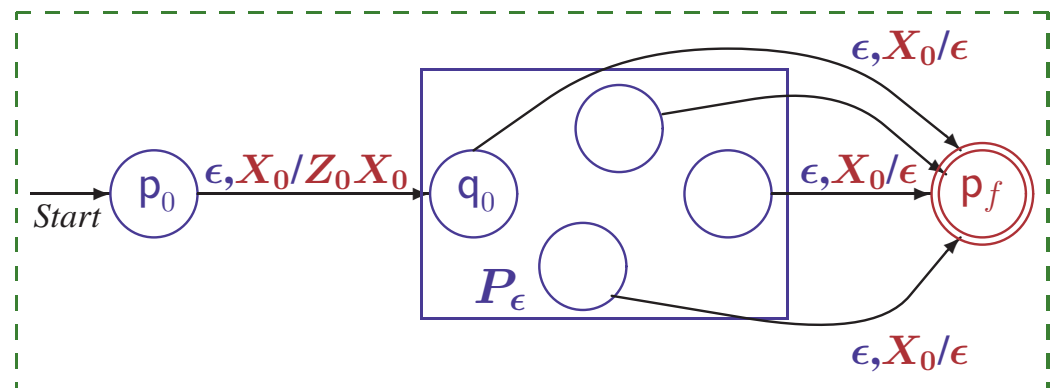
- **Rahmenbedingungen an Eingabewörter**
 - Anzahl geöffneter und geschlossener Klammern muß gleich sein
 - In keinen Anfangssegment dürfen mehr (als) vorkommen
- **Zähle Überschuß geöffneter Klammern im Stack**
 - Jedes (erhöht die Anzahl, jedes) erniedrigt sie
 -) ist nicht erlaubt, wenn der Stackboden erreicht ist
 - Am Ende des Wortes wird der Stackboden entfernt
- **Setze $P_1 = (\{q\}, \{(\,)\}, \{Z_0, 1\}, \delta, q, Z_0, \emptyset)$**
mit $\delta(q, (\, X) = \{(q, 1X)\}$
 $\delta(q,), 1) = \{(q, \epsilon)\}$
 $\delta(q, \epsilon, Z_0) = \{(q, \epsilon)\}$



TRANSFORMATION VON L_{ϵ} - IN L_F -AUTOMATEN

Zu jedem PDA $P_{\epsilon} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ kann ein PDA P_F konstruiert werden mit $L_{\epsilon}(P_{\epsilon}) = L_F(P_F)$

- **Bei leerem Stack wechsele in einen Endzustand**
 - Neues Initialsymbol X_0 markiert unteres Ende des Stacks von P_F
 - Neuer Anfangszustand p_0 für P_F schreibt Initialsymbol von P_{ϵ} auf Stack
 - Neuer Endzustand p_f , in den bei “leerem” Stack gewechselt wird
- $P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$
 - $\delta_F(q, a, X) = \delta(q, a, X)$
für alle $q \in Q, X \in \Gamma$
 - $\delta_F(p_0, \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$
 - $\delta_F(q, \epsilon, X_0) = \{(p_f, \epsilon)\}$
für alle $q \in Q$



Korrektheitsbeweis durch Detailanalyse

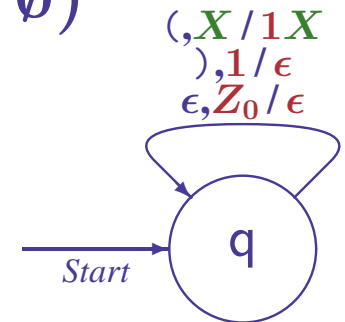
UMWANDLUNG EINES L_ϵ -PDA IN EINEN L_F -PDA

- Gegeben $P_\epsilon = (\{q\}, \{(\cdot)\}, \{Z_0, 1\}, \delta, q, Z_0, \emptyset)$

mit $\delta(q, (\cdot, X)) = \{(q, 1X)\}$

$\delta(q, (\cdot, 1)) = \{(q, \epsilon)\}$

$\delta(q, (\epsilon, Z_0)) = \{(q, \epsilon)\}$



- Äquivalenter PDA P_F mit Endzuständen ist

$(\{p_0, q, p_f\}, \{(\cdot)\}, \{X_0, Z_0, 1\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$

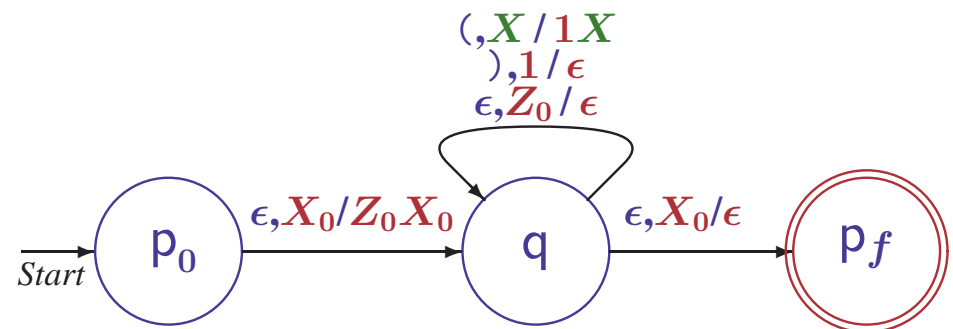
mit $\delta_F(p_0, (\epsilon, X_0)) = \{(q, Z_0X_0)\}$

$\delta_F(q, (\cdot, X)) = \{(q, 1X)\}$

$\delta_F(q, (\cdot, 1)) = \{(q, \epsilon)\}$

$\delta(q, (\epsilon, Z_0)) = \{(q, \epsilon)\}$

$\delta_F(q, (\epsilon, X_0)) = \{(p_f, \epsilon)\}$



TRANSFORMATION VON L_F - IN L_ϵ -AUTOMATEN

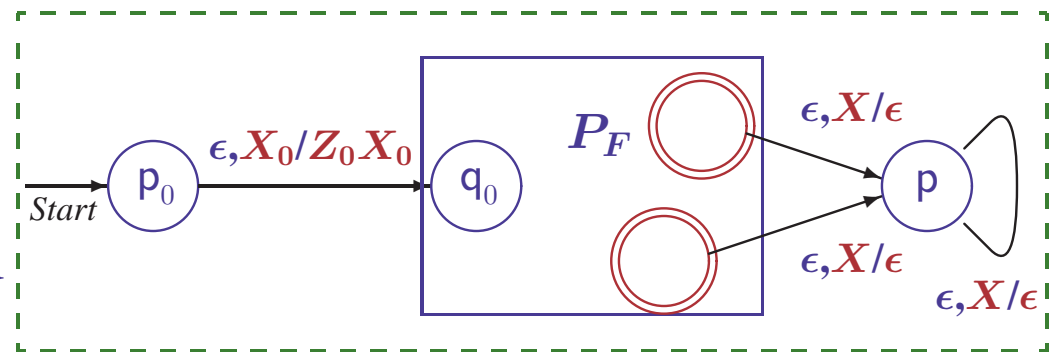
Zu jedem PDA $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ kann ein PDA P_ϵ konstruiert werden mit $L_F(P_F) = L_\epsilon(P_\epsilon)$

- **Im Endzustand leere den Stack**

- Neuer Stacklösch-Zustand p , in den von Endzuständen gewechselt wird
- Neues Initialsymbol X_0 für P_ϵ verhindert irrtümliches Leeren des Stacks
- Neuer Anfangszustand p_0 für P_ϵ schreibt Initialsymbol von P_F auf Stack

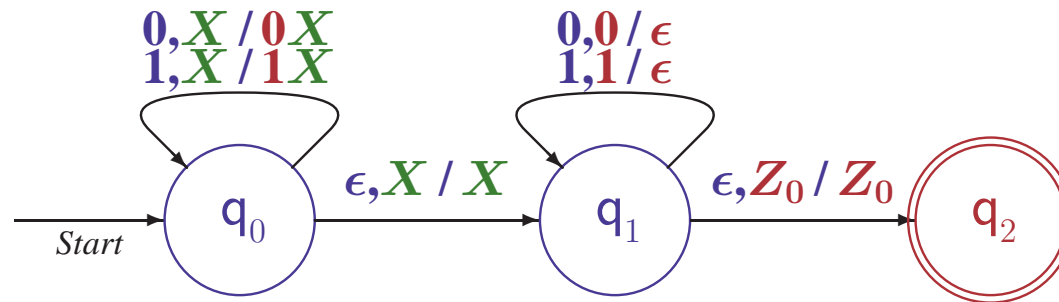
- $P_\epsilon = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_\epsilon, p_0, X_0, \emptyset)$

- $\delta_\epsilon(q, a, X) = \delta(q, a, X)$
für alle $q \in Q, X \in \Gamma, a \in \Sigma$
- $\delta_\epsilon(q, \epsilon, X) = \delta(q, \epsilon, X)$
für alle $q \in Q - F, X \in \Gamma$
- $\delta_\epsilon(q, \epsilon, X) = \delta(q, \epsilon, X) \cup \{(p, \epsilon)\}$
für alle $q \in F, X \in \Gamma \cup \{X_0\}$
- $\delta_\epsilon(p_0, \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$
- $\delta_\epsilon(p, \epsilon, X) = \{(p, \epsilon)\}$ für alle $X \in \Gamma \cup \{X_0\}$

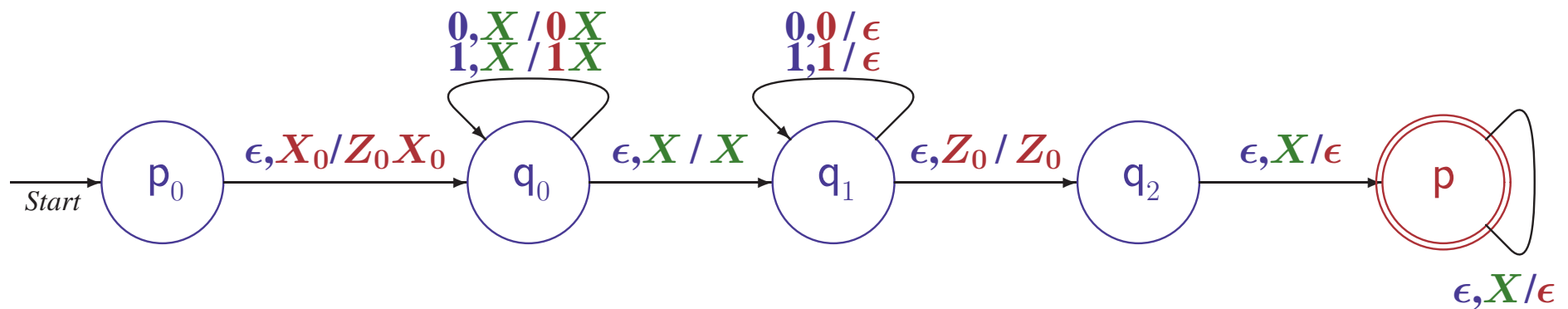


Korrektheitsbeweis durch Detailanalyse

UMWANDLUNG EINES L_F -PDA IN EINEN L_ϵ -PDA



- $P_F = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$
mit δ wie oben erkennt $\{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ mit Endzustand
- Äquivalenter PDA P_ϵ mit leerem Stack ist
 $(\{p_0, q_0, q_1, q_2, p\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0, X_0\}, \delta_\epsilon, p_0, X_0, \{p\})$



SIND PDAS WIRKLICH MASCHINEN FÜR TYP-2 SPRACHEN?

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{PDA} = \{ L \mid \exists P:\text{PDAs. } L=L_\epsilon(P) \}$$

• Konfigurationsübergänge $\hat{=}$ Linksableitungen

- $(q_0, xy, Z_0) \vdash^* (q, y, A\alpha)$ bedeutet, daß P nach Verarbeitung von x im Zustand q ist und noch y und den Stack $A\alpha$ zu verarbeiten hat
 $A\alpha$ muß gespeichert und beim Lesen von y komplett verarbeitet werden
- Linksableitung $S \xrightarrow{*} xA\alpha \xrightarrow{*} xy$ erzeugt aus dem Startsymbol zuerst das Wort $xA\alpha$ und muß dann y aus $A\alpha$ ableiten

• Grammatik \longrightarrow Pushdown-Automat

- PDA muß Linksableitung auf Stack simulieren
- Erzeugte linke Terminalteilwörter müssen mit Teil der Eingabe verglichen werden, um nächste Variable freizulegen

• Pushdown-Automat \longrightarrow Grammatik

- Grammatik muß Abarbeitung von Symbolen des Stacks simulieren
- Regeln beschreiben wie PDA bei Abarbeitung des Stacksymbols X mit δ Zwischenwörter im Stack auf- und schließlich wieder abbaut

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G=(V, T, P_G, S)$ kann ein PDA P konstruiert werden mit $L(G)=L_\epsilon(P)$

- **Stack simuliert Linksableitungen von G**
 - Beginne mit Startsymbol von G
 - $A \in V$ wird im Stack durch rechte Seite β einer Regel $A \rightarrow \beta$ ersetzt
 - $a \in T$ wird vom Stack entfernt, wenn es als Eingabe erscheint, um im Stack die nächsten Variable einer Linksableitung freizulegen
- **Generierter PDA $P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S, \emptyset)$**
 - $\delta(q, \epsilon, A) = \{(q, \beta) \mid A \rightarrow \beta \in P_G\}$ für alle $A \in V$
 - $\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$ für alle $a \in T$
- **Korrektheit: $L(G) = L_\epsilon(P)$** (Detailbeweis im Anhang)

Zeige: (\subseteq) Wenn $S = x_1 A_1 \alpha_1 \dots \rightarrow_L x_m A_m \alpha_m \rightarrow_L w \in T^*$ dann gibt es für alle i ein y_i mit $w = x_i y_i$ und $(q, w, S) \vdash^* (q, y_i, A_i \alpha_i)$

(\supseteq) Wenn $(q, w, X) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)$ dann $X \xrightarrow{*} w$

UMWANDLUNG EINER GRAMMATIK IN EINEN PDA

• $G_7 = (\{E, I\}, \{a, b, c, 0, 1, +, *, (,)\}, P_G, E)$

mit $P_G = \{ E \rightarrow I \mid E+E \mid E*E \mid (E)$

$I \rightarrow a \mid b \mid c \mid Ia \mid Ib \mid Ic \mid I0 \mid I1 \}$

• Erzeuge $P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, E, \emptyset)$

mit $V = \{E, I\}$ und $T = \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}$

– $\delta(q, \epsilon, E) = \{(q, I), (q, E+E), (q, E*E), (q, (E))\}$

– $\delta(q, \epsilon, I) = \{(q, a), (q, b), (q, c), (q, Ia), (q, Ib), (q, Ic), (q, I0), (q, I1)\}$

– $\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$ – $\delta(q, +, +) = \{(q, \epsilon)\}$

– $\delta(q, b, b) = \{(q, \epsilon)\}$ – $\delta(q, *, *) = \{(q, \epsilon)\}$

– $\delta(q, c, c) = \{(q, \epsilon)\}$ – $\delta(q, (, () = \{(q, \epsilon)\}$

– $\delta(q, 0, 0) = \{(q, \epsilon)\}$ – $\delta(q, , ,) = \{(q, \epsilon)\}$

– $\delta(q, 1, 1) = \{(q, \epsilon)\}$

Zu jedem PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ kann eine kfG G konstruiert werden mit $L_\epsilon(P) = L(G)$

- **Simuliere Abarbeitung eines Symbols vom Stack**
 - Verarbeite Variablen der Form “ (q, X, p) ” mit impliziter Bedeutung “Entfernen von X kann von Zustand q zu Zustand p führen”
 - Entfernen von X kann zuerst ein $Y_1..Y_m$ auf- und dann abbauen
 - Beginne mit Erzeugung von Z_0 und zeige, daß Z_0 entfernt werden kann
- **Generiere $G = (\{S\} \cup Q \times \Gamma \times Q, \Sigma, P_G, S)$ mit**
 - $S \rightarrow (q_0, Z_0, q) \in P_G$ für alle $q \in Q$
 - $(q, X, p) \rightarrow a (q', Y_1, q_1)(q_1, Y_2, q_2) \dots (q_{m-1}, Y_m, p) \in P_G$,
für beliebige Kombinationen $q_1, \dots, q_{m-1} \in Q$, falls $(q', Y_1..Y_m) \in \delta(q, a, X)$
 - $(q, X, p) \rightarrow a \in P_G$, falls $(p, \epsilon) \in \delta(q, a, X)$
- **Korrektheitsbeweis $L_\epsilon(P) = L(G)$**
 - Zeige: $(q, X, p) \xrightarrow{*} w \in \Sigma^*$ genau dann, wenn $(q, w, X) \vdash^* (p, \epsilon, \epsilon)$
 - \sqsubseteq : Induktion über Länge der PDA Berechnung
 - \supseteq : Induktion über Länge der Ableitung (viele Details)

UMWANDLUNG EINES PDA IN EINE GRAMMATIK

- **Gegeben** $P = (\{q_0, q_1\}, \{a, b, c\}, \{A, B, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_1\})$

mit $\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, AX)\}$ für $X \in \Gamma$

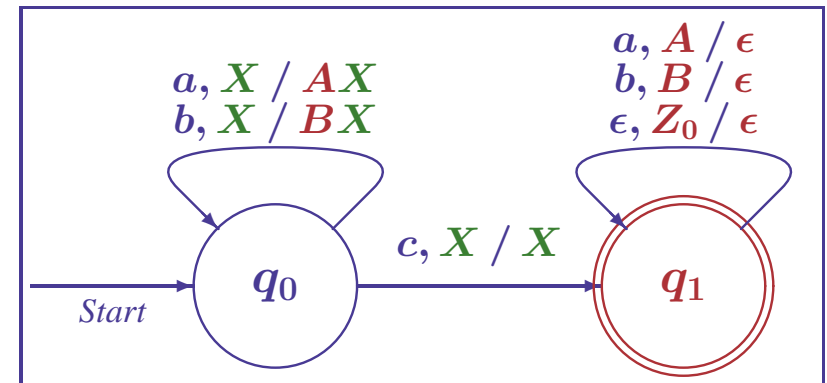
$\delta(q_0, b, X) = \{(q_0, BX)\}$ für $X \in \Gamma$

$\delta(q_0, c, X) = \{(q_1, X)\}$ für $X \in \Gamma$

$\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, \epsilon)\}$

$\delta(q_1, b, B) = \{(q_1, \epsilon)\}$

$\delta(q_1, \epsilon, Z_0) = \{(q_1, \epsilon)\}$



- **Generiere** $G = (V_G, \{a, b, c\}, P_G, S)$

mit $V_G = \{S, (q_0, A, q_0), (q_0, B, q_0), (q_0, Z_0, q_0), (q_0, A, q_1), \dots, (q_1, Z_0, q_1)\}$

mit $P_G = S \rightarrow (q_0, Z_0, q_0) \mid (q_0, Z_0, q_1)$

$(q_0, X, q_0) \rightarrow a(q_0, A, q_0)(q_0, X, q_0) \mid b(q_0, B, q_0)(q_0, X, q_0) \mid c(q_1, X, q_0)$
 $\mid a(q_0, A, q_1)(q_1, X, q_0) \mid b(q_0, B, q_1)(q_1, X, q_0)$

$(q_0, X, q_1) \rightarrow a(q_0, A, q_0)(q_0, X, q_1) \mid b(q_0, B, q_0)(q_0, X, q_1) \mid c(q_1, X, q_1)$
 $\mid a(q_0, A, q_1)(q_1, X, q_1) \mid b(q_0, B, q_1)(q_1, X, q_1)$

$(q_1, A, q_1) \rightarrow a, (q_1, B, q_1) \rightarrow b, (q_1, Z_0, q_1) \rightarrow \epsilon$

Keine Regel für (q_1, X, q_0) , da $\delta(q_1, x, X) = \{(q_1, \epsilon)\}$ für alle x, X

G kann optimiert werden: streiche überflüssige Variablen, vereinfache Variablennamen

- **Maschinenmodell für kontextfreie Sprachen**
 - Nichtdeterministischer endlicher Automat mit Stack und ϵ -Übergängen
 - Erkennung von Wörtern durch Endzustand oder leeren Stack
 - Erkennungsmodelle sind ineinander transformierbar
- **Verhaltensanalyse durch Konfigurationsübergänge**
 - Konfigurationen beschreiben ‘Gesamtzustand’ von Pushdown-Automaten
 - Konfigurationsübergänge verallgemeinern Überföhrungsfunktionen
- **Äquivalent zu kontextfreien Grammatiken**
 - Umwandlung von Konfigurationsübergängen in Regeln und umgekehrt
- **Es gibt auch Deterministische PDAs**
 - **Weniger mächtig**: DPDAs erkennen nur eindeutige Typ-2 Sprachen
 - L_ϵ -DPDAs können nicht einmal alle regulären Sprachen erkennen

ANHANG

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G=(V, T, P_G, S)$ kann ein PDA P konstruiert werden mit $L(G)=L_\epsilon(P)$

- **Stack simuliert Linksableitungen von G**
 - Beginne mit Startsymbol von G
 - $A \in V$ wird im Stack durch rechte Seite β einer Regel $A \rightarrow \beta$ ersetzt
 - $a \in T$ wird vom Stack entfernt, wenn es als Eingabe erscheint, um im Stack die nächsten Variable einer Linksableitung freizulegen
- **Generierter PDA $P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S, \emptyset)$**
 - $\delta(q, \epsilon, A) = \{(q, \beta) \mid A \rightarrow \beta \in P_G\}$ für alle $A \in V$
 - $\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$ für alle $a \in T$
- **Korrektheit: zeige $L(G) = L_\epsilon(P)$** (nächste 2 Folien)

KORREKTHEITSBEWEIF IM DETAIL: $L(G) \subseteq L_\epsilon(P)$

Wenn $S = x_1 A_1 \alpha_1 \dots \xrightarrow{L} x_m A_m \alpha_m \xrightarrow{L} w \in T^*$ ($x_i \in T^*, A_i \in V$) dann gibt es für alle i ein y_i mit $w = x_i y_i$ und $(q, w, S) \vdash^* (q, y_i, A_i \alpha_i)$

- Beweis durch Induktion über $i \leq m$
- Basisfall $i = 1$: $S = x_1 A_1 \alpha_1 \xrightarrow{*} w$
 - Es folgt $S = A_1$ und $x_1 = \alpha_1 = \epsilon$, also muß $y_1 = w$ gewählt werden
 - $(q, w, S) \vdash^* (q, w, S)$ gilt mit 0 Konfigurationsübergängen
- Induktionsschritt: $S \dots \xrightarrow{L} x_i A_i \alpha_i \xrightarrow{L} x_{i+1} A_{i+1} \alpha_{i+1} \xrightarrow{*} w$
 - $x_i A_i \alpha_i \xrightarrow{L} x_{i+1} A_{i+1} \alpha_{i+1}$ verlangt $A_i \rightarrow \beta_i \in P_G$ für ein β_i , wobei $x_i \beta_i \alpha_i = x_i z A_{i+1} \alpha_{i+1}$ für ein $z \in T^*$ und $x_{i+1} = x_i z \sqsubseteq w$.
 - Per Konstruktion gilt dann $(q, \beta_i) \in \delta(q, \epsilon, A_i)$ und mit der Induktionsannahme folgt $(q, w, S) \vdash^* (q, y_i, A_i \alpha_i) \vdash (q, y_i, z A_{i+1} \alpha_{i+1})$
 - Wegen $x_{i+1} = x_i z \sqsubseteq w$ und $w = x_i y_i$ kann y_i zerlegt werden in $z y_{i+1}$ und der PDA arbeitet z ab: $(q, y_i, z A_{i+1} \alpha_{i+1}) \vdash^* (q, y_{i+1}, A_{i+1} \alpha_{i+1})$
- Schlußfolgerung: $S = x_1 A_1 \alpha_1 \dots \xrightarrow{L} x_m A_m \alpha_m \xrightarrow{L} w \in T^*$
 - Wegen $w \in T^*$ folgt $A_m \rightarrow \beta_m \in P_G$ für ein $\beta_m \in T^*$ und $w = x_m \beta_m \alpha_m$
 - Also $(q, w, S) \vdash^* (q, \beta_m \alpha_m, A_m \alpha_m) \vdash (q, \beta_m \alpha_m, \beta_m \alpha_m) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)$, d.h. $w \in L_\epsilon(P)$

KORREKTHEITSBEWIS IM DETAIL: $L(G) \supseteq L_\epsilon(P)$

Für alle $X \in V$ gilt: wenn $(q, w, X) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)$ dann $X \xrightarrow{*} w$

- **Beweis durch Induktion über Länge der PDA Berechnung**
- **Basisfall:** $(q, w, X) \vdash (q, \epsilon, \epsilon)$
 - Es folgt $X \rightarrow \epsilon \in P_G$ und $w = \epsilon$, also $X \xrightarrow{*} w$
- **Induktionsschritt:** $(q, w, X) \vdash^{n+1} (q, \epsilon, \epsilon)$
 - Da X oben im Stack steht, muß der erste Schritt die Form $(q, w, X) \vdash (q, w, Y_1..Y_k)$ für ein $X \rightarrow Y_1..Y_k \in P_G$ haben ($Y_i \in V \cup T$)
 - Dann gibt eine Zerlegung $w = w_1..w_k$ mit $(q, w_1w_2..w_k, Y_1Y_2..Y_k) \vdash^* (q, w_2..w_k, Y_2..Y_k) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)$
 - Es folgt $(q, w_iw_{i+1}..w_k, Y_i) \vdash^* (q, w_{i+1}..w_k, \epsilon)$ also $(q, w_i, Y_i) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)$
 - Per Induktionsannahme folgt $Y_i \xrightarrow{*} w_i$ für alle i (für $Y_i \in T$ ist $Y_i = w_i$)
also $X \xrightarrow{*} Y_1..Y_k \xrightarrow{*} w_1..w_k = w$
- **Es folgt $L_\epsilon(P) = \{w \mid (q, w, S) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)\} \subseteq \{w \mid S \xrightarrow{*} w\} = L(G)$**

- **Grammatiken sind nichtdeterministisch**
 - Nichtdeterministische Automaten sind das “natürliche” Gegenstück
 - Grammatikregeln führen zu mengenwertiger Überföhrungsfunktion
 - “Wirkliche” Automaten müssen deterministisch sein
- **Typ-3 Sprachen haben deterministische Modelle**
 - NEAs können in äquivalente DEAs umgewandelt werden
 - Teilmengenkonstruktion kann Automaten exponentiell vergrößern
- **Reichen deterministische PDAs für Typ-2 Sprachen?**
 - Überföhrungsfunktion $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$ muß eindeutig sein
 - Gibt es für PDAs immer äquivalente deterministische PDAs?

- **Ein Deterministischer Pushdown-Automat (DPDA)**

ist ein 7-Tupel $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ mit

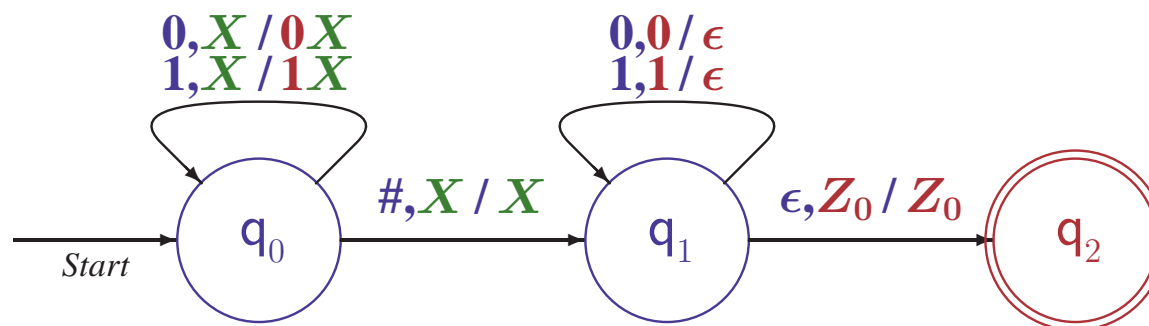
- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ endliches **Eingabealphabet**
- Γ endliches **Stackalphabet**
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$ **Überföhrungsfunktion**
 $\delta(q, \epsilon, X)$ nur definiert, wenn $\delta(q, a, X)$ für alle $a \in \Sigma$ undefiniert
- $q_0 \in Q$ **Startzustand**
- $Z_0 \in \Gamma$ **Initialsymbol des Stacks**
- $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden (End-)Zuständen**

- **Erkannte Sprache**

- $L_F(P) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F. \exists \beta \in \Gamma^*. (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \beta) \}$
- $L_\epsilon(P) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q. (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon) \}$

L_F -DPDAs SIND MÄCHTIGER ALS DEAs

- $\mathcal{L}_3 = L(DEA) \subseteq \mathcal{L}_{DPDA}^F$
 - Jeder DEA ist ein spezieller DPDA, der mit Endzustand akzeptiert
- $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\} \in \mathcal{L}_{DPDA}^F - \mathcal{L}_3$
 - L ist nicht regulär
 - Beweis durch Pumping Lemma, analog zu $\{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$
 - $L = L_F(P)$ für folgenden DPDA P



P ist deterministisch, da $\delta(q, a, Z_0)$ für alle $a \in \Sigma$ undefiniert ist

L_ϵ -DPDAs SIND ZU AUSDRUCKSSCHWACH

- $\mathcal{L}_{DPDA}^\epsilon \subseteq \mathcal{L}_{DPDA}^F$
 - Transformation von L_ϵ - in L_F -PDAs erhält Bedingung an DPDAs
- **L_ϵ -DPDAs erkennen nur präfixfreie Sprachen**

“kein Wort aus $L_\epsilon(P)$ ist echtes Präfix eines anderen Wortes aus $L_\epsilon(P)$ ”

Intuitiv: Wenn der Stack einmal leer ist, kann P nicht weiterarbeiten

 - Ist $u \in L_\epsilon(P)$ dann stoppt P nach Verarbeitung von u mit leerem Stack
 - Eine echte Erweiterung von u wird von P nicht komplett abgearbeitet und damit nicht akzeptiert
- $\mathcal{L}_3 \not\subseteq \mathcal{L}_{DPDA}^\epsilon$
 - $\{0\}^* \notin \mathcal{L}_{DPDA}^\epsilon$, da $\{0\}^*$ nicht präfixfrei ist
- **L_ϵ -DPDAs und L_F -DPDAs sind nicht äquivalent**
 - Aus $\{0\}^* \notin \mathcal{L}_{DPDA}^\epsilon$ folgt auch $\mathcal{L}_{DPDA}^F \not\subseteq \mathcal{L}_{DPDA}^\epsilon$

\mathcal{L}_{DPDA}^F IST ECHE TEILKLASSE VON \mathcal{L}_2

- $\mathcal{L}_{DPDA}^F \subseteq \mathcal{L}_2$
 - Jeder DPDA ist ein spezieller PDA
- **L_F -DPDAs können $\{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ nicht erkennen**

Intuitiv: DPDA P kann die Mitte eines Wortes nicht identifizieren

 - P muß $0^n 1 10^n$ akzeptieren, Stack wird beim Vergleich geleert (großes n)
 - P muß auch akzeptieren, wenn noch einmal $0^n 1 10^n$ folgt
 - P darf nicht akzeptieren, wenn stattdessen $0^m 1 10^m$ ($m \neq n$) folgt
 - Aber P kann nicht unterscheiden, da n nicht mehr gespeichert ist

Technisches Argument: Abschlußeigenschaften + Pumping Lemma für \mathcal{L}_2
- **L_F -DPDAs bilden eine eigene wichtige Sprachklasse**
 - **Deterministisch kontextfreie Sprachen**

- **$\mathcal{L}_{DPDA}^\epsilon$ -Sprachen sind eindeutig**
 - Standardumwandlung von L_ϵ -(D)PDA P liefert Typ-2 Grammatik
 - Konfigurationsübergangsfolgen bestimmen Linksableitungen eindeutig
 - Für jede Eingabe w gibt es in P nur einen Konfigurationsübergang
 - Erzeugte Grammatik ist eindeutig
- **\mathcal{L}_{DPDA}^F -Sprachen sind eindeutig**
 - Mache Sprache von L_F -DPDA P präfixfrei durch Anhängen von $\$$
 - Präfixfreie Sprachen in \mathcal{L}_{DPDA}^F sind $\mathcal{L}_{DPDA}^\epsilon$ -Sprachen
 - Damit hat die modifizierte Sprache eine eindeutige Grammatik G
 - G' mit zusätzlicher Regel $\$ \rightarrow \epsilon$ (und Variable $\$$) erzeugt Sprache von P
 - Linksableitungen in G' sind “identisch” zu denen in G , also eindeutig
- **Nicht jede eindeutige Typ-2 Sprache ist deterministisch**
 - $\{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ ist eindeutig, aber nicht deterministisch erkennbar