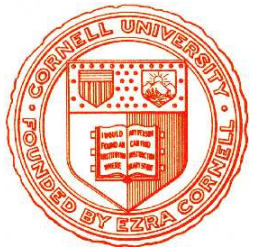
Automatisierte Logik und Programmierung

Wintersemester 2016/17



Christoph Kreitz

Theoretische Informatik, Raum 1.18, Telephon 3060

kreitz@cs.uni-potsdam.de

http://cs.uni-potsdam.de//alup1-ws1617

1. Automatisches Schließen – wozu?
2. Was ist automatisierte Logik?
3. Anwendungen und Erfolge
4. Organisation der Veranstaltung

Automatisches Schliessen – wozu?

- **Es gibt zu viele Fehler in wissenschaftlichen Arbeiten**
  - Moderne Forschungsgebiete sind extrem komplex
    Genaue Analysen und der Beweis ihrer Korrektheit sind schwierig
  - Menschen machen Fehler bei der Ausarbeitung von Details
  - Fehler werden auch beim Reviewprozeß von Publikationen übersehen
    ca. 40–50% aller veröffentlichten Resultate sind falsch
- **Besonders schlimm ist es bei der Erstellung von Software**
  - Software und ihre Anforderungen sind meist unüberschaubar
  - Auch sorgfältig getestete Programme enthalten größere Fehler
    ca 3-5 Fehler auf 1000 LOC "Hochqualitätscode" bei Kosten von $200/LOC
- **Rein informales Vorgehen hat sich nicht bewährt**
  - Wir konzentieren uns auf Ideen und machen Fehler bei der Ausführung
  - Wir verwenden implizite Annahmen / Analogien, die nicht immer stimmen
  - Wir vertrauen "Autoritäten" ohne nachzuprüfen

Mathematik-Beispiel: Das Briefmarken Problem

Ist es möglich, jedes Porto ab 8 Cent nur mit 3c und 5c Briefmarken zu erzeugen?

Mathematik-Beispiel: Das Briefmarken Problem

Ist es möglich, jedes Porto ab 8 Cent nur mit 3c und 5c Briefmarken zu erzeugen?

Idee: 8c =  , 9c =  , 10c =  , 11c =  , . . .

Mathematik-Beispiel: Das Briefmarken Problem

Ist es möglich, jedes Porto ab 8 Cent nur mit 3c und 5c Briefmarken zu erzeugen?

Idee: 8c =  , 9c =  , 10c =  , 11c =  ,...

- **Einfacher Induktionsbeweis**
  - Zeige: für alle $n \geq 8$ gibt es $i, j \in \mathbb{N}$ mit $n = i \cdot 3 + j \cdot 5$
  - Basisfälle 8, 9, 10 sind lösbar wie oben illustriert.
  - Lösung für größere n wird aus der für $n-3$ mit weiteren 3c erzeugt

Mathematik-Beispiel: Das Briefmarken Problem

Ist es möglich, jedes Porto ab 8 Cent nur mit 3c und 5c Briefmarken zu erzeugen?

Idee: 8c =  , 9c =  , 10c =  , 11c =  ,...

- **Einfacher Induktionsbeweis**
  - Zeige: für alle $n \geq 8$ gibt es $i, j \in \mathbb{N}$ mit $n = i \cdot 3 + j \cdot 5$
  - Basisfälle 8, 9, 10 sind lösbar wie oben illustriert.
  - Lösung für größere n wird aus der für $n-3$ mit weiteren 3c erzeugt
- **Gibt es andere Paare mit derselben Eigenschaft?**
  - Offensichtlich 1c und jede andere Zahl, 2c und jede ungerade Zahl
  - **Kann man beweisen, daß dies alle Möglichkeiten sind?**

Beweis des Briefmarken Problems © Marktoberdorf 7/95

Satz: **Ist jedes $n \geq a+b$ darstellbar als $n = i \cdot a + j \cdot b$** $(i, j \in \mathbb{N}, 1 < a < b \in \mathbb{N})$
dann ist $a=2$ und b ungerade oder $a=3$ und $b=5$

Beweis des Briefmarken Problems

Satz: **Ist jedes $n \geq a+b$ darstellbar als $n = i \cdot a + j \cdot b$** $(i, j \in \mathbb{N}, 1 < a < b \in \mathbb{N})$

dann ist $a=2$ und b ungerade oder $a=3$ und $b=5$

Beweis:

$\exists i, j.\ a+b+1 = i \cdot a + j \cdot b \quad \mapsto \quad a \mid (b+1)$ oder $b = a+1$ (1)

$\exists i, j.\ a+b+2 = i \cdot a + j \cdot b \quad \mapsto \quad a = 2$ oder $a \mid (b+2)$ oder $b = a+2$ (2)

Falls $a=2$, dann ist b ungerade wegen (1)

Beweis des Briefmarken Problems

Satz: **Ist jedes $n \geq a+b$ darstellbar als $n = i \cdot a + j \cdot b$** $(i, j \in \mathbb{N}, 1 < a < b \in \mathbb{N})$
dann ist $a=2$ und b ungerade oder $a=3$ und $b=5$

Beweis:

$\exists i, j.\ a+b+1 = i \cdot a + j \cdot b \quad \mapsto \quad a \mid (b+1)$ oder $b=a+1$ (1)

$\exists i, j.\ a+b+2 = i \cdot a + j \cdot b \quad \mapsto \quad a=2$ oder $a \mid (b+2)$ oder $b=a+2$ (2)

Falls $a=2$, dann ist b ungerade wegen (1)

Falls $a>2$, dann ist $b>3$ und (1) liefert zwei Fälle

$a \mid (b+1)$**:** wegen $a>2$ kann a nicht $b+2$ teilen und wegen (2) gilt $b=a+2$

$\exists i, j.\ a+b+3 = i \cdot a + j \cdot b \quad \mapsto \quad a=3$ oder $a \mid (b+3)$ oder $b=a+3$ (3)

– $b=a+3$ ist unmöglich, da $b=a+2$.

– $a \mid (b+3)$ ist unmöglich, da $a \mid (b+1)$ und $a>2$.

Also gilt $a = 3$ und $b = 5$ ✓

$b=a+1$**:** wegen (2) folgt wie oben $a \mid (a+3)$ oder $a+1 = a+2$.

Beides ist unmöglich. ✓

Beweis des Briefmarken Problems © Marktoberdorf 7/95

Satz: Ist jedes $n \geq a+b$ darstellbar als $n = i \cdot a + j \cdot b$ $(i, j \in \mathbb{N}, 1 < a < b \in \mathbb{N})$
dann ist $a=2$ und b ungerade oder $a=3$ und $b=5$

Beweis:

$\exists i, j.\ a+b+1 = i \cdot a + j \cdot b \quad \mapsto \quad a \mid (b+1)$ oder $b=a+1$ (1)

$\exists i, j.\ a+b+2 = i \cdot a + j \cdot b \quad \mapsto \quad a=2$ oder $a \mid (b+2)$ oder $b=a+2$ (2)

Falls $a=2$, dann ist b ungerade wegen (1)

Falls $a>2$, dann ist $b>3$ und (1) liefert zwei Fälle

$a \mid (b+1)$**:** wegen $a>2$ kann a nicht $b+2$ teilen und wegen (2) gilt $b=a+2$

$\exists i, j.\ a+b+3 = i \cdot a + j \cdot b \quad \mapsto \quad a=3$ oder $a \mid (b+3)$ oder $b=a+3$ (3)

– $b=a+3$ ist unmöglich, da $b=a+2$.

– $a \mid (b+3)$ ist unmöglich, da $a \mid (b+1)$ und $a>2$.

Also gilt $a = 3$ und $b = 5$ ✓

$b=a+1$**:** wegen (2) folgt wie oben $a \mid (a+3)$ oder $a+1 = a+2$.

~~Beides ist unmöglich~~. **Möglich für $a=3$ und $b=4$**

Formales Vorgehen hilft, solche Fehler zu vermeiden

Fehler in Software sind noch problematischer

- **Software ist integraler Bestandteil unseres Lebens**
  - Steuerungsmodule in Alltagsprodukten, e-Commerce, Telephonnetze, Smartphones, Automobilkonstruktion, Luftfahrtkontrolle, ...
- **Softwarefehler sind lästig**
  - Reboot, Datenverlust, Funktionsunfähigkeit, Viren, Netzwerkausfälle...
- **Softwarefehler sind teuer**
  - 1994: Pentium I Prozessor liefert falsche Resultate bei Division
  - 1996: ESA Ariane 501 explodiert wegen Überlauf der 16bit Arithmetik
  - 1999: Mars Polar Lander & Climate Orbiter stürzen ab (Einheitenfehler)
  - 2016: Röntgensatellit Hitomi durch extreme Rotation zerstört
  - 2016: Comdirekt Bank erlebt unbefugten Online-Zugriff auf Fremdkonten
- **Softwarefehler kosten Menschenleben**
  - 1988: Air France A320 streift Bäume bei Flugshow (Einheitenfehler)
  - 1993: Lufthansa A320 verweigert Umkehrschub bei Landung im Regen
  - 1995: Boeing 757 prallt auf Berge auf (Fehler in Navigationsdaten)
- **Softwarefehler erzeugen gefährliche Sicherheitslöcher**
  - Heartbleed Fehler in SSl (2014), CAN-Bus Attacken auf Autos (2015) ...

Es ist etwas falsch in der Softwareproduktion

- **Softwareproduktion ist heute immer noch ineffizient**
  - Entwurf und Implementierung fokussiert auf Modellierungs- und Programmiersprachen anstatt auf Eigenschaften des Problembereichs
  - Der Weg von Spezifikation zu Code ist i.w. immer noch "von Hand"
    → hohe Kosten für Erstellung und Wartung
    → suboptimaler Code, funktioniert selten auf Anhieb
    → keine Begründung für Korrektheit ihres Programms
  - Probleme führen zu ad hoc Änderungen statt Revision des Entwurfs
    → Neue Fehler und ständige Sicherheitsupdates
    Wer würde ein Auto kaufen/fahren, was derartig viele Probleme hat?
- **Softwareentwicklung ist mehr als Codierung**
  - Logische Verarbeitung von Wissen + kreative Umsetzung von Ideen
  - Mehr als Modellierungstools alleine liefern können

Automatisierte formale Logik kann diesen Prozeß unterstützen

Beispiel: Maximale Segmentsumme einer Liste

Gegeben eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ bestimme die Summe $\sum_{i=p}^{q} a_i$ eines Segmentes, die maximal bezüglich aller möglicher Segmentsummen ist

2	**3**	**-6**	**4**	**5**	**-3**	**8**	**-2**	**-1**	**5**	**-9**	**2**	**3**

Beispiel: Maximale Segmentsumme einer Liste

Gegeben eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ bestimme die Summe $\sum_{i=p}^{q} a_i$ eines Segmentes, die maximal bezüglich aller möglicher Segmentsummen ist

2	**3**	**-6**	**4**	**5**	**-3**	**8**	**-2**	**-1**	**5**	**-9**	**2**	**3**

16

Beispiel: Maximale Segmentsumme einer Liste

Gegeben eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ bestimme die Summe $\sum_{i=p}^{q} a_i$ eines Segmentes, die maximal bezüglich aller möglicher Segmentsummen ist

2	3	-6	4	5	-3	8	-2	-1	5	-9	2	3

16

- **Direkte Lösung leicht zu programmieren**

```
let maxseg a ≡
   result := a[1]
   from p = 1 to length(a) do
      from q = i to length(a) do
         sum := 0
         from i = p to q do sum := sum+a[i] end
         if sum > result then result := sum
      end
   end
```

Beispiel: Maximale Segmentsumme einer Liste

Gegeben eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ bestimme die Summe $\sum_{i=p}^{q} a_i$ eines Segmentes, die maximal bezüglich aller möglicher Segmentsummen ist

2	3	-6	4	5	-3	8	-2	-1	5	-9	2	3

16

- **Direkte Lösung leicht zu programmieren**

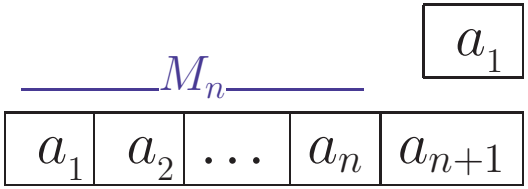
```
let maxseg a ≡
   result := a[1]
   from p = 1 to length(a) do
      from q = i to length(a) do
         sum := 0
         from i = p to q do sum := sum+a[i] end
         if sum > result then result := sum
      end
   end
```

- **Algorithmus ist ineffizient** $(\mathcal{O}(n^3))$
  - **Wie kann man eine bessere Lösung erzeugen?**

Maximale Segmentsumme: systematische Lösung

Betrachte Eigenschaften von $M_n \equiv max\{\Sigma_{i=p}^{q} a_i \mid 1 \leq p \leq q \leq n\}$

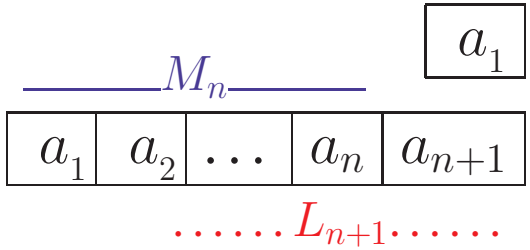
- **Induktive Analyse liefert**
  - $M_1 = a_1$
  - $M_{n+1} = max(M_n, max\{\Sigma_{i=p}^{n+1} a_i \mid 1 \leq p \leq n\})$



Maximale Segmentsumme: systematische Lösung

Betrachte Eigenschaften von $M_n \equiv max\{\Sigma_{i=p}^{q} a_i \mid 1 \leq p \leq q \leq n\}$

- **Induktive Analyse liefert**
  - $M_1 = a_1$
  - $M_{n+1} = max(M_n, max\{\Sigma_{i=p}^{n+1} a_i \mid 1 \leq p \leq n\})$

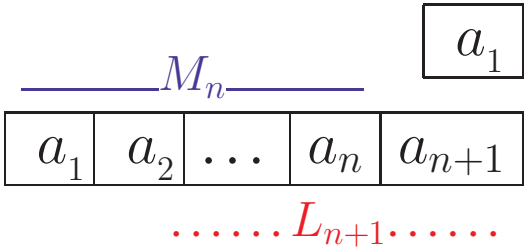


- **Definiere** $\boldsymbol{L_n \equiv max\{\Sigma_{i=p}^{n} a_i \mid 1 \leq p \leq n\}}$
  - Dann ist $L_1 = a_1, \quad L_{n+1} = max(L_n + a_{n+1},\ a_{n+1})$

Maximale Segmentsumme: systematische Lösung

Betrachte Eigenschaften von $M_n \equiv max\{\Sigma_{i=p}^{q} a_i \mid 1 \leq p \leq q \leq n\}$

- **Induktive Analyse liefert**
  - $M_1 = a_1$
  - $M_{n+1} = max(M_n, max\{\Sigma_{i=p}^{n+1} a_i \mid 1 \leq p \leq n\})$



- **Definiere** $L_n \equiv max\{\Sigma_{i=p}^{n} a_i \mid 1 \leq p \leq n\}$
  - Dann ist $L_1 = a_1, \quad L_{n+1} = max(L_n + a_{n+1},\ a_{n+1})$
- **Analyse liefert eleganten, effizienten Algorithmus**

```
let maxseg a ≡
   M_n := a[1]
   L_n := a[1]
   from n = 2 to length(a) do
      if L_n>0 then L_n := L_n+a[n] else L_n := a[n]
      if L_n>M_n then M_n := L_n
   end
```

Automatisches Schliessen liefert Lösungen

- **Logische Analyse führt zu besserer Software**
  - Wissen wird systematisch verarbeitet
  - Zusammenhang zwischen Spezifikation und Lösung ist erkennbar
- **Formalisierung logischer Schlüsse eliminiert Fehler**
  - Simuliere logisches Schließen auf dem Computer
  - Kreative Steuerung des Entwicklungsprozesses durch Menschen
  - Computer kontrolliert Korrektheit der Herleitung in logischem Kalkül
  - Skript der Herleitungsschritte vereinfacht Wartung und Änderungen
  - Effektive Kooperation zwischen Mensch und Maschine
- **Automatisierte Logik reduziert Aufwand**
  - Computer führt “triviale” logische Schlüsse von selbst aus
  - Computer synthetisiert Code aus formaler Analyse des Problems

Schliessen braucht formale Logische Kalküle

Simulation mathematisch-semantischer Argumentation

- **Anwendung formaler Regeln ohne Nachdenken**
  - Umgeht Mehrdeutigkeiten der natürlichen Sprache
  - Erlaubt schematische Lösung mathematischer Probleme
- **Kernbestandteile:**
  - Formale Sprache (Syntax + Semantik)
  - Ableitungssystem (Axiome + Inferenzregeln)
- **Wichtige Eigenschaften**
  - Korrekt, vollständig, implementierbar (notwendig)
  - Verständliche formale Texte (für Interaktion)
  - Konstruktiv, ausdrucksstark (für Programmierung)

  Nicht jeder Kalkül hat all diese Eigenschaften gleichzeitig

Welche Kalküle brauchen wir?

- **Unterstützung für Mathematik und Programmierung**
  - Präzises mathematisches Argumentieren (Logik)
  - Schließen über operationales Programmverhalten (Berechnungskalkül)
  - Schließen über externes Programmverhalten (Spezifikationskalkül)

Welche Kalküle brauchen wir?

- **Unterstützung für Mathematik und Programmierung**
  - Präzises mathematisches Argumentieren (Logik)
  - Schließen über operationales Programmverhalten (Berechnungskalkül)
  - Schließen über externes Programmverhalten (Spezifikationskalkül)
- **Bekannte Arten von Kalkülen**
  - Mathematische Logik: Aussagenlogik, Prädikatenlogik, ...
  - Berechnungskalküle: Maschinenmodelle, λ-Kalkül, ...
  - Spezifikationskalküle (einfachste Form): Typchecking, Typkalküle,...

Welche Kalküle brauchen wir?

- **Unterstützung für Mathematik und Programmierung**
  - Präzises mathematisches Argumentieren (Logik)
  - Schließen über operationales Programmverhalten (Berechnungskalkül)
  - Schließen über externes Programmverhalten (Spezifikationskalkül)
- **Bekannte Arten von Kalkülen**
  - Mathematische Logik: Aussagenlogik, Prädikatenlogik, ...
  - Berechnungskalküle: Maschinenmodelle, λ-Kalkül, ...
  - Spezifikationskalküle (einfachste Form): Typchecking, Typkalküle,...
- **Kann man diese Aspekte in einem Kalkül beschreiben?**
  - Kalkül muß Logik mit Berechnung und Typsystem koppeln
  - Uniformer Kalkül für Logik, Berechnung, Programmeigenschaften
  - Ansätze: Higher-Order Logic, Konstruktive Typentheorie

Welche Kalküle brauchen wir?

- **Unterstützung für Mathematik und Programmierung**
  - Präzises mathematisches Argumentieren (Logik)
  - Schließen über operationales Programmverhalten (Berechnungskalkül)
  - Schließen über externes Programmverhalten (Spezifikationskalkül)
- **Bekannte Arten von Kalkülen**
  - Mathematische Logik: Aussagenlogik, Prädikatenlogik, ...
  - Berechnungskalküle: Maschinenmodelle, λ-Kalkül, ...
  - Spezifikationskalküle (einfachste Form): Typchecking, Typkalküle,...
- **Kann man diese Aspekte in einem Kalkül beschreiben?**
  - Kalkül muß Logik mit Berechnung und Typsystem koppeln
  - Uniformer Kalkül für Logik, Berechnung, Programmeigenschaften
  - Ansätze: Higher-Order Logic, Konstruktive Typentheorie

Veranstaltung betrachtet zunächst alle Aspekte separat und dann die einheitliche Theorie

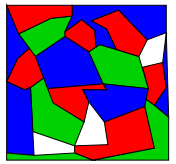
Welche Computerunterstützung ist möglich?

- **Es gibt theoretische Grenzen**
  - Arithmetik ist nicht voll axiomatisierbar
  - Gültigkeit prädikatenlogischer Formeln ist unentscheidbar
  - Programmterminierung, -korrektheit, -äquivalenz ist unentscheidbar
  - Computer brauchen Benutzersteuerung bei Suche nach Beweisen
- **Interaktive Beweiseditoren**
  - Benutzer konstruieren Beweise durch Anwendung von Regeln
  - Computer führt Regeln aus und zeigt ungelöste Teilprobleme
- **Automatisierte Beweisprozeduren**
  - Entscheidungsprozeduren for entscheidbare Teilprobleme
  - Beweissuchverfahren für eingeschränkte Anwendungsbereiche
  - Taktiken: programmierte Anwendung von Inferenzregeln
- **Integrierte Systeme**
  - Interaktive Beweiseditoren mit externen Steuerungsmechanismen

In dieser Veranstaltung wird das Nuprl Beweisentwicklungssystem vorgestellt und eingesetzt

Computergestütztes Schliessen zeigt Erfolge ...

1977: **Vier-Farben Problem**



– Spezialsoftware überprüft tausende kritischer Fälle

– Erneuter Beweis mit generischem Theorembeweiser Coq in 2005

1993: **Synthese von Scheduling Algorithmen**

– KIDS erzeugt korrekte Algorithmen in wenigen Stunden

– Erzeugter Lisp Code 2000 mal schneller als existierende ADA Software

1995: **Pentium Bug**

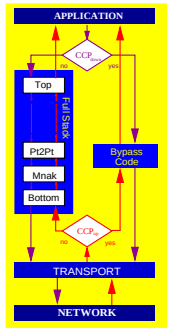
– Model Checking findet Fehler in Hardwaretabellen für Division

1996: **Robbins Hypothese**

The New York Times

– Theorembeweiser EQP findet (lesbaren) Beweis in 7 Tagen

1998: **Netzwerkverifikation, -optimierung, -entwurf**



– Verifikation findet subtile Fehler in Protokollen und ISO-Standards

– Logische Optimierung steigert Performanz um Faktor 3–10

2009–14: **Formal verifizierte Systemkomponenten**

– CompCert C Compiler, sel4 Microkernel, shadowDB Datenbank

2015: **Keplersche Vermutung**

– FlySpecK Projekt formalisiert informalen Beweis in HOL light

2012–: **Forschungsprogramme HACMS und DeepSpec**

– Erzeugung formal verifizierter Komponenten für eingebettete Systeme

Seit 2012 werden für Hochsicherheitssoftware maschinenprüfbare Korrektheisbeweise verlangt

Zugehörige Studien- und Forschungsgebiete

- **Entwicklung formaler Logiken** (AluP I)
  - "Klassisch", konstruktiv, modal, linear temporal, ...
  - Erste oder höhere Stufe , Typentheorien, ...
  - Behandlung von Objekten, Vererbung, Nebenläufigkeit, Echtzeit, ...
- **Automatische Beweisprozeduren** (AluP II, Inferenzmethoden)
  - Matrixmethoden, Induktionsbeweisen, Rewriting, Beweisplaner, ...
  - Entscheidungsprozeduren, kooperierende & verteilte Beweiser, ...
- **Beweisentwicklungssysteme** (AluP II)
  - Interaktive Beweiseditoren, Beweispräsentation, Wissensverwaltung, ...
  - Web-Einbindung, GUI's, Systemschnittstellen, ...
- **Anwendung: Logik in die Software bringen** (AluP II)
  - Verifikation formalen Wissens zu Daten- und Algorithmenstrukturen
  - Strategien für Synthese, Verifikation und Optimierung von Algorithmen
  - Entwicklung und Verifikation sicherheitskritischer Systeme

⋮

Organisatorisches

- **Zuordnung: theoretische/angewandte Informatik**
- **Veranstaltungen**
  - Vorlesung — Mi/Do 10:15–11:45 (1.02)

    Präsentation der zentralen Konzepte / Ideen

    Keine Veranstaltung am 12./13.12.2016 und 4.1.2017
  - Übungsaufgaben — gelegentlich

    Anregung und Herausforderungen zum Selbsttraining
  - Sprechstunde — Fr 10:30–11:30 (und immer wenn die Türe offen ist)

    Fachberatung / Klärung von Schwierigkeiten mit der Thematik
- **Lehrmaterialien**
  - Vorlesungsfolien, Handouts, Skript (1995), Fachbücher im Web
- **Empfohlene Vorkenntnisse:**
  - Theoretische Informatik II, Logik, (etwas) funktionale Programmierung
- **Erfolgskriterium: Abschlußklausur am 9. Februar 2017**
  - Alternativ mündliche Prüfung nach Vereinbarung