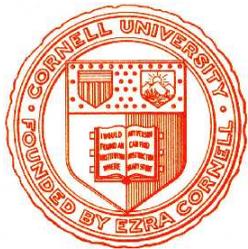


Theoretische Informatik I

Einheit 2.3

Reguläre Ausdrücke



1. Anwendungen
2. Syntax und Semantik
3. Vereinfachungsregeln
4. Beziehung zu endlichen Automaten

- **Automaten beschreiben Abarbeitung von Sprachen**
 - **Operationale Semantik:** Symbole führen zu Zustandsänderungen
 - Bestimmte Wörter bzw. Symbolketten werden durch Zustände akzeptiert
 - Für Automaten ist Sprache $\hat{=}$ Menge der akzeptierten Wörter
- **Wie beschreibt man Eigenschaften von Wörtern?**
 - **Deklarative Semantik:** äußere Form von Zeichenreihen einer Sprache
z.B. *Wörter haben eine führende Null, dann beliebig viele Einsen*
 - Anwendungen brauchen präzise Beschreibungssprache für Wörter
 - Grundeinheiten von Programmiersprachen, Suchmuster für Browser, ...
- **Reguläre Ausdrücke als formale Syntax**
 - Kurze, prägnante Beschreibung des Aufbaus der Wörter einer Sprache
z.B. 01^* : “Zuerst eine Null, dann beliebig viele Einsen”

- **Suche nach Mustern in Texten**

- Suche ob/wo/wie oft eine bestimmte Zeichenkette im Text erscheint
- Textmuster kann Platzhalter enthalten

- **Suche nach Mustern in Texten**

- Suche ob/wo/wie oft eine bestimmte Zeichenkette im Text erscheint
- Textmuster kann Platzhalter enthalten

- **Beschreibe Textmuster durch reguläre Ausdrücke**

- Zahl: Ziffernfolge dann evtl. Punkt und nichtleere Ziffernfolge
- Formaler Ausdruck:

$(0+1+\dots+9)^*(\epsilon+(\cdot(0+1+\dots+9)(0+1+\dots+9)^*))$

- **Suche nach Mustern in Texten**

- Suche ob/wo/wie oft eine bestimmte Zeichenkette im Text erscheint
- Textmuster kann Platzhalter enthalten

- **Beschreibe Textmuster durch reguläre Ausdrücke**

- Zahl: Ziffernfolge dann evtl. Punkt und nichtleere Ziffernfolge
- Formaler Ausdruck:

$(0+1+\dots+9)^*(\epsilon+(\cdot(0+1+\dots+9)(0+1+\dots+9)^*))$

- **Vielfältige Anwendungen**

- Google Suche nach einfachen Texten
- Erweiterte Google Suche nach Textmustern
- Unix Kommando **grep**: suche nach Textmustern in Dateien
- Programmiersprachen wie **PERL** und **AWK**
- Textsuche und Textersetzung in **Emacs**
- Lexikalische Analyse in Compilern

Wichtigster Grundbestandteil von Compilern

- **Reguläre Ausdrücke beschreiben Token**
 - Logische Grundeinheiten von Programmiersprachen
 - z.B. Schlüsselwörter, Bezeichner, Dezimalzahlen, ...
- **“Lexer” transformieren reguläre Ausdrücke in Analyseprogramme**
 - Analyse kann die Token der Programmiersprache identifizieren
 - Zugrundeliegende Technik:
Umwandlung regulärer Ausdrücke in DEAs

REGULÄRE AUSDRÜCKE PRÄZISIERT (SYNTAX)

- **Syntax: Terme über $\Sigma \cup \{\emptyset, \epsilon, +, \circ, *, (,)\}$**

Reguläre Ausdrücke sind induktiv wie folgt definiert

- $E = a$ ist ein regulärer Ausdruck für jedes $a \in \Sigma$
- $E = \emptyset$ und $F = \epsilon$ sind reguläre Ausdrücke
- Sind E und F reguläre Ausdrücke, dann sind auch $E \circ F$, E^* , $E + F$ und (E) sind reguläre Ausdrücke

Mehr Ausdrücke möglich, aber nicht erforderlich

- **Konventionen zur Vereinfachung**

- $E \circ F$ wird üblicherweise als EF abgekürzt
- Definitive Abkürzungen: $E^+ \equiv EE^*$, $[a_1 \dots a_n] \equiv a_1 + \dots + a_n$
- **Prioritätsregelungen** ermöglichen, überflüssige Klammern wegzulassen
 - $*$ (“Sternoperator”) bindet stärker als \circ , und dies stärker als $+$
 - Verkettung \circ und Alternative $+$ sind assoziativ

REGULÄRE AUSDRÜCKE PRÄZISIERT (SEMANTIK)

- **Reguläre Ausdrücke beschreiben Sprachen über Σ**

- **Die Sprache $L(E)$ ist induktiv definiert**

- Für für alle $a \in \Sigma$ ist $L(a) = \{a\}$ (einelementige Sprache, die nur a enthält)

- $L(\emptyset)$ ist die leere Sprache (üblicherweise geschrieben als \emptyset oder $\{\}$)

- $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$ (einelementige Sprache, die nur das leere Wort enthält)

- $L(E \circ F) = L(E) \circ L(F) = \{v w \mid v \in L(E) \wedge w \in L(F)\}$

- steht für die Verkettung (der Wörter) zweier Sprachen

- $L(E^*) = (L(E))^* = \{w_1 w_2 \dots w_n \mid n \in \mathbb{N} \wedge w_i \in L(E)\}$

- * steht für Verkettung beliebig vieler Wörter einer Sprache (Kleene'sche Hülle)

- $L(E + F) = L(E) \cup L(F) = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L(E) \vee w \in L(F)\}$

- + steht für die Vereinigung zweier Sprachen

- $L((E)) = L(E)$

SPRACHEN VS. AUSDRÜCKE

- **Sprachen sind Mengen von Wörtern**

- Abstraktes semantisches Konzept: Ungeordnete Kollektion von Wörtern
- Beschreibung von Mengen (auf Folie, Tafel,...) benötigt textuelle Notation
- Notation benutzt Kurzschreibweisen wie \cup , \circ , $*$ für Mengenoperationen
... aber ist selbst nur ein Hilfsmittel zur Kommunikation

- **Reguläre Ausdrücke sind Terme**

- Eine syntaktische Beschreibungsform, die ein Computer versteht
- Reguläre Ausdrücke werden zur Beschreibung von Sprachen benutzt und sind ähnlich zur Standardnotation von Mengen

- **Reguläre Ausdrücke sind selbst keine Sprachen**

- Unterscheide Ausdruck E von Sprache des Ausdrucks $L(E)$
- Man verzichtet auf den Unterschied wenn der Kontext eindeutig ist

BEISPIELE REGULÄRER AUSDRÜCKE

- a^*ba^*

BEISPIELE REGULÄRER AUSDRÜCKE

- a^*ba^*
 - steht für die Menge aller Wörter über $\Sigma=\{a,b\}$, die genau ein b enthalten
 - $L(a^*ba^*) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält genau ein } b\} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b=1\}$

BEISPIELE REGULÄRER AUSDRÜCKE

- a^*ba^*

- steht für die Menge aller Wörter über $\Sigma=\{a,b\}$, die genau ein b enthalten

- $L(a^*ba^*) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält genau ein } b\} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b=1\}$

- $(a+b)^*b(a+b)^*$

- steht für $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält mindestens ein } b\} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b \geq 1\}$

BEISPIELE REGULÄRER AUSDRÜCKE

- a^*ba^*
 - steht für die Menge aller Wörter über $\Sigma=\{a,b\}$, die genau ein b enthalten
 - $L(a^*ba^*) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält genau ein } b\} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b=1\}$
- $(a+b)^*b(a+b)^*$
 - steht für $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält mindestens ein } b\} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b \geq 1\}$
- $a^*(b+\epsilon)a^*$
 - steht für $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält maximal ein } b\} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b \leq 1\}$

BEISPIELE REGULÄRER AUSDRÜCKE

- a^*ba^*
 - steht für die Menge aller Wörter über $\Sigma=\{a,b\}$, die genau ein b enthalten
 - $L(a^*ba^*) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält genau ein } b\} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b=1\}$
- $(a+b)^*b(a+b)^*$
 - steht für $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält mindestens ein } b\} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b \geq 1\}$
- $a^*(b+\epsilon)a^*$
 - steht für $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält maximal ein } b\} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b \leq 1\}$
- $a\emptyset$
 - steht für die **leere Sprache**, denn die Verkettung einer Sprache mit der leeren Sprache ist immer leer

BEISPIELE REGULÄRER AUSDRÜCKE

- a^*ba^*
 - steht für die Menge aller Wörter über $\Sigma=\{a,b\}$, die genau ein b enthalten
 - $L(a^*ba^*) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält genau ein } b\} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b=1\}$
- $(a+b)^*b(a+b)^*$
 - steht für $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält mindestens ein } b\} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b \geq 1\}$
- $a^*(b+\epsilon)a^*$
 - steht für $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält maximal ein } b\} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b \leq 1\}$
- $a\emptyset$
 - steht für die **leere Sprache**, denn die Verkettung einer Sprache mit der leeren Sprache ist immer leer
- \emptyset^*
 - steht für die Menge $\{\epsilon\}$, denn die beliebige Verkettung von Wörtern einer Menge enthält immer das leere Wort

Beschreibe Menge aller Wörter, in denen 0 und 1 abwechseln

1. Regulärer Ausdruck für die Sprache $\{01\}$

- 0 repräsentiert $\{0\}$, 1 repräsentiert $\{1\}$
- Also ist $L(01) = L(0) \circ L(1) = \{0\} \circ \{1\} = \{01\}$

Beschreibe Menge aller Wörter, in denen 0 und 1 abwechseln

1. Regulärer Ausdruck für die Sprache $\{01\}$

- 0 repräsentiert $\{0\}$, 1 repräsentiert $\{1\}$
- Also ist $L(01) = L(0) \circ L(1) = \{0\} \circ \{1\} = \{01\}$

2. Erzeuge $\{01, 0101, 010101, ..\}$ durch Sternbildung

- $L((01)^*) = L(01)^* = \{01\}^* = \{\epsilon, 01, 0101, 010101, \dots\}$

Beschreibe Menge aller Wörter, in denen 0 und 1 abwechseln

1. Regulärer Ausdruck für die Sprache $\{01\}$

- 0 repräsentiert $\{0\}$, 1 repräsentiert $\{1\}$
- Also ist $L(01) = L(0) \circ L(1) = \{0\} \circ \{1\} = \{01\}$

2. Erzeuge $\{01, 0101, 010101, ..\}$ durch Sternbildung

- $L((01)^*) = L(01)^* = \{01\}^* = \{\epsilon, 01, 0101, 010101, \dots\}$

3. Manche Wörter nicht erfaßt

- Start mit Eins statt Null: $(10)^*$
 - Start und Ende mit Null: $(01)^*0$
 - Start und Ende mit Eins: $(10)^*1$
- Vollständiger Ausdruck: $(01)^* + (10)^* + (01)^*0 + (10)^*1$

Beschreibe Menge aller Wörter, in denen 0 und 1 abwechseln

1. Regulärer Ausdruck für die Sprache $\{01\}$

- 0 repräsentiert $\{0\}$, 1 repräsentiert $\{1\}$
- Also ist $L(01) = L(0) \circ L(1) = \{0\} \circ \{1\} = \{01\}$

2. Erzeuge $\{01, 0101, 010101, ..\}$ durch Sternbildung

- $L((01)^*) = L(01)^* = \{01\}^* = \{\epsilon, 01, 0101, 010101, \dots\}$

3. Manche Wörter nicht erfaßt

- Start mit Eins statt Null: $(10)^*$
- Start und Ende mit Null: $(01)^*0$
- Start und Ende mit Eins: $(10)^*1$

Vollständiger Ausdruck: $(01)^* + (10)^* + (01)^*0 + (10)^*1$

4. Es geht auch kürzer

- Optional 1 am Anfang oder 0 am Ende: $(\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)$

BESTIMMUNG DER SEMANTIK VON $(\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)$

$$L((\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0))$$

BESTIMMUNG DER SEMANTIK VON $(\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)$

$$\begin{aligned} & L((\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)) \\ &= L((\epsilon+1)) \circ L((01)^*) \circ L((\epsilon+0)) \\ &= (L(\epsilon) \cup L(1)) \circ L((01))^* \circ (L(\epsilon) \cup L(0)) \end{aligned}$$

BESTIMMUNG DER SEMANTIK VON $(\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)$

$$\begin{aligned} & L((\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)) \\ &= L((\epsilon+1)) \circ L((01)^*) \circ L((\epsilon+0)) \\ &= (L(\epsilon) \cup L(1)) \circ L((01))^* \circ (L(\epsilon) \cup L(0)) \\ &= (\{\epsilon\} \cup \{1\}) \circ (L(0) \circ L(1))^* \circ (\{\epsilon\} \cup \{0\}) \\ &= \{\epsilon, 1\} \circ \{01\}^* \circ \{\epsilon, 0\} \end{aligned}$$

BESTIMMUNG DER SEMANTIK VON $(\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)$

$$\begin{aligned}
 & L((\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)) \\
 = & L((\epsilon+1)) \circ L((01)^*) \circ L((\epsilon+0)) \\
 = & (L(\epsilon) \cup L(1)) \circ L((01))^* \circ (L(\epsilon) \cup L(0)) \\
 = & (\{\epsilon\} \cup \{1\}) \circ (L(0) \circ L(1))^* \circ (\{\epsilon\} \cup \{0\}) \\
 = & \{\epsilon, 1\} \circ \{01\}^* \circ \{\epsilon, 0\} \\
 = & \{\epsilon, 1\} \circ \{w \mid \exists n \in \mathbb{N}. w = \underbrace{01\dots 01}_{n\text{-mal}}\} \circ \{\epsilon, 0\} \\
 = & \{w \mid \exists n \in \mathbb{N}. w = \underbrace{01\dots 01}_{n\text{-mal}} \vee w = 1 \underbrace{01\dots 01}_{n\text{-mal}} \\
 & \vee w = \underbrace{01\dots 01}_{n\text{-mal}} 0 \vee w = 1 \underbrace{01\dots 01}_{n\text{-mal}} 0\}
 \end{aligned}$$

= Die Menge aller Wörter, in denen 0 und 1 abwechseln

(Intuitiv einsichtig – genauer Beweis benötigt präzise Definition von “abwechseln”)

“RECHENREGELN” FÜR REGULÄRE AUSDRÜCKE

Wie zeigt man $(01)^* + (10)^* + (01)^*0 + (10)^*1 \cong (\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)$?

“RECHENREGELN” FÜR REGULÄRE AUSDRÜCKE

Wie zeigt man $(01)^* + (10)^* + (01)^*0 + (10)^*1 \cong (\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)$?

- **Definiere Äquivalenz von Ausdrücken**

- $E \cong F$, falls $L(E) = L(F)$

- Beweise algebraische Gesetze regulärer Ausdrücke**

- Liefert Hilfsmittel zur Vereinfachung regulärer Ausdrücke

“RECHENREGELN” FÜR REGULÄRE AUSDRÜCKE

Wie zeigt man $(01)^* + (10)^* + (01)^*0 + (10)^*1 \cong (\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)$?

- **Definiere Äquivalenz von Ausdrücken**

- $E \cong F$, falls $L(E) = L(F)$

Beweise algebraische Gesetze regulärer Ausdrücke

- Liefert Hilfsmittel zur Vereinfachung regulärer Ausdrücke

- **Gesetze für Einheiten und Annihilatoren**

- $\emptyset + E \cong E \cong E + \emptyset$: $L(\emptyset + E) = L(\emptyset) \cup L(E) = \{\} \cup L(E) = L(E)$

- $\epsilon \circ E \cong E \cong E \circ \epsilon$: $L(\epsilon \circ E) = L(\epsilon) \circ L(E) = \{\epsilon\} \circ L(E) = L(E)$

- $\emptyset \circ E \cong \emptyset \cong E \circ \emptyset$: $L(\emptyset \circ E) = L(\emptyset) \circ L(E) = \{\} \circ L(E) = \{\} = L(\emptyset)$

Kommutativitätsgesetz für +

- $E + F \cong F + E$: $L(E + F) = L(E) \cup L(F) = L(F) \cup L(E) = L(F + E)$

- Kommutativität von \circ gilt nicht: $= L(01) = \{01\} \neq \{10\} = L(10)$

“RECHENREGELN” FÜR REGULÄRE AUSDRÜCKE II

- **Gesetze für Assoziativität von \circ und $+$**

- $(E \circ F) \circ G \cong E \circ (F \circ G)$:

$$L((E \circ F) \circ G) = L(E \circ F) \circ L(G) = L(E) \circ L(F) \circ L(G) = L(E) \circ L(F \circ G) = L(E \circ (F \circ G))$$

- $(E + F) + G \cong E + (F + G)$:

$$L((E + F) + G) = L(E + F) \cup L(G) = L(E) \cup L(F) \cup L(G) = \dots = L(E + (F + G))$$

- **Distributivgesetze**

- $(E + F) \circ G \cong E \circ G + F \circ G$:

$$L((E + F) \circ G) = (L(E) \cup L(F)) \circ L(G)$$

$$= \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in L(E) \cup L(F). \exists v \in L(G). w = uv\}$$

$$= \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in L(E). \exists v \in L(G). w = uv \vee \exists u \in L(F). \exists v \in L(G). w = uv\}$$

$$= \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in L(E). \exists v \in L(G). w = uv\} \cup \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in L(F). \exists v \in L(G). w = uv\}$$

$$= L(E) \circ L(G) \cup L(F) \circ L(G) = L(E \circ G + F \circ G)$$

- $G \circ (E + F) \cong G \circ E + G \circ F$

- **Idempotenz von $+$: $E + E \cong E$**

- **Hüllengesetze: $\emptyset^* \cong \epsilon$, $\epsilon^* \cong \epsilon$, $(E^*)^* \cong E^*$**

$$E^+ \cong E \circ E^* \cong E^* \circ E, \quad E^* \cong \epsilon + E^+ \cong E^+ + \epsilon$$

BEWEIS: $(01)^* + (10)^* + (01)^*0 + (10)^*1 \cong (\epsilon + 1)(01)^*(\epsilon + 0)$

$$(\epsilon + 1)(01)^*(\epsilon + 0)$$

$$\cong \epsilon(01)^*(\epsilon + 0) + 1(01)^*(\epsilon + 0)$$

$$\cong \epsilon(01)^*\epsilon + \epsilon(01)^*0 + 1(01)^*(\epsilon + 0)$$

$$\cong \epsilon(01)^*\epsilon + \epsilon(01)^*0 + 1(01)^*\epsilon + 1(01)^*0$$

$$\cong (01)^*\epsilon + \epsilon(01)^*0 + 1(01)^*\epsilon + 1(01)^*0$$

$$\cong (01)^* + \epsilon(01)^*0 + 1(01)^*\epsilon + 1(01)^*0$$

$$\cong (01)^* + (01)^*0 + 1(01)^*\epsilon + 1(01)^*0$$

$$\cong (01)^* + (01)^*0 + 1(01)^* + 1(01)^*0$$

$$\cong (01)^* + (01)^*0 + 1(01)^*0 + 1(01)^*$$

$$\cong (01)^* + 1(01)^*0 + (01)^*0 + 1(01)^*$$

$$\cong (01)^* + (10)^*10 + (01)^*0 + 1(01)^*$$

$$\cong (01)^* + (10)^*10 + (01)^*0 + (10)^*0$$

$$\cong (01)^* + (10)^+ + (01)^*0 + (10)^*0$$

$$\cong (01)^+ + \epsilon + (10)^+ + (01)^*0 + (10)^*0$$

$$\cong (01)^+ + \epsilon + \epsilon + (10)^+ + (01)^*0 + (10)^*0$$

$$\cong (01)^* + \epsilon + (10)^+ + (01)^*0 + (10)^*0$$

$$\cong (01)^* + (10)^* + (01)^*0 + (10)^*0$$

(Distributivitätsgesetz links)

(Distributivitätsgesetz rechts)

(Distributivitätsgesetz rechts)

(ϵ als Einheit links)

(ϵ als Einheit rechts)

(ϵ als Einheit links)

(ϵ als Einheit rechts)

(Kommutativität)

(Kommutativität)

(Übungsaufgabe: $E(FE)^* \cong (EF)^*E$)

($E(FE)^* \cong (EF)^*E$)

(Hüllengesetz)

(Hüllengesetz)

(Idempotenz, rückwärts)

(Hüllengesetz, rückwärts)

(Hüllengesetz, rückwärts)

BEWEISMETHODIK FÜR WEITERE ÄQUIVALENZEN

- **Beispiel: Nachweis von $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$**

- Sei $w \in L((E+F)^*)$

- Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E)$ oder $w_i \in L(F)$ für alle i

- Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E^*F^*)$ für alle i (semantisches Argument)

- Also $w \in L((E^*F^*)^*)$ Umkehrung analog

BEWEISMETHODIK FÜR WEITERE ÄQUIVALENZEN

- **Beispiel: Nachweis von $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$**

- Sei $w \in L((E+F)^*)$

- Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E)$ oder $w_i \in L(F)$ für alle i

- Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E^*F^*)$ für alle i (semantisches Argument)

- Also $w \in L((E^*F^*)^*)$ Umkehrung analog

- **Beweis verwendet keine Information über E und F**

- Man könnte genauso gut $(a+b)^* \cong (a^*b^*)^*$ testen

- $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$ gilt, weil $(a+b)^* \cong (a^*b^*)^*$ gilt

BEWEISMETHODIK FÜR WEITERE ÄQUIVALENZEN

- **Beispiel: Nachweis von $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$**

- Sei $w \in L((E+F)^*)$

- Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E)$ oder $w_i \in L(F)$ für alle i

- Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E^*F^*)$ für alle i (semantisches Argument)

- Also $w \in L((E^*F^*)^*)$ Umkehrung analog

- **Beweis verwendet keine Information über E und F**

- Man könnte genauso gut $(a+b)^* \cong (a^*b^*)^*$ testen

- $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$ gilt, weil $(a+b)^* \cong (a^*b^*)^*$ gilt

- **Allgemeines Beweisverfahren**

- E regulärer Ausdruck mit Metavariablen E_1, \dots, E_m für Sprachen L_1, \dots, L_m

- Ersetze im Beweis für $E \cong F$ alle Metavariablen durch Symbole $a \in \Sigma$

- Teste Äquivalenz der konkreten Ausdrücke automatisch \mapsto Einheit 2.5

Korrektheitsbeweis: Induktion über Struktur regulärer Ausdrücke

BEWEISMETHODIK FÜR WEITERE ÄQUIVALENZEN

- **Beispiel: Nachweis von $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$**

- Sei $w \in L((E+F)^*)$

- Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E)$ oder $w_i \in L(F)$ für alle i

- Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E^*F^*)$ für alle i (semantisches Argument)

- Also $w \in L((E^*F^*)^*)$ Umkehrung analog

- **Beweis verwendet keine Information über E und F**

- Man könnte genauso gut $(a+b)^* \cong (a^*b^*)^*$ testen

$(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$ gilt, weil $(a+b)^* \cong (a^*b^*)^*$ gilt

- **Allgemeines Beweisverfahren**

- E regulärer Ausdruck mit Metavariablen E_1, \dots, E_m für Sprachen L_1, \dots, L_m

- Ersetze im Beweis für $E \cong F$ alle Metavariablen durch Symbole $a \in \Sigma$

- Teste Äquivalenz der konkreten Ausdrücke automatisch \mapsto Einheit 2.5

Korrektheitsbeweis: Induktion über Struktur regulärer Ausdrücke

- **Beispiel: Nachweis von $(E^+)^+ \cong E^+$**

- Ersetze Platzhalter E durch konkretes Symbol a und teste $(a^+)^+ \cong a^+$

Sprachen regulärer Ausdrücke sind endlich erkennbar

Für jeden regulären Ausdruck E gibt es einen ϵ -NEA A mit

- A hat genau einen akzeptierenden Zustand q_f
- Der Startzustand von A ist in keinem $\delta_A(q, a)$ enthalten
- Für alle $a \in \Sigma$ ist $\delta_A(q_f, a) = \emptyset$
- $L(E) = L(A)$

Beweis durch strukturelle Induktion über Aufbau regulärer Ausdrücke

Sprachen regulärer Ausdrücke sind endlich erkennbar

Für jeden regulären Ausdruck E gibt es einen ϵ -NEA A mit

- A hat genau einen akzeptierenden Zustand q_f
- Der Startzustand von A ist in keinem $\delta_A(q, a)$ enthalten
- Für alle $a \in \Sigma$ ist $\delta_A(q_f, a) = \emptyset$
- $L(E) = L(A)$

Beweis durch strukturelle Induktion über Aufbau regulärer Ausdrücke

• Induktionsanfänge

– Für $E = \epsilon$ wähle $A =$



– Für $E = \emptyset$ wähle $A =$



– Für $E = a$ wähle $A =$



– **Korrektheit offensichtlich**, da jeweils maximal ein Zustandsübergang

UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE IN AUTOMATEN

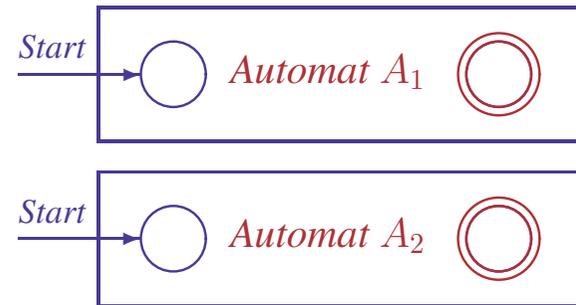
- **Induktionsannahme:** seien A_1 und A_2 ϵ -NEAs für E_1 und E_2
- **Induktionsschritt:**

UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE IN AUTOMATEN

- **Induktionsannahme:** seien A_1 und A_2 ϵ -NEAs für E_1 und E_2

- **Induktionsschritt:**

– Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$

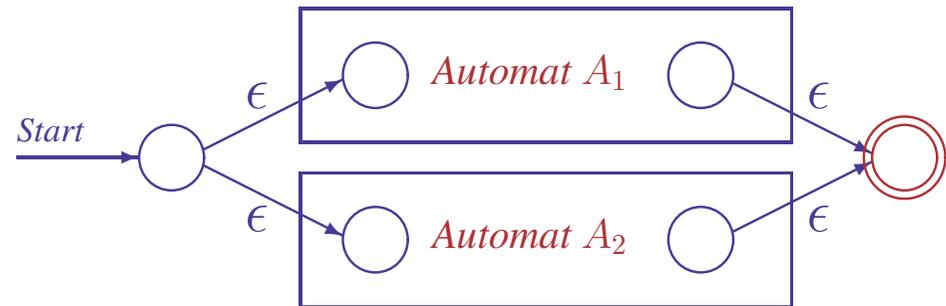


UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE IN AUTOMATEN

- **Induktionsannahme:** seien A_1 und A_2 ϵ -NEAs für E_1 und E_2

- **Induktionsschritt:**

– Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$

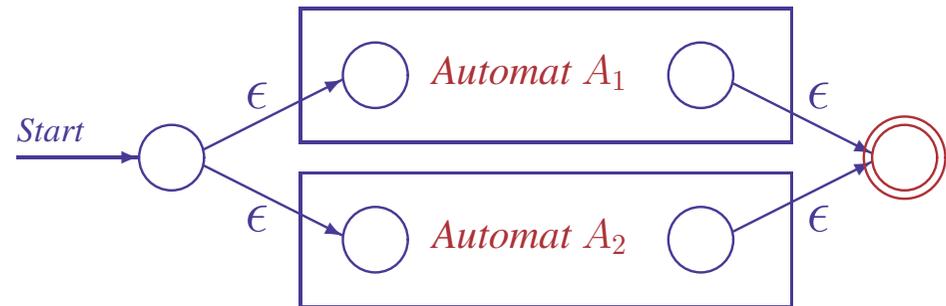


UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE IN AUTOMATEN

- **Induktionsannahme:** seien A_1 und A_2 ϵ -NEAs für E_1 und E_2

- **Induktionsschritt:**

– Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$



– Für $E = E_1 \circ E_2$ wähle

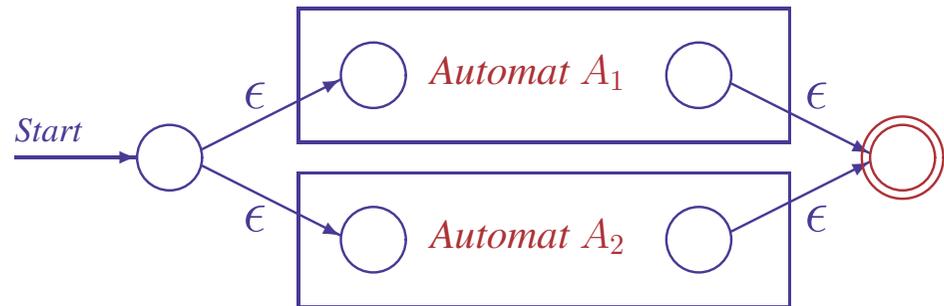


UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE IN AUTOMATEN

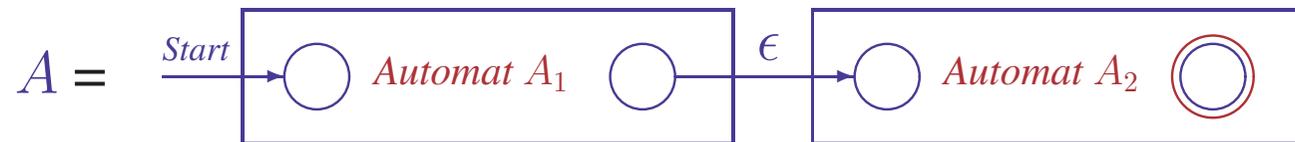
- **Induktionsannahme:** seien A_1 und A_2 ϵ -NEAs für E_1 und E_2

- **Induktionsschritt:**

– Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$



– Für $E = E_1 \circ E_2$ wähle

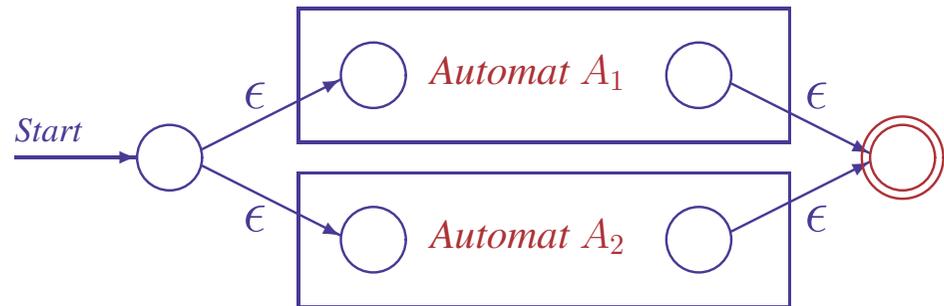


UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE IN AUTOMATEN

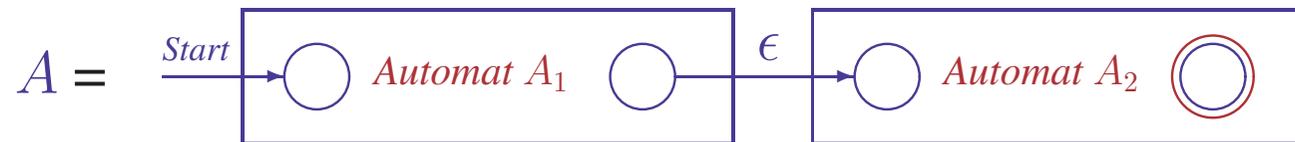
- **Induktionsannahme:** seien A_1 und A_2 ϵ -NEAs für E_1 und E_2

- **Induktionsschritt:**

– Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$



– Für $E = E_1 \circ E_2$ wähle



– Für $E = E_1^*$ wähle $A =$

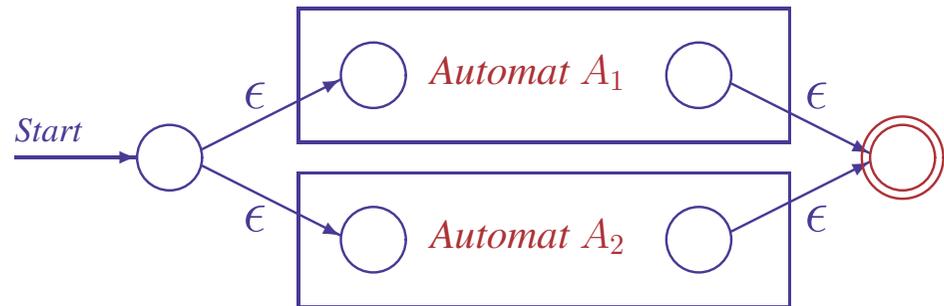


UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE IN AUTOMATEN

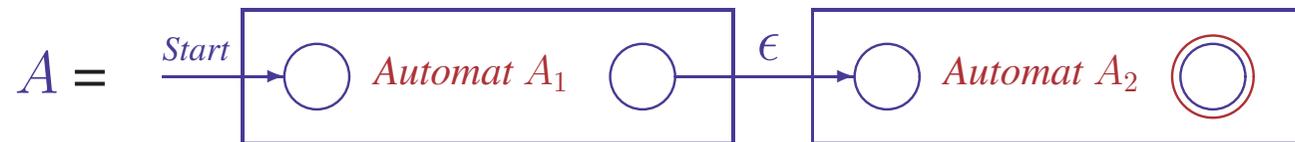
- **Induktionsannahme:** seien A_1 und A_2 ϵ -NEAs für E_1 und E_2

- **Induktionsschritt:**

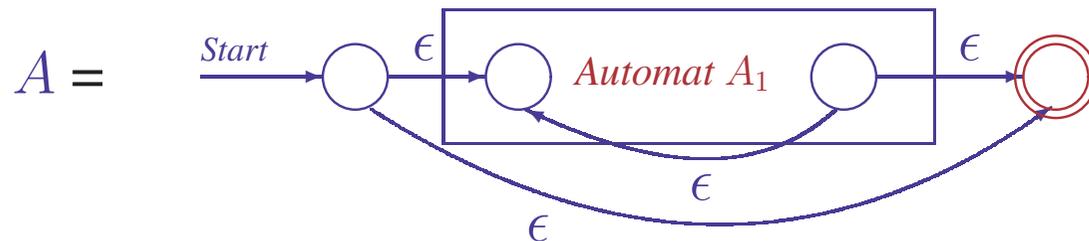
– Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$



– Für $E = E_1 \circ E_2$ wähle



– Für $E = E_1^*$ wähle $A =$

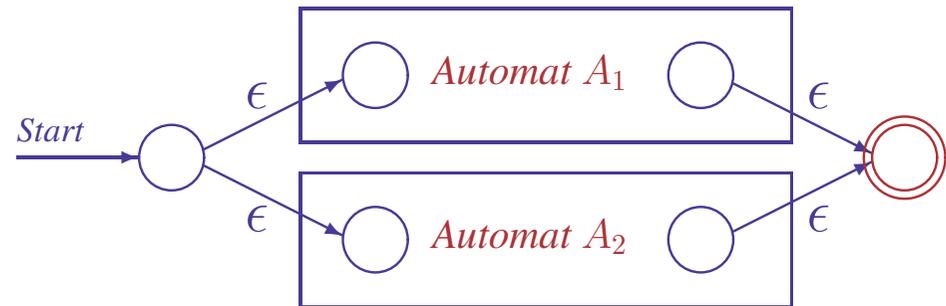


UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE IN AUTOMATEN

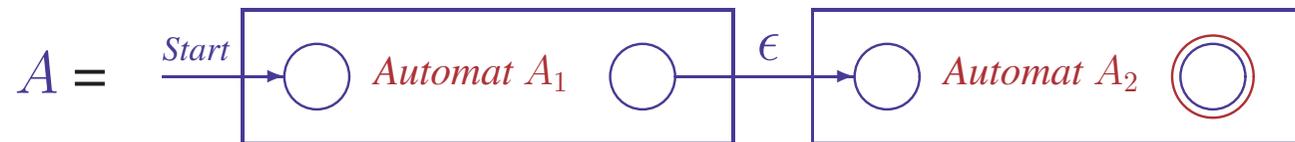
- **Induktionsannahme:** seien A_1 und A_2 ϵ -NEAs für E_1 und E_2

- **Induktionsschritt:**

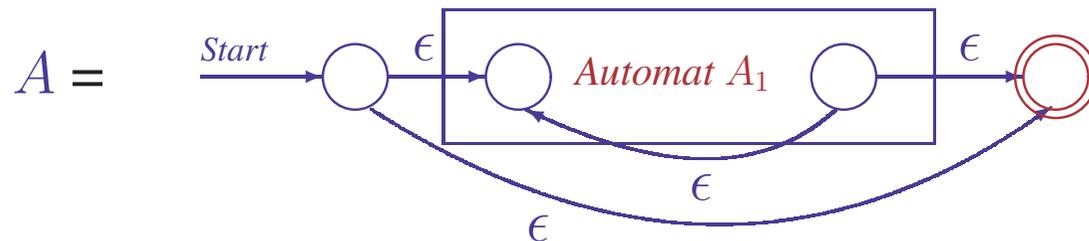
– Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$



– Für $E = E_1 \circ E_2$ wähle



– Für $E = E_1^*$ wähle $A =$



– Für $E = (E_1)$ wähle $A = A_1$

KORREKTHEIT DER UMWANDLUNGEN

- **Klammern ändern nichts**

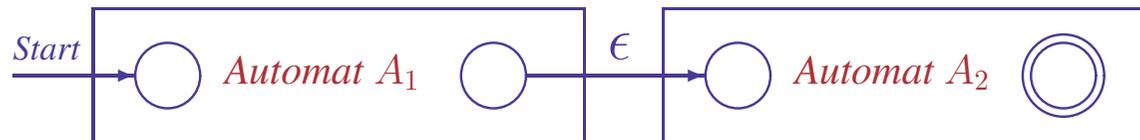
- Es ist $L((E_1)) = L(E_1) = L(A_1) = L(A)$

KORREKTHEIT DER UMWANDLUNGEN

- **Klammern ändern nichts**

– Es ist $L((E_1)) = L(E_1) = L(A_1) = L(A)$

- **Verkettung ist Verschaltung von Automaten**



Es gilt $w \in L(E_1 \circ E_2)$

$\Rightarrow w \in L(E_1) \circ L(E_2) = L(A_1) \circ L(A_2)$

$\Rightarrow \exists u \in L(A_1). \exists v \in L(A_2). w = uv$

$\Rightarrow \exists u, v \in \Sigma^*. w = uv \wedge q_{f,1} \in \hat{\delta}_1(q_{0,1}, u) \wedge q_{f,2} \in \hat{\delta}_2(q_{0,2}, v)$

$\Rightarrow \exists u, v \in \Sigma^*. w = uv \wedge q_{0,2} \in \hat{\delta}(q_{0,1}, u) \wedge q_{f,2} \in \hat{\delta}(q_{0,2}, v)$ ($q_{0,2} \in \epsilon$ -Hülle($q_{f,1}$))

$\Rightarrow q_{f,2} \in \hat{\delta}(q_{0,1}, w)$ (Definition $\hat{\delta}$)

$\Rightarrow w \in L(A)$

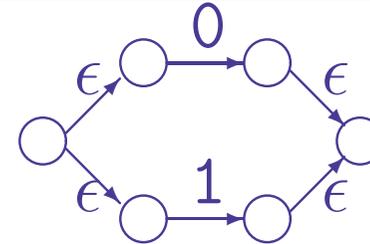
Argument ist umkehrbar, also $w \in L(A) \Rightarrow w \in L(E_1 \circ E_2)$

- **Sternbildung und Vereinigung ähnlich**

UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE AM BEISPIEL

Konstruiere endlichen Automaten für $(0+1)^*1(0+1)$

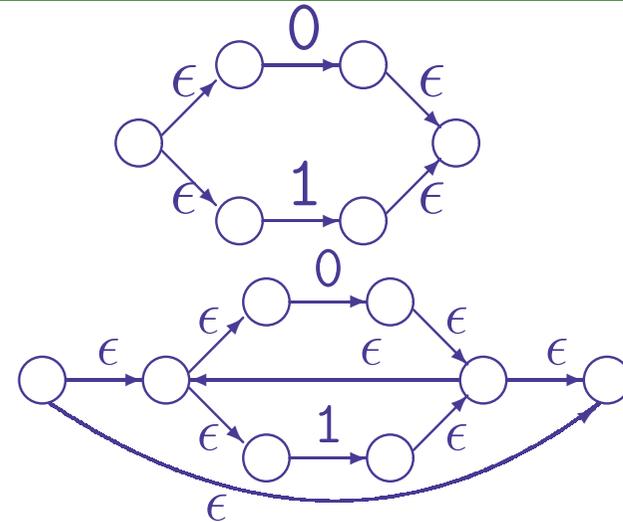
- **Teilautomat für $(0+1)$**



UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE AM BEISPIEL

Konstruiere endlichen Automaten für $(0+1)^*1(0+1)$

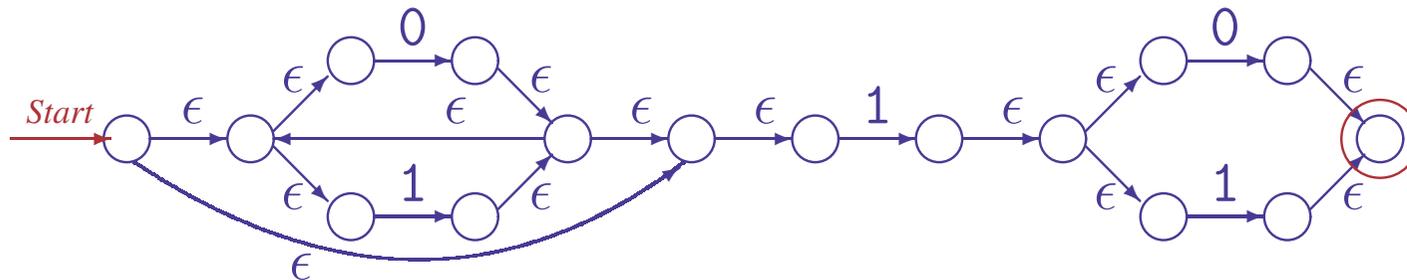
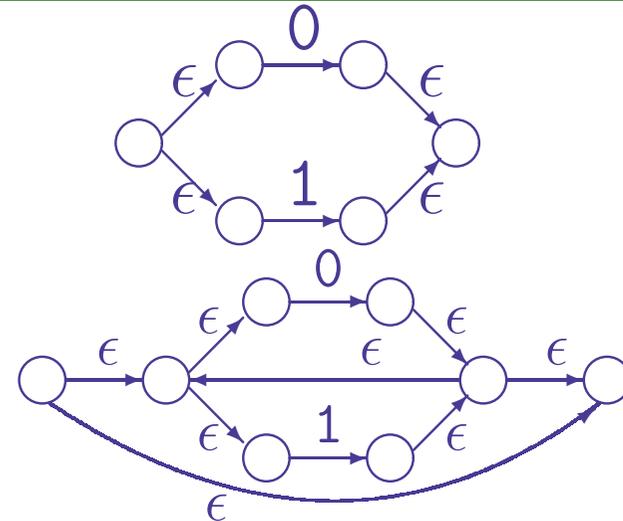
- **Teilautomat für $(0+1)$**
- **Teilautomat für $(0+1)^*$**



UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE AM BEISPIEL

Konstruiere endlichen Automaten für $(0+1)^*1(0+1)$

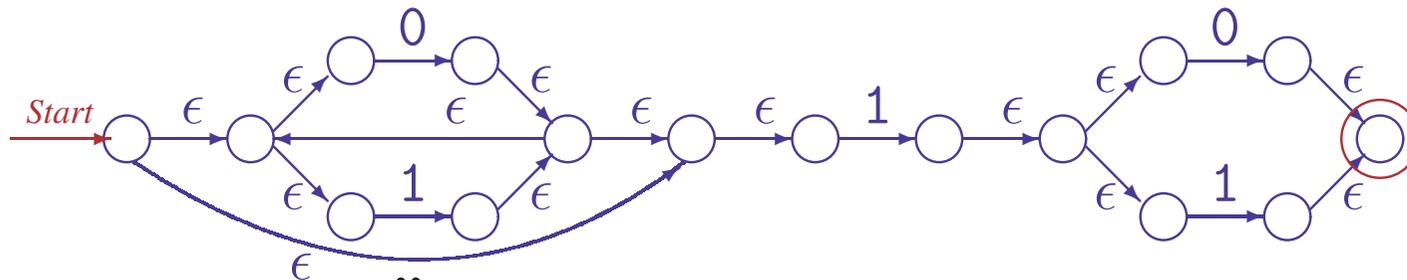
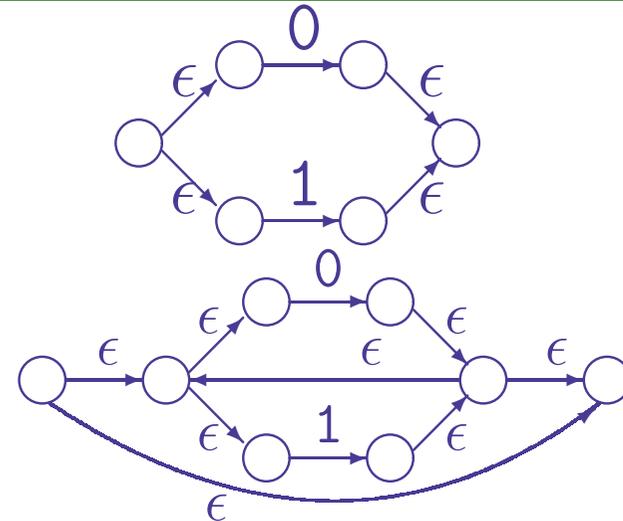
- Teilautomat für $(0+1)$
- Teilautomat für $(0+1)^*$
- Automat für $(0+1)^*1(0+1)$



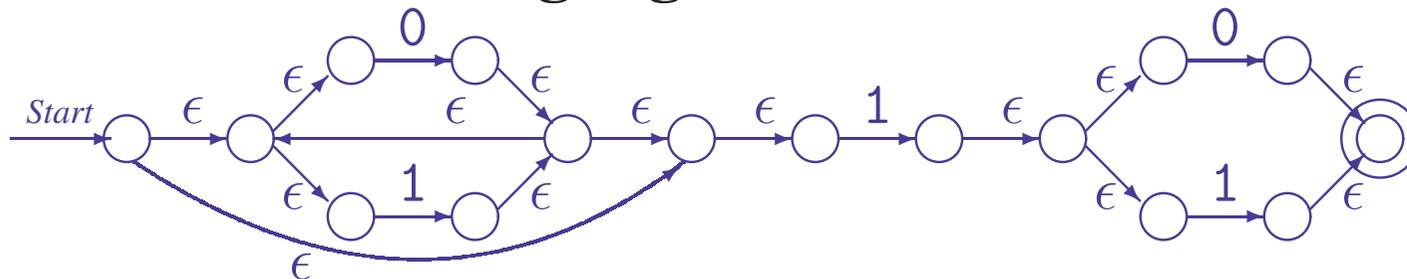
UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE AM BEISPIEL

Konstruiere endlichen Automaten für $(0+1)^*1(0+1)$

- Teilautomat für $(0+1)$
- Teilautomat für $(0+1)^*$
- Automat für $(0+1)^*1(0+1)$



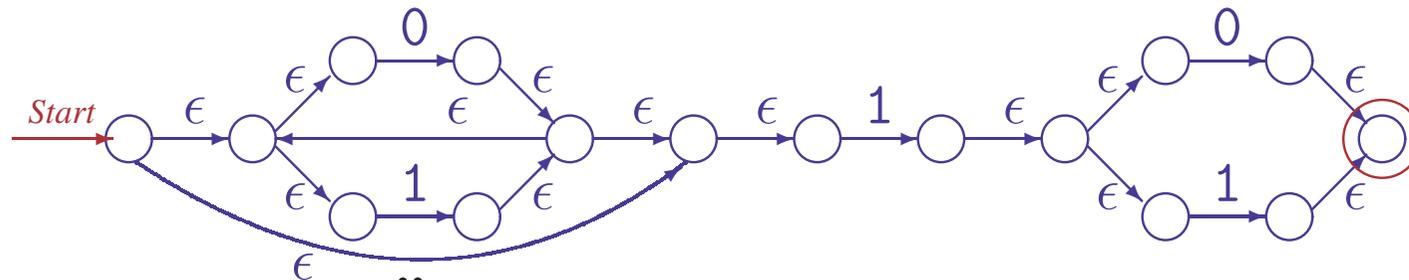
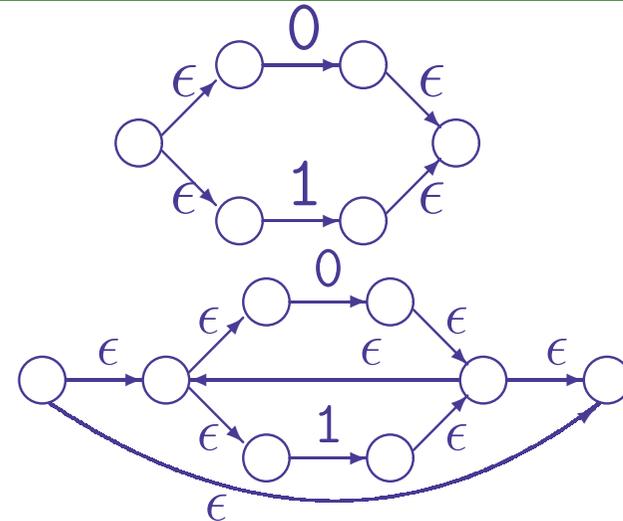
- Elimination von ϵ -Übergängen



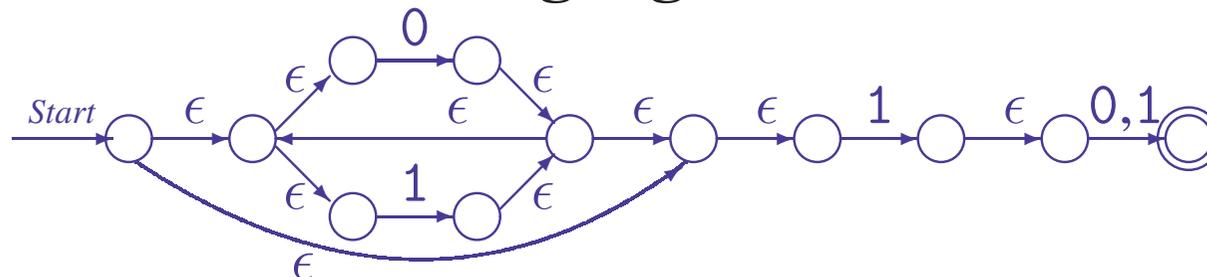
UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE AM BEISPIEL

Konstruiere endlichen Automaten für $(0+1)^*1(0+1)$

- Teilautomat für $(0+1)$
- Teilautomat für $(0+1)^*$
- Automat für $(0+1)^*1(0+1)$



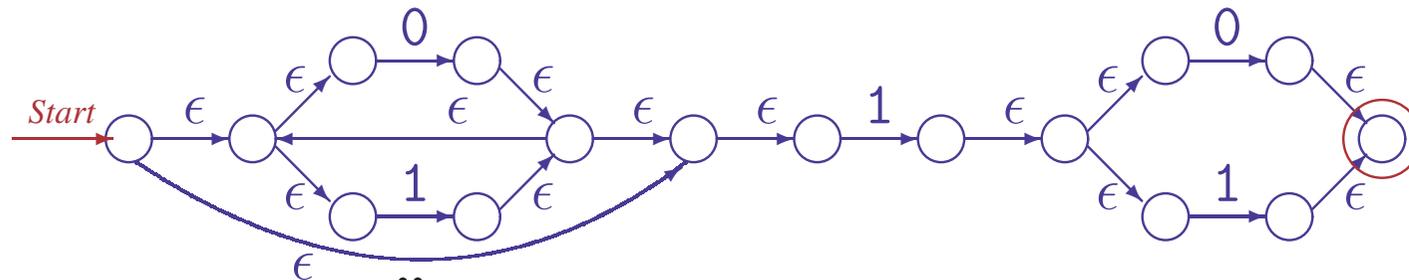
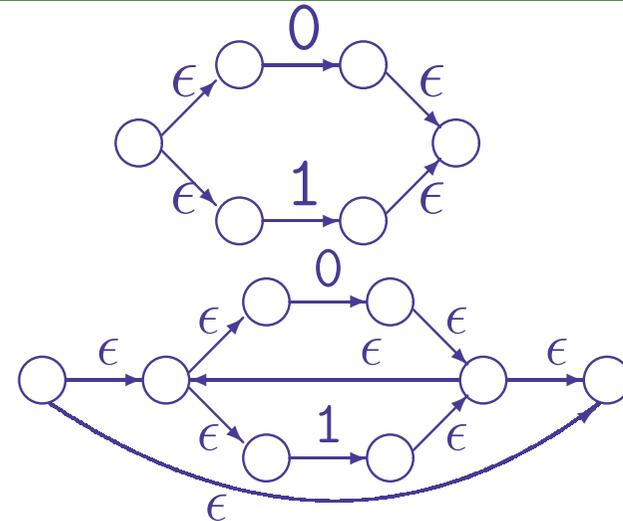
- Elimination von ϵ -Übergängen



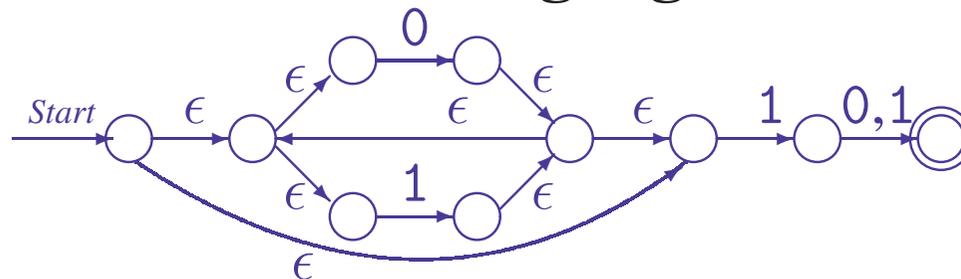
UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE AM BEISPIEL

Konstruiere endlichen Automaten für $(0+1)^*1(0+1)$

- Teilautomat für $(0+1)$
- Teilautomat für $(0+1)^*$
- Automat für $(0+1)^*1(0+1)$



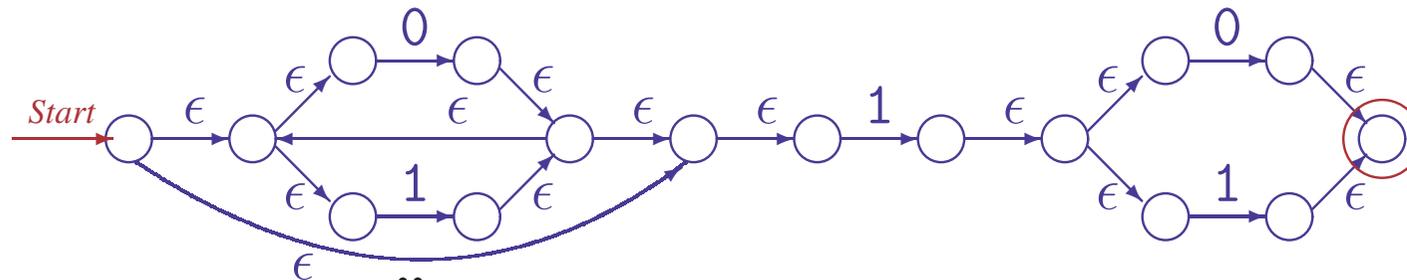
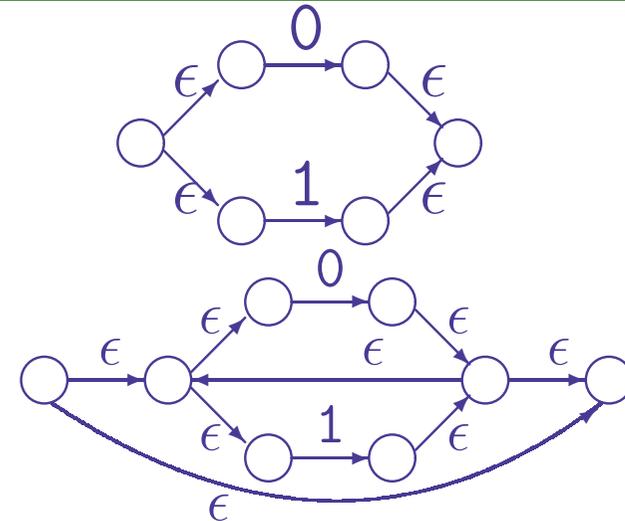
- Elimination von ϵ -Übergängen



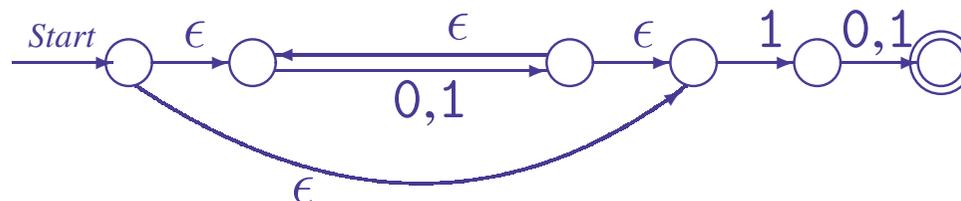
UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE AM BEISPIEL

Konstruiere endlichen Automaten für $(0+1)^*1(0+1)$

- Teilautomat für $(0+1)$
- Teilautomat für $(0+1)^*$
- Automat für $(0+1)^*1(0+1)$



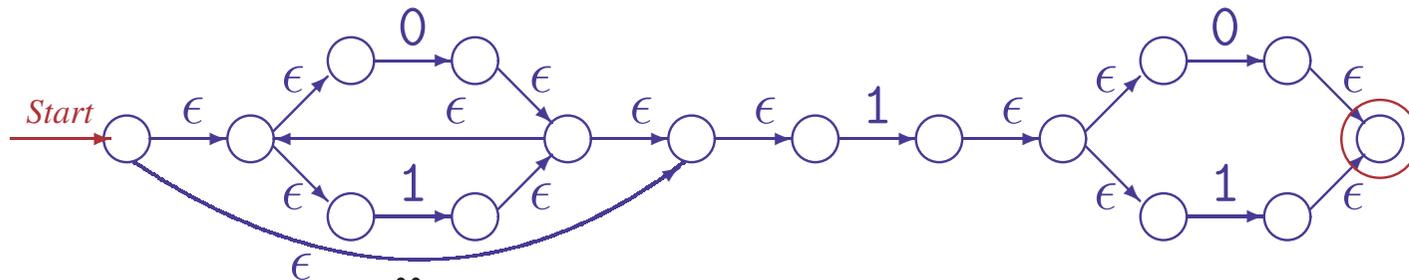
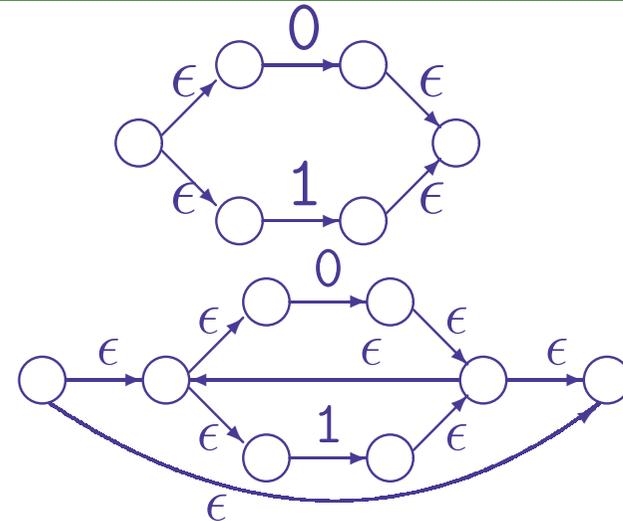
- Elimination von ϵ -Übergängen



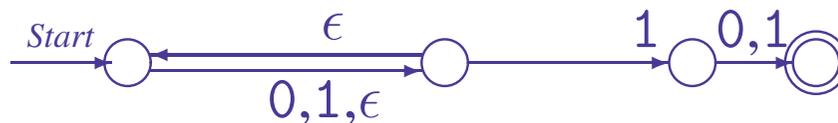
UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE AM BEISPIEL

Konstruiere endlichen Automaten für $(0+1)^*1(0+1)$

- Teilautomat für $(0+1)$
- Teilautomat für $(0+1)^*$
- Automat für $(0+1)^*1(0+1)$



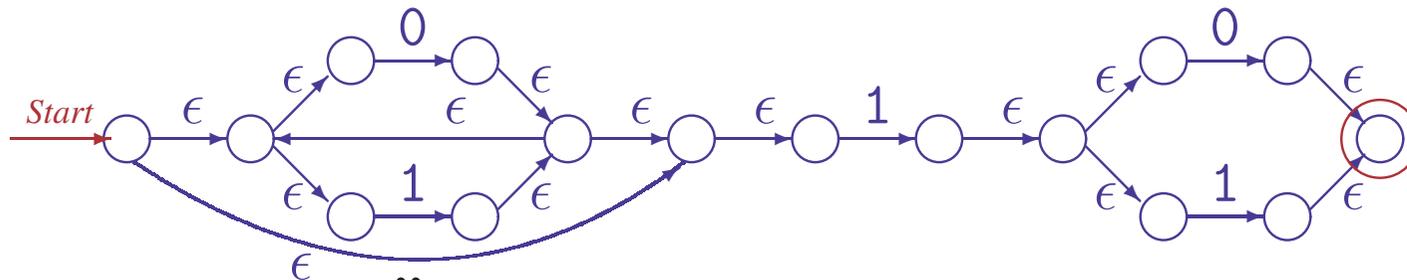
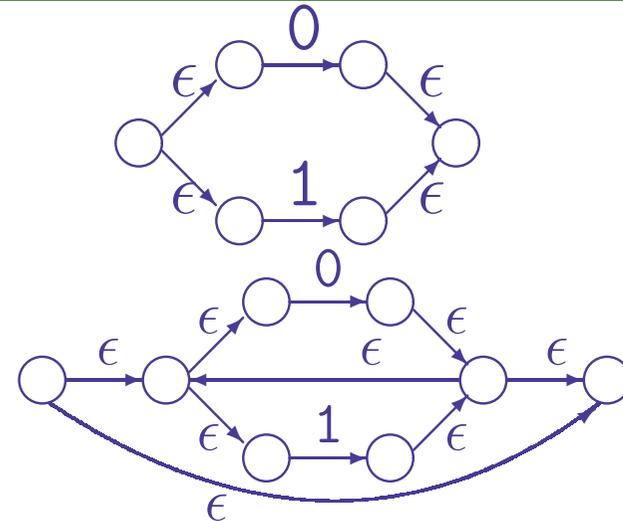
- Elimination von ϵ -Übergängen



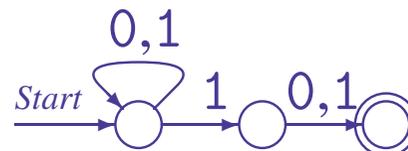
UMWANDLUNG REGULÄRER AUSDRÜCKE AM BEISPIEL

Konstruiere endlichen Automaten für $(0+1)^*1(0+1)$

- Teilautomat für $(0+1)$
- Teilautomat für $(0+1)^*$
- Automat für $(0+1)^*1(0+1)$



- Elimination von ϵ -Übergängen

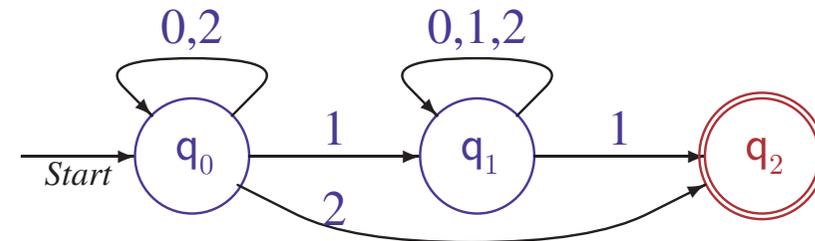


UMWANDLUNG VON (ϵ -)NEAS IN REGULÄRE AUSDRÜCKE

- **Ursprünglich: Pfadanalyse im Übergangdiagramm**
 - Spezialisierung eines allgemeinen Verfahrens für Pfadanalyse in Graphen
 - Definiere reguläre Ausdrücke für Pfade durch Automaten
 - Berechnung Ausdrücke iterativ und kombiniere alle relevanten Ausdrücke
 - **Kompliziertes und aufwendiges Verfahren** Mehr dazu im Anhang, Folie 26
- **Effizienterer Zugang: Elimination von Zuständen**
 - Beschreibe Übergänge $q_i \xrightarrow{a \in \Sigma} q_j$ durch reguläre Ausdrücke
 - Beginne mit regulären Ausdrücken für direkte Übergänge
 - Entferne einzelne Zustände und beschreibe die entstehenden Ausdrücke
 - Liefert Ausdrücke für Übergänge zwischen Start- und Endzuständen
- **Technisches Hilfsmittel: verallgemeinerte NEAs (VNEAs)**
 - NEA, dessen Überföhrungsfunktion δ auf regulären Ausdrücken arbeitet
 - **A akzeptiert** w , wenn es einen Pfad $w = v_1..v_m$ von q_0 zu einem $q \in F$ gibt und alle v_i in der Sprache des entsprechenden regulären Ausdrucks liegen
 - **Konsistente Formalisierung mühsam und ohne Erkenntnisgewinn**

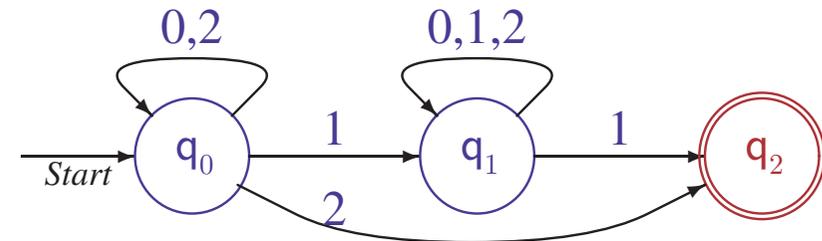
ZUSTANDSELIMINATION IN VNEAs

- **Ursprünglicher NEA**

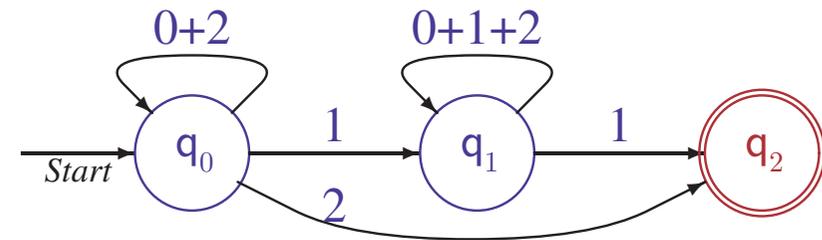


ZUSTANDSELIMINATION IN VNEAs

- Ursprünglicher NEA

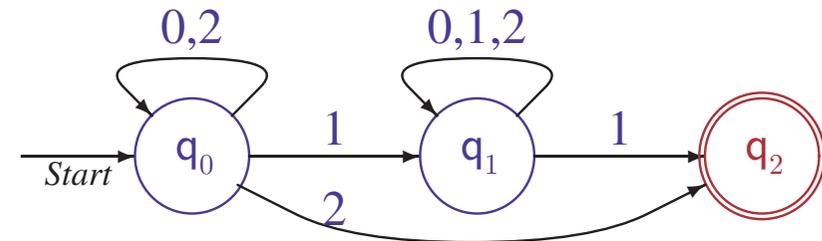


- Zugehöriger VNEA

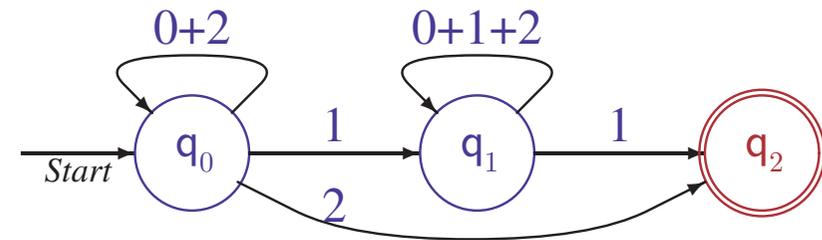


ZUSTANDSELIMINATION IN VNEAs

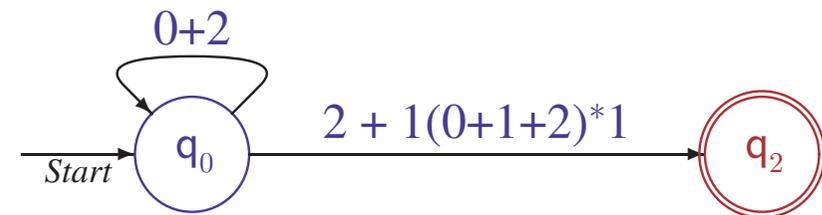
- Ursprünglicher NEA



- Zugehöriger VNEA

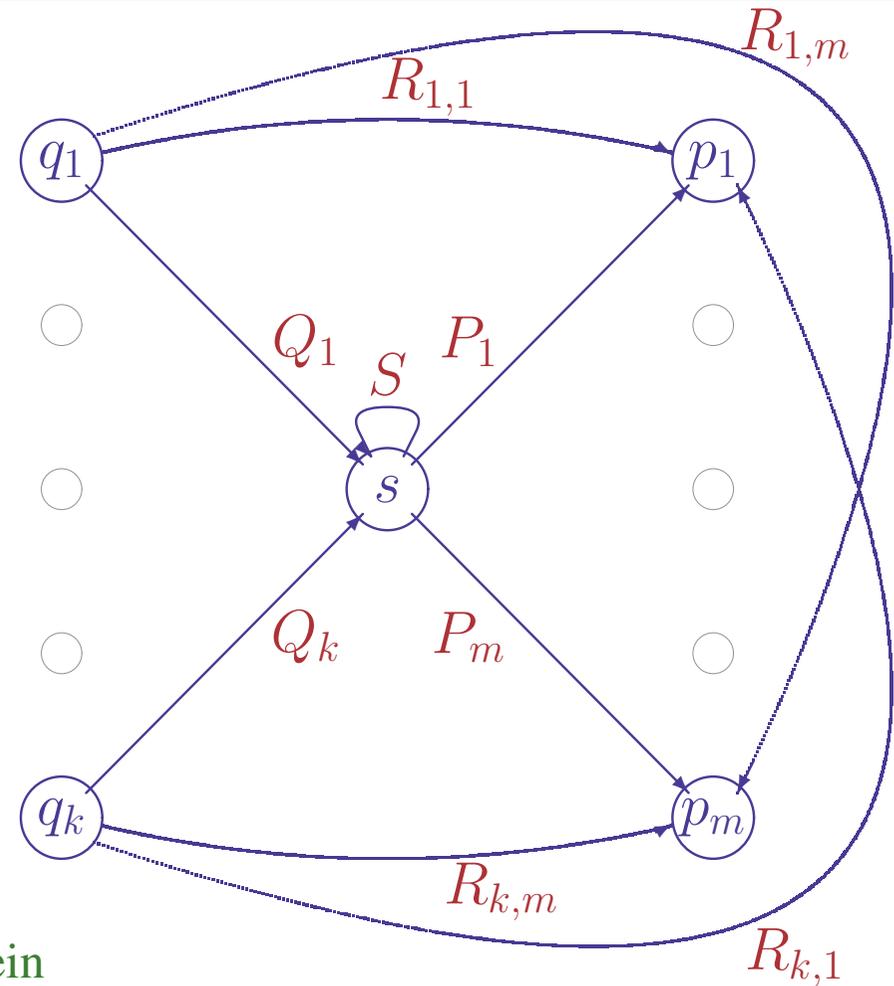


- Nach Elimination von q_1



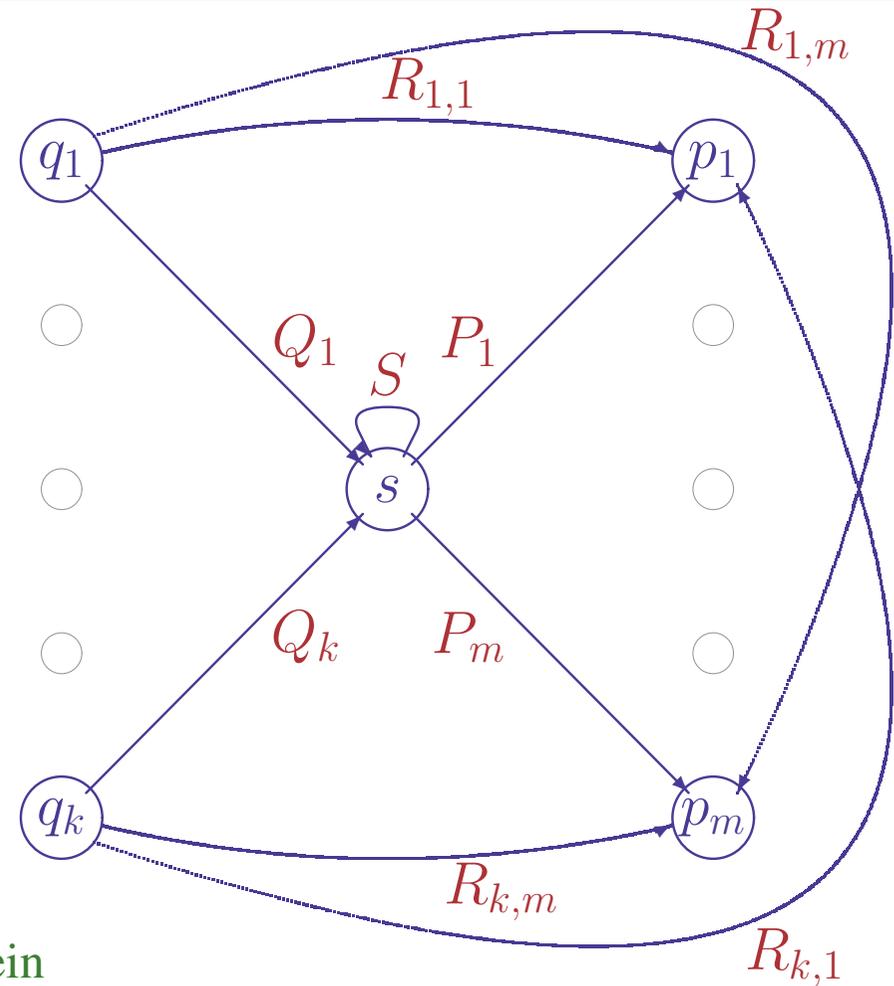
- Ausdruck für Übergang von q_0 nach q_2 ergibt sich aus Übergang q_0 nach q_1 , Schleife bei q_1 , Übergang q_1 nach q_2 und existierendem Ausdruck für direkten Übergang von q_0 nach q_2

ALLGEMEINE ZUSTANDSELIMINATION IN VNEAs



Eliminiere Zustand s
mit Vorgängern q_1, \dots, q_k
und Nachfolgern p_1, \dots, p_m
jedes p_i kann auch einer der Zustände q_1, \dots, q_k sein

ALLGEMEINE ZUSTANDSELIMINATION IN VNEAs



Eliminiere Zustand s

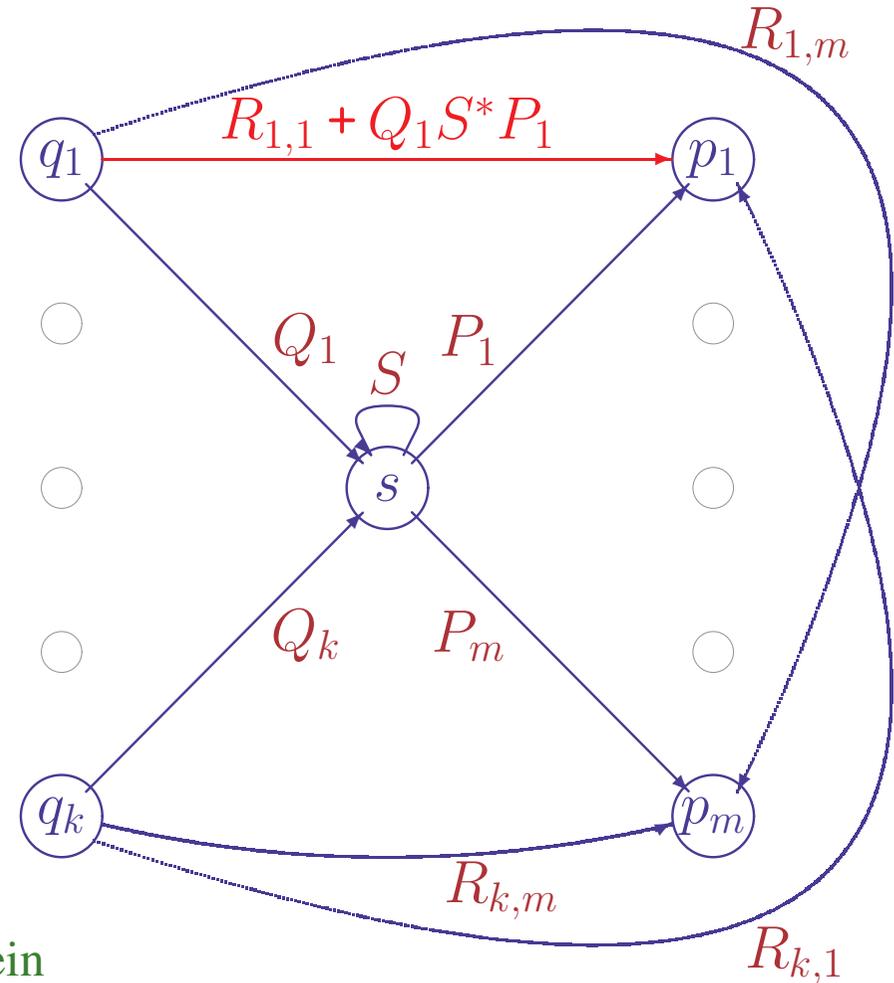
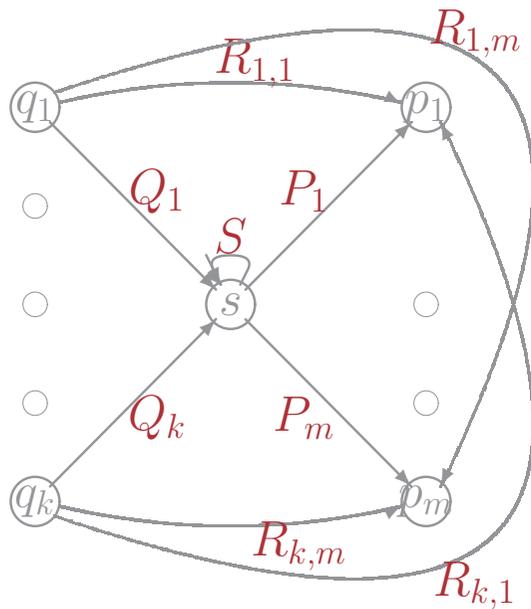
mit Vorgängern q_1, \dots, q_k

und Nachfolgern p_1, \dots, p_m

jedes p_i kann auch einer der Zustände q_1, \dots, q_k sein

– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_1 über s : $R_{1,1} + Q_1 S^* P_1$

ALLGEMEINE ZUSTANDESELIMINATION IN VNEAs



Eliminiere Zustand s

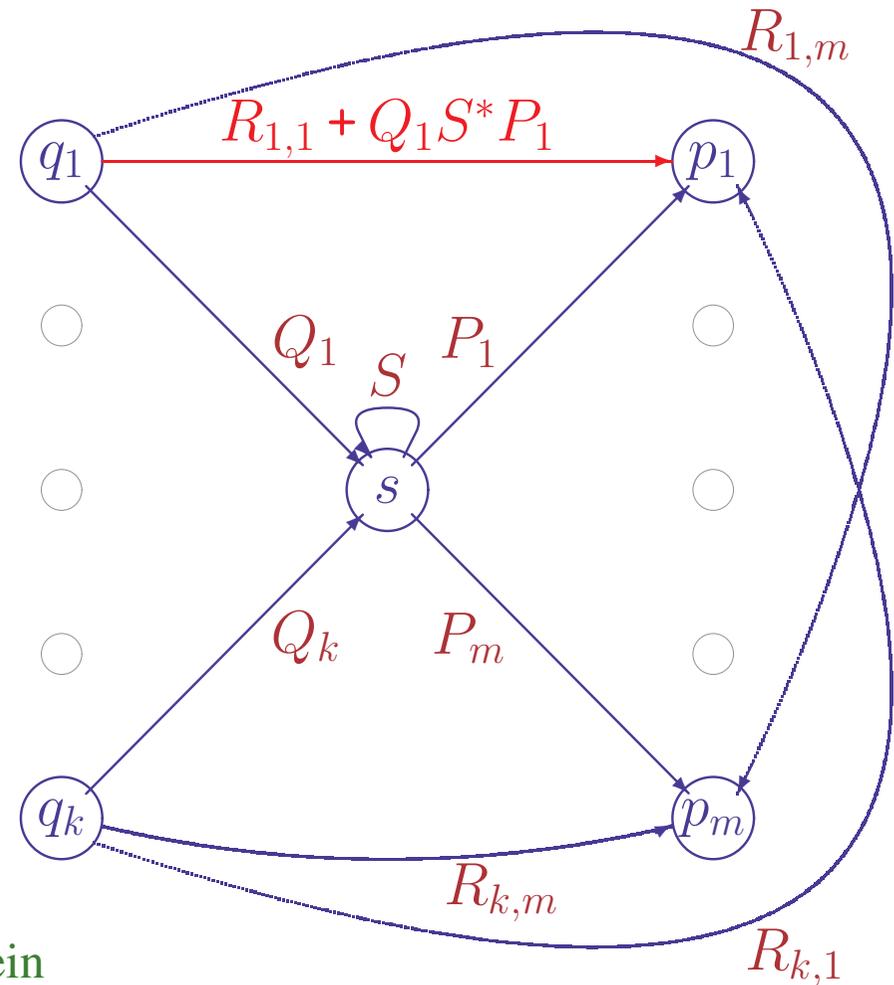
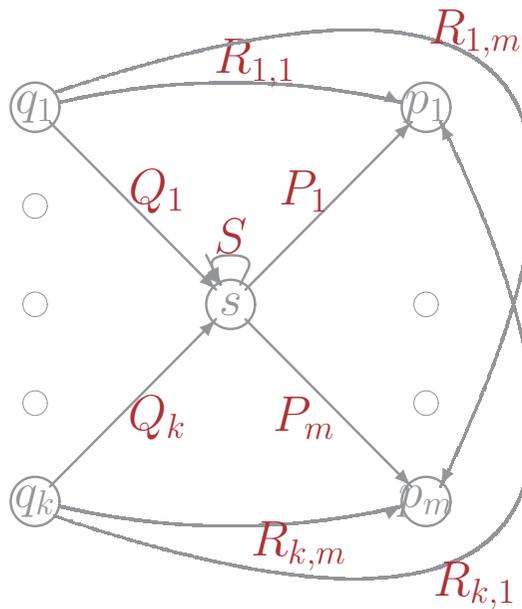
mit Vorgängern q_1, \dots, q_k

und Nachfolgern p_1, \dots, p_m

jedes p_i kann auch einer der Zustände q_1, \dots, q_k sein

– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_1 über s : $R_{1,1} + Q_1 S^* P_1$

ALLGEMEINE ZUSTANDESELIMINATION IN VNEAs



Eliminiere Zustand s

mit Vorgängern q_1, \dots, q_k

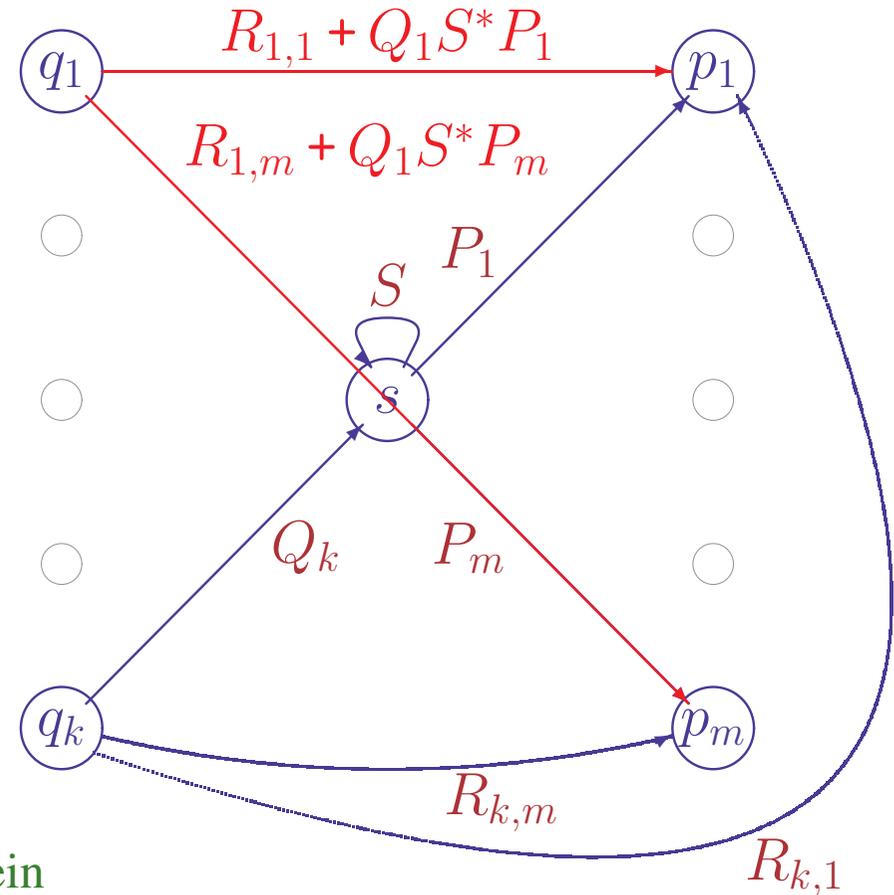
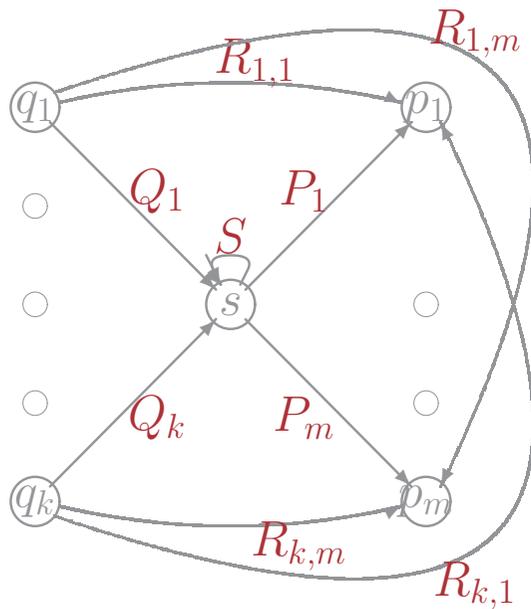
und Nachfolgern p_1, \dots, p_m

jedes p_i kann auch einer der Zustände q_1, \dots, q_k sein

– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_1 über s : $R_{1,1} + Q_1 S^* P_1$

– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_m über s : $R_{1,m} + Q_1 S^* P_m$

ALLGEMEINE ZUSTANDESELIMINATION IN VNEAs



Eliminiere Zustand s

mit Vorgängern q_1, \dots, q_k

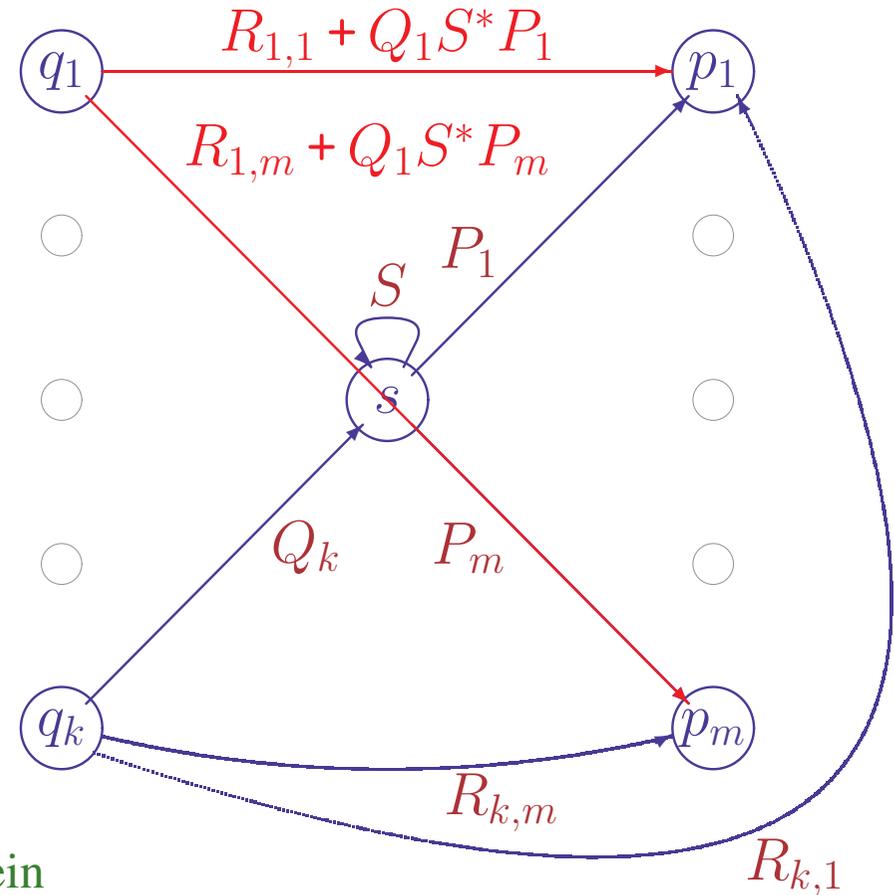
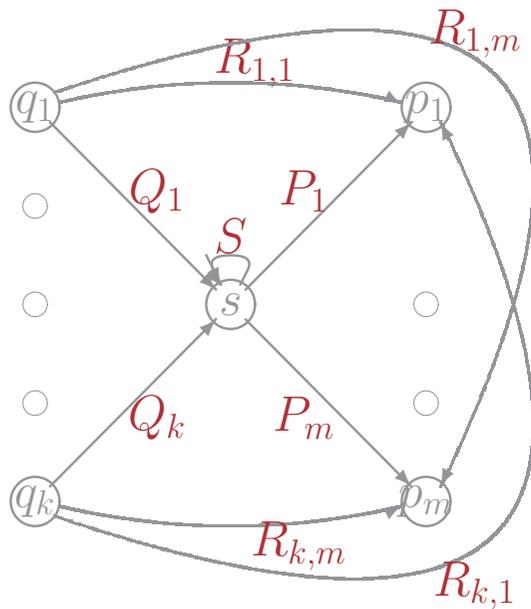
und Nachfolgern p_1, \dots, p_m

jedes p_i kann auch einer der Zustände q_1, \dots, q_k sein

– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_1 über s : $R_{1,1} + Q_1 S^* P_1$

– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_m über s : $R_{1,m} + Q_1 S^* P_m$

ALLGEMEINE ZUSTANDSELIMINATION IN VNEAs

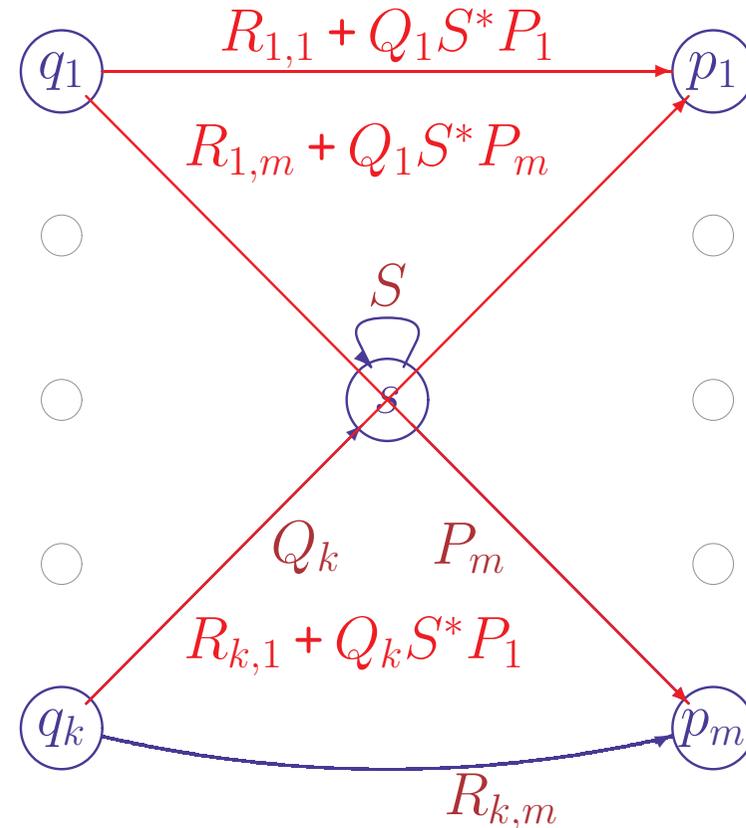
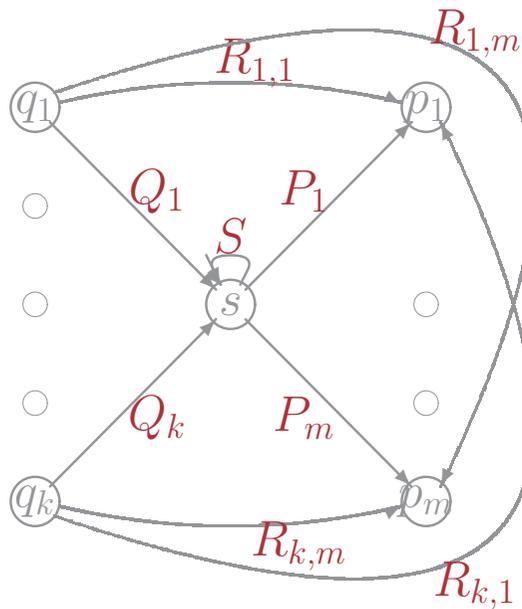


Eliminiere Zustand s
mit Vorgängern q_1, \dots, q_k
und Nachfolgern p_1, \dots, p_m

jedes p_i kann auch einer der Zustände q_1, \dots, q_k sein

- Eliminiere Pfad von q_1 nach p_1 über s : $R_{1,1} + Q_1 S^* P_1$
- Eliminiere Pfad von q_1 nach p_m über s : $R_{1,m} + Q_1 S^* P_m$
- Eliminiere Pfad von q_k nach p_1 über s : $R_{k,1} + Q_k S^* P_1$

ALLGEMEINE ZUSTANDESELIMINATION IN VNEAs

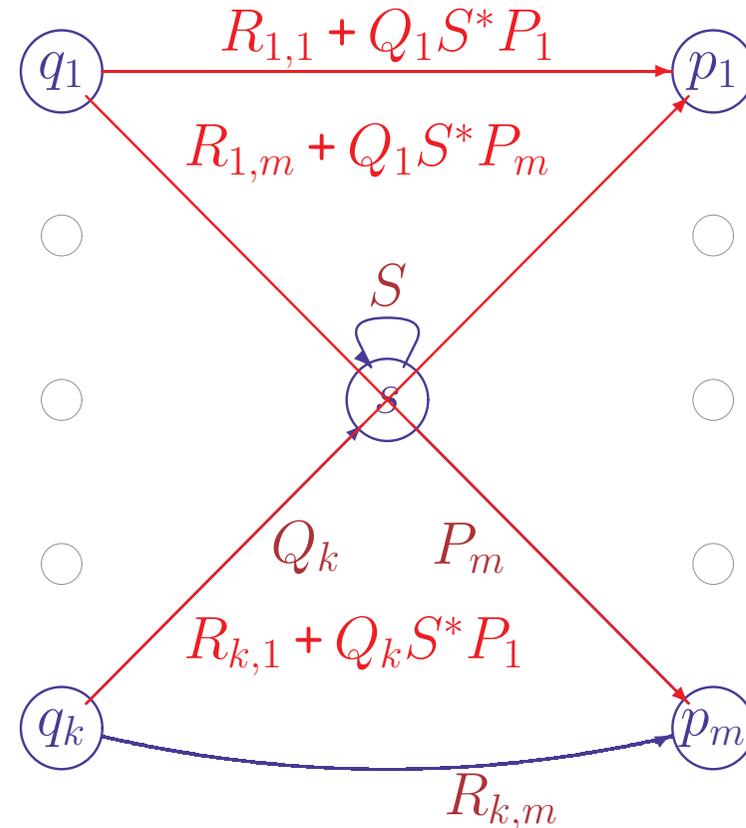
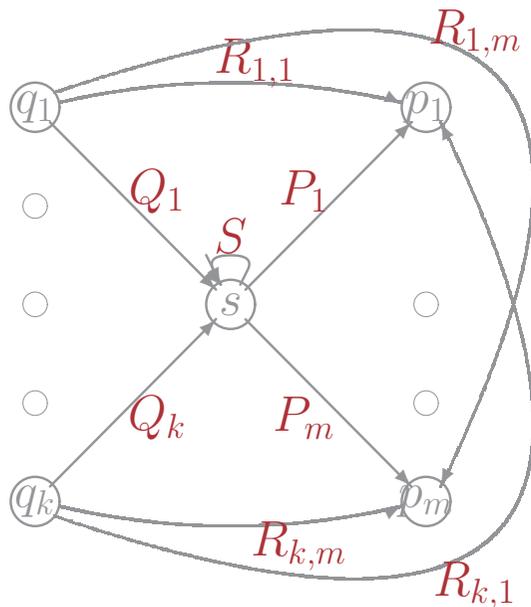


Eliminiere Zustand s
mit Vorgängern q_1, \dots, q_k
und Nachfolgern p_1, \dots, p_m

jedes p_i kann auch einer der Zustände q_1, \dots, q_k sein

- Eliminiere Pfad von q_1 nach p_1 über s : $R_{1,1} + Q_1 S^* P_1$
- Eliminiere Pfad von q_1 nach p_m über s : $R_{1,m} + Q_1 S^* P_m$
- Eliminiere Pfad von q_k nach p_1 über s : $R_{k,1} + Q_k S^* P_1$

ALLGEMEINE ZUSTANDSELIMINATION IN VNEAs



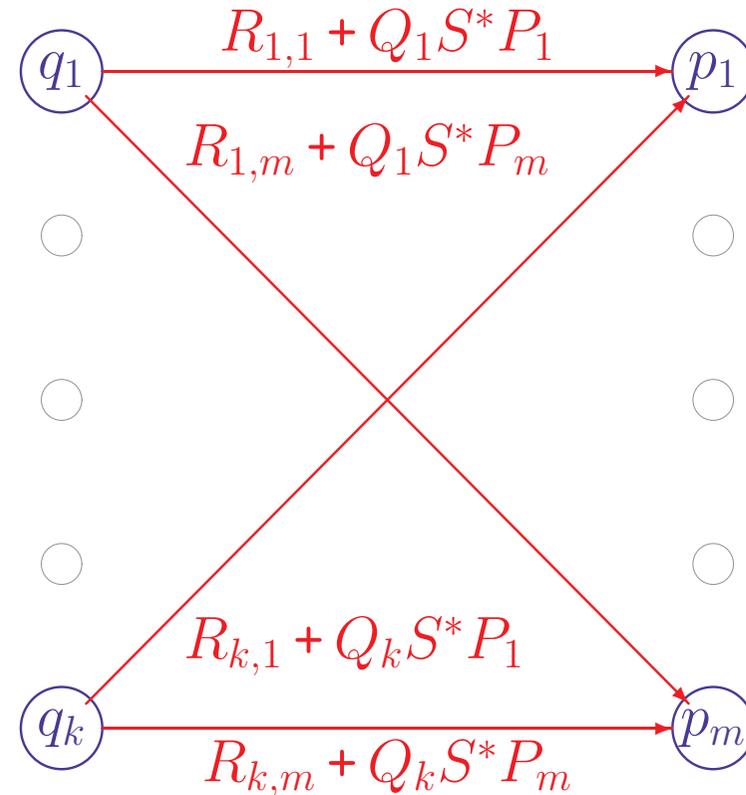
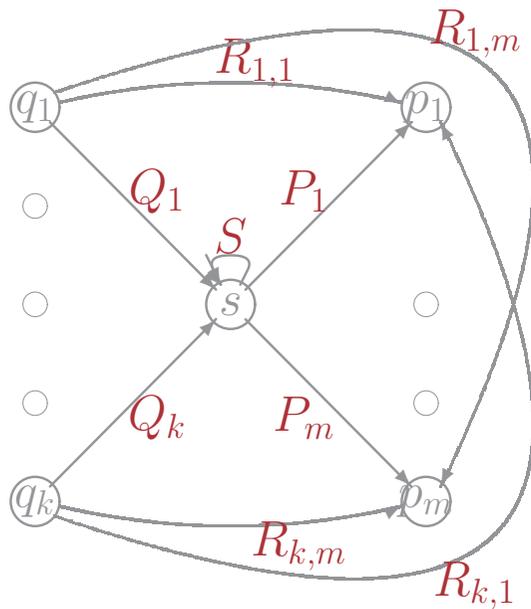
**Eliminiere Zustand s
mit Vorgängern q_1, \dots, q_k**

und Nachfolgern p_1, \dots, p_m

jedes p_i kann auch einer der Zustände q_1, \dots, q_k sein

- Eliminiere Pfad von q_1 nach p_1 über s : $R_{1,1} + Q_1 S^* P_1$
- Eliminiere Pfad von q_1 nach p_m über s : $R_{1,m} + Q_1 S^* P_m$
- Eliminiere Pfad von q_k nach p_1 über s : $R_{k,1} + Q_k S^* P_1$
- Eliminiere Pfad von q_k nach p_m über s : $R_{k,m} + Q_k S^* P_m$

ALLGEMEINE ZUSTANDSELIMINATION IN VNEAs



Eliminiere Zustand s
mit Vorgängern q_1, \dots, q_k
und Nachfolgern p_1, \dots, p_m

jedes p_i kann auch einer der Zustände q_1, \dots, q_k sein

- Eliminiere Pfad von q_1 nach p_1 über s : $R_{1,1} + Q_1 S^* P_1$
- Eliminiere Pfad von q_1 nach p_m über s : $R_{1,m} + Q_1 S^* P_m$
- Eliminiere Pfad von q_k nach p_1 über s : $R_{k,1} + Q_k S^* P_1$
- Eliminiere Pfad von q_k nach p_m über s : $R_{k,m} + Q_k S^* P_m$

1. Ergänze neuen Anfangszustand p_0 und Endzustand p_f

– ϵ -Übergang von neuem zu altem Anfangszustand

– ϵ -Übergang von allen alten Endzuständen zum neuen Endzustand

↳ Anfangs- und Endzustand haben keine ein- bzw. ausgehenden Kanten

1. Ergänze neuen Anfangszustand p_0 und Endzustand p_f

– ϵ -Übergang von neuem zu altem Anfangszustand

– ϵ -Übergang von allen alten Endzuständen zum neuen Endzustand

↳ Anfangs- und Endzustand haben keine ein- bzw. ausgehenden Kanten

2. Transformiere endlichen Automaten in VNEA

– Ersetze Beschriftungen mit Symbolen $a \in \Sigma$ durch reguläre Ausdrücke

1. Ergänze neuen Anfangszustand p_0 und Endzustand p_f

- ϵ -Übergang von neuem zu altem Anfangszustand
- ϵ -Übergang von allen alten Endzuständen zum neuen Endzustand
- ↳ Anfangs- und Endzustand haben keine ein- bzw. ausgehenden Kanten

2. Transformiere endlichen Automaten in VNEA

- Ersetze Beschriftungen mit Symbolen $a \in \Sigma$ durch reguläre Ausdrücke

3. Eliminiere alle Zustände außer p_0 und p_f

- Iterative Anwendung des Eliminationsverfahrens
- Vereinfache entstehende Ausdrücke nach jedem Schritt

1. Ergänze neuen Anfangszustand p_0 und Endzustand p_f

– ϵ -Übergang von neuem zu altem Anfangszustand

– ϵ -Übergang von allen alten Endzuständen zum neuen Endzustand

↳ Anfangs- und Endzustand haben keine ein- bzw. ausgehenden Kanten

2. Transformiere endlichen Automaten in VNEA

– Ersetze Beschriftungen mit Symbolen $a \in \Sigma$ durch reguläre Ausdrücke

3. Eliminiere alle Zustände außer p_0 und p_f

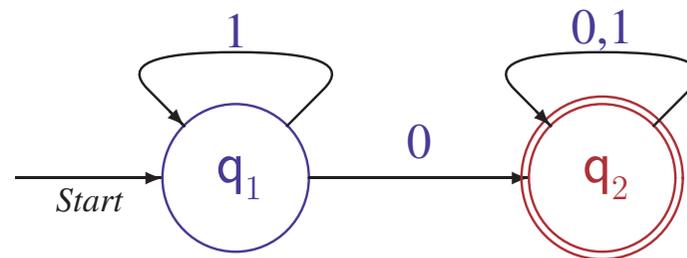
– Iterative Anwendung des Eliminationsverfahrens

– Vereinfache entstehende Ausdrücke nach jedem Schritt

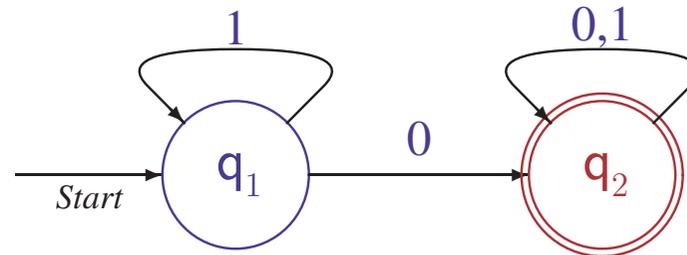
4. Extrahiere regulären Ausdruck aus VNEA

– Zielausdruck ist Beschriftung der Kante von p_0 nach p_f

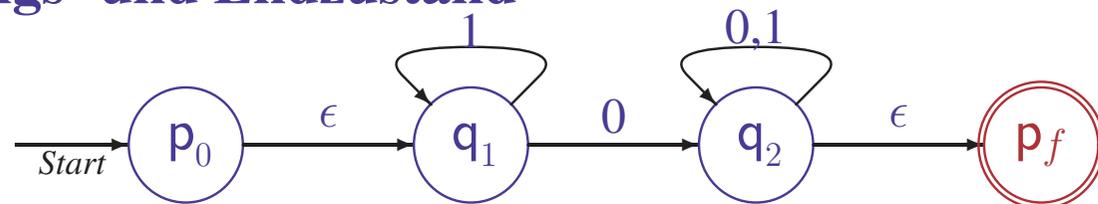
UMWANDLUNG NEA \rightarrow RA: EINFACHES BEISPIEL



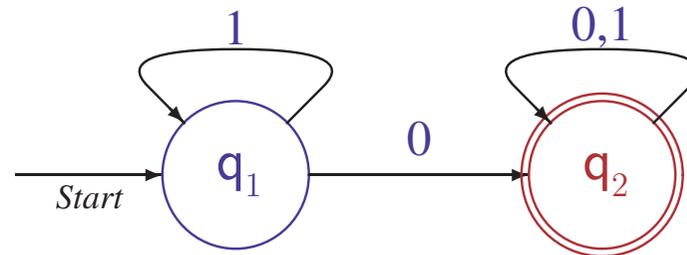
UMWANDLUNG NEA \rightarrow RA: EINFACHES BEISPIEL



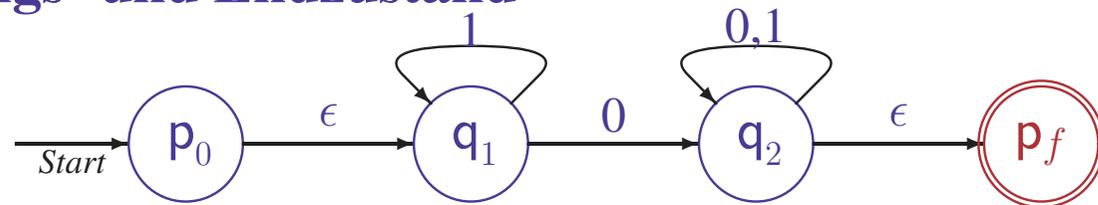
1. Ergänze neuen Anfangs- und Endzustand



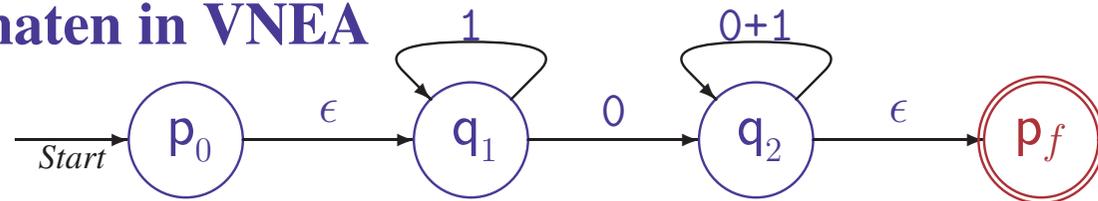
UMWANDLUNG NEA \rightarrow RA: EINFACHES BEISPIEL



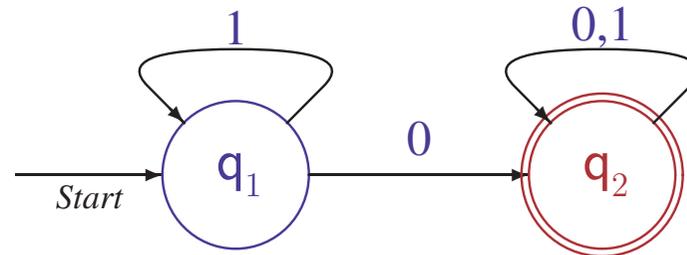
1. Ergänze neuen Anfangs- und Endzustand



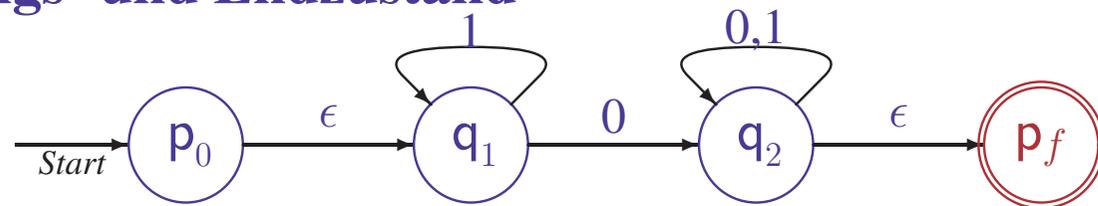
2. Transformiere Automaten in VNEA



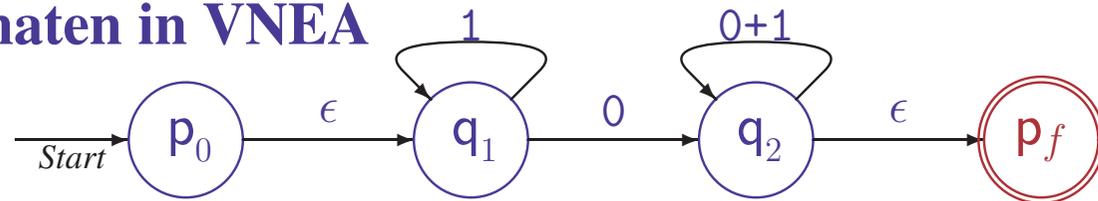
UMWANDLUNG NEA \rightarrow RA: EINFACHES BEISPIEL



1. Ergänze neuen Anfangs- und Endzustand

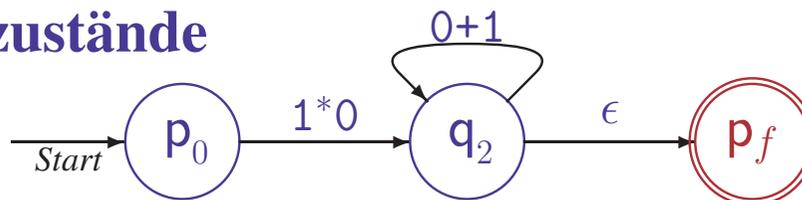


2. Transformiere Automaten in VNEA

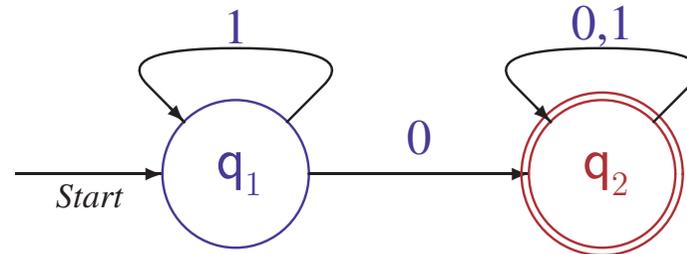


3. Eliminiere Zwischenzustände

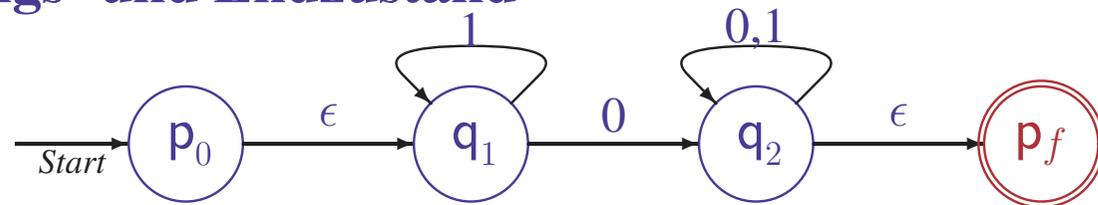
– Eliminiere q_1



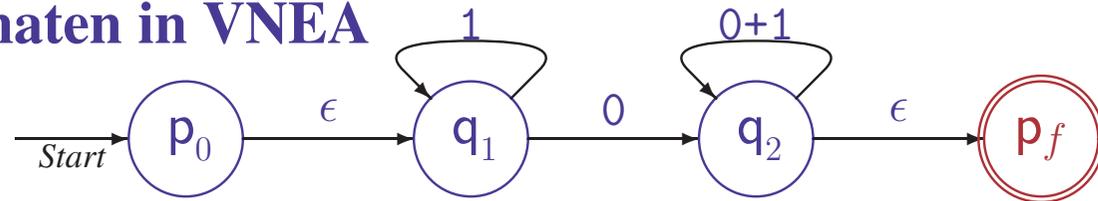
UMWANDLUNG NEA \rightarrow RA: EINFACHES BEISPIEL



1. Ergänze neuen Anfangs- und Endzustand

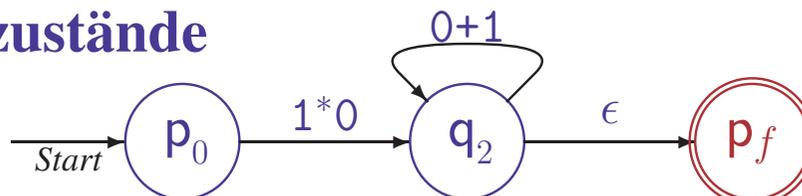


2. Transformiere Automaten in VNEA

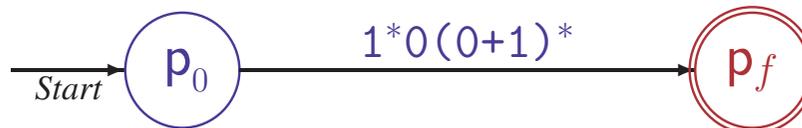


3. Eliminiere Zwischenzustände

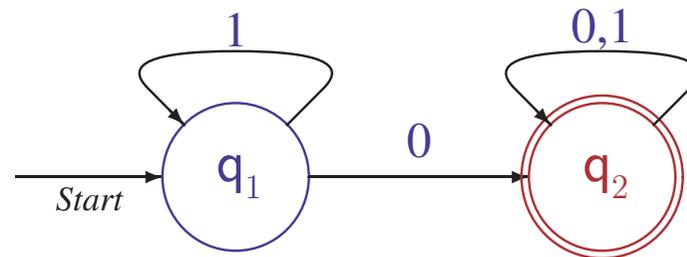
– Eliminiere q_1



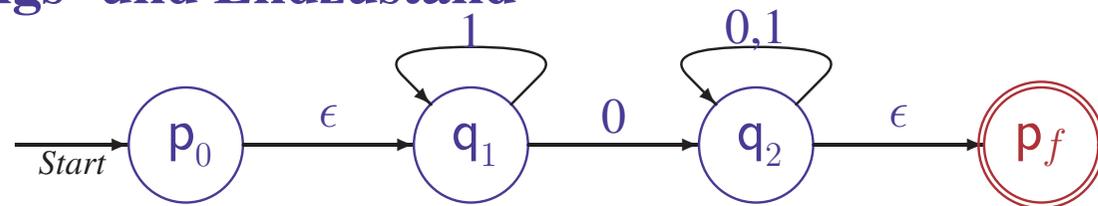
– Eliminiere q_2



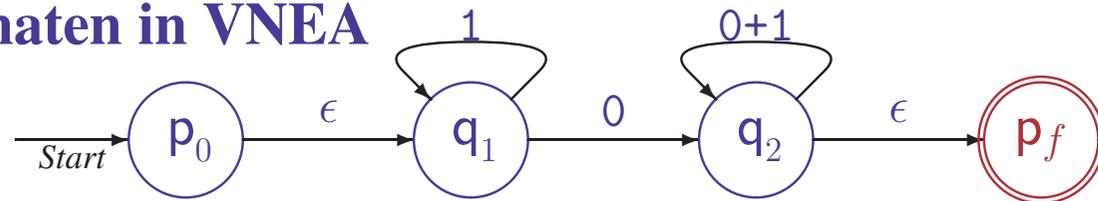
UMWANDLUNG NEA \rightarrow RA: EINFACHES BEISPIEL



1. Ergänze neuen Anfangs- und Endzustand

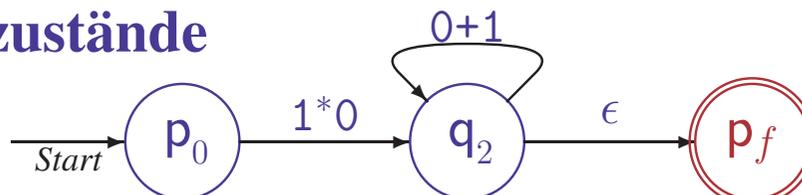


2. Transformiere Automaten in VNEA

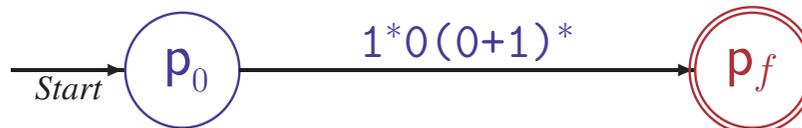


3. Eliminiere Zwischenzustände

– Eliminiere q_1



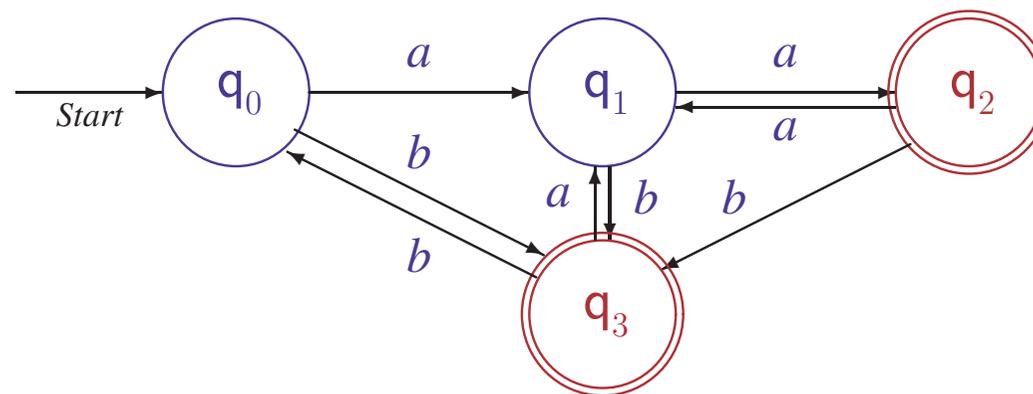
– Eliminiere q_2



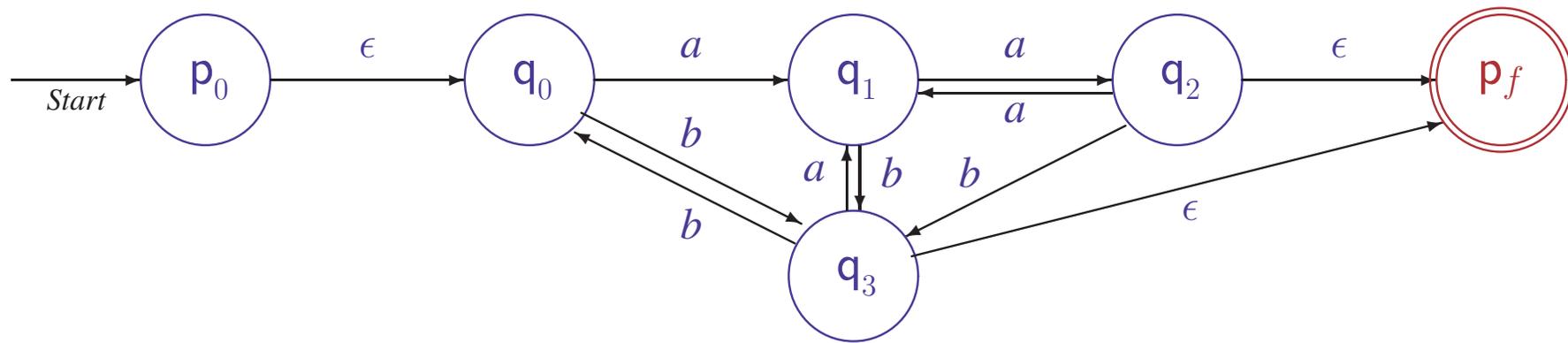
4. Extrahierter Ausdruck ist $1^*0(0+1)^*$

Umwandlung mit Pfadanalyseverfahren würde 12 aufwendige Schritte erfordern (Folie 28)

UMWANDLUNG NEA \rightarrow RA AM BEISPIEL

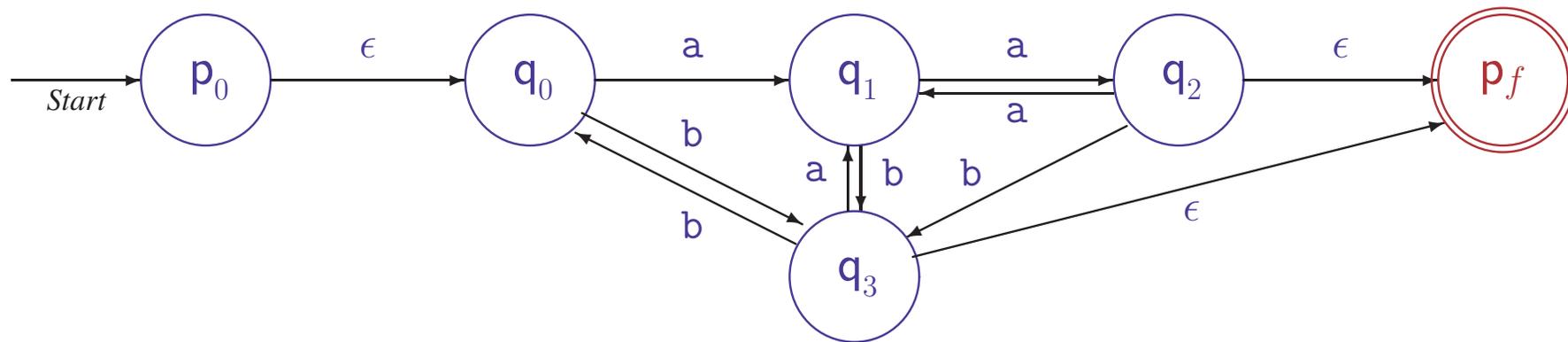


UMWANDLUNG NEA \rightarrow RA AM BEISPIEL



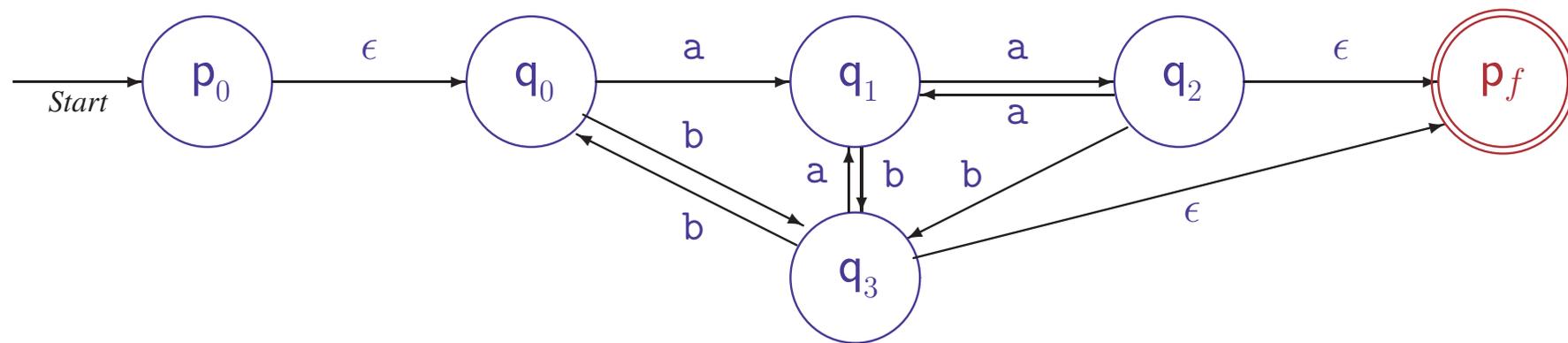
1. Ergänze neuen Anfangs- und Endzustand

UMWANDLUNG NEA \rightarrow RA AM BEISPIEL



1. Ergänze neuen Anfangs- und Endzustand
2. Transformiere Automaten in VNEA

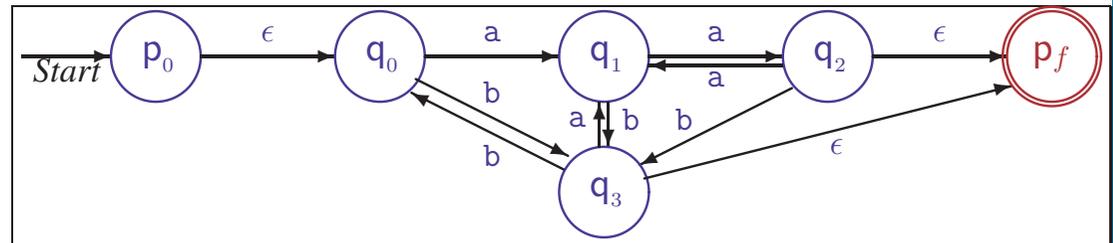
UMWANDLUNG NEA \rightarrow RA AM BEISPIEL



1. Ergänze neuen Anfangs- und Endzustand
2. Transformiere Automaten in VNEA
3. Eliminiere Zwischenzustände

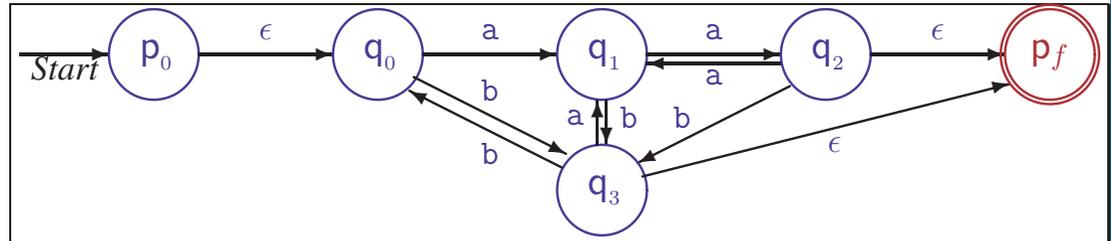
UMWANDLUNG NEA \rightarrow RA AM BEISPIEL

1. Ergänze neuen Anfangs- und Endzustand
2. Transformiere Automaten in VNEA
3. **Eliminiere Zwischenzustände**

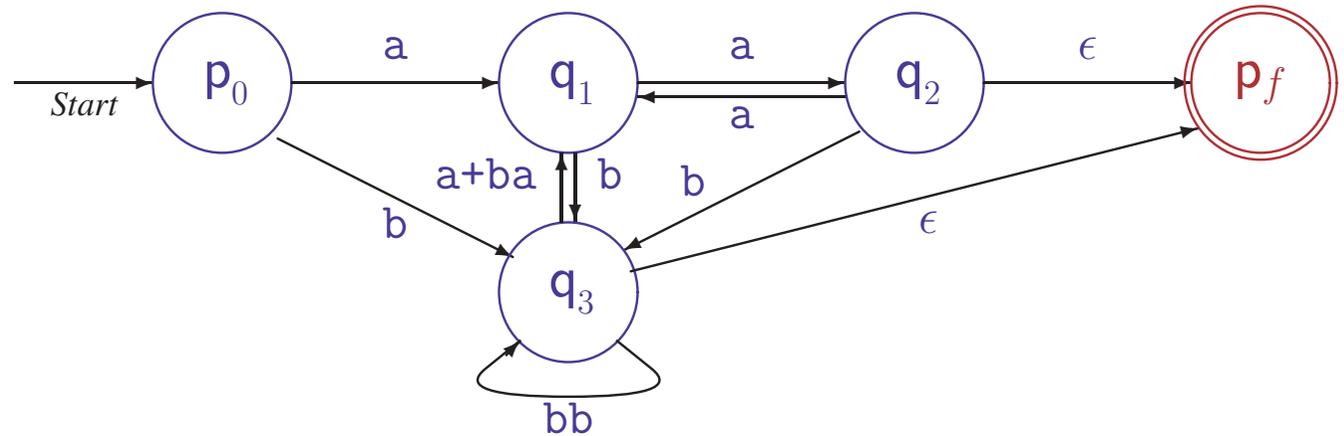


UMWANDLUNG NEA \rightarrow RA AM BEISPIEL

1. Ergänze neuen Anfangs- und Endzustand
2. Transformiere Automaten in VNEA
3. **Eliminiere Zwischenzustände**

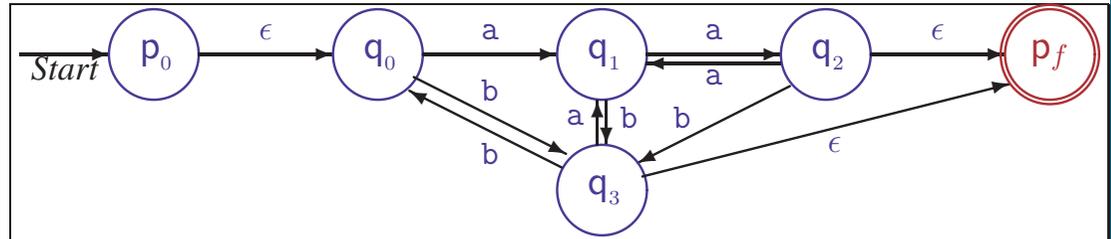


– Eliminiere q_0

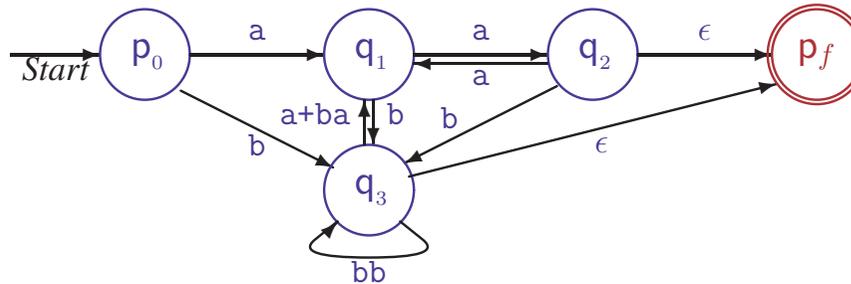


UMWANDLUNG NEA \rightarrow RA AM BEISPIEL

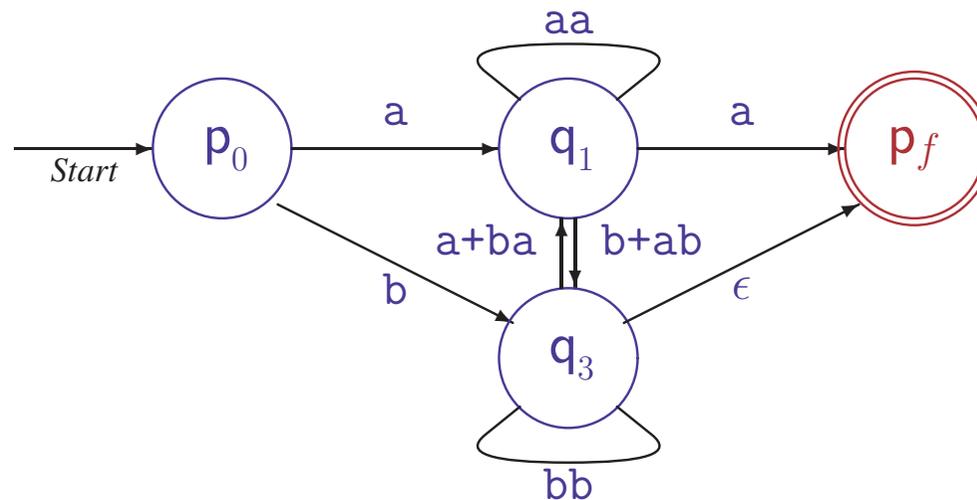
1. Ergänze neuen Anfangs- und Endzustand
2. Transformiere Automaten in VNEA
3. **Eliminiere Zwischenzustände**



– Eliminiere q_0

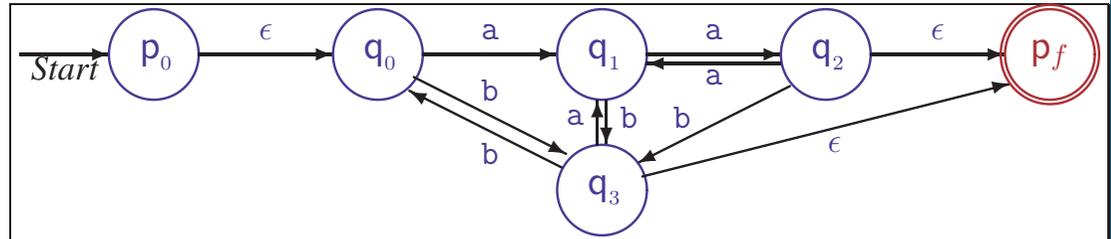


– Eliminiere q_2

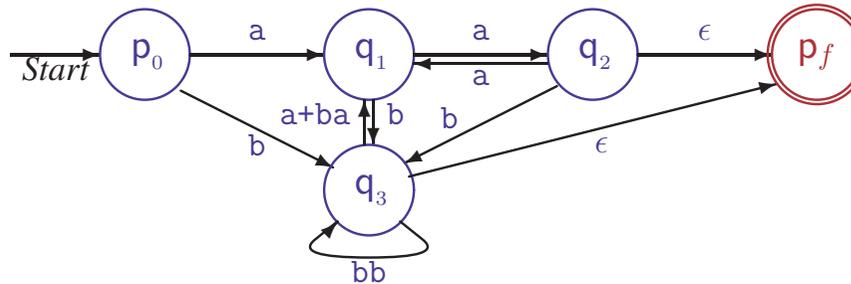


UMWANDLUNG NEA \rightarrow RA AM BEISPIEL

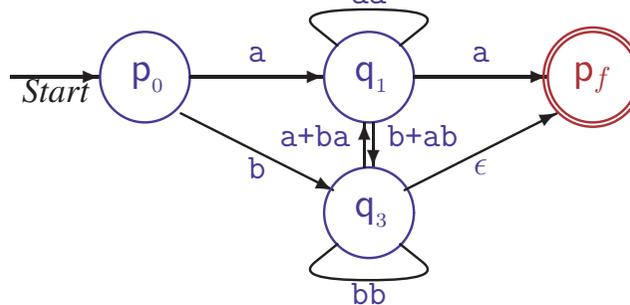
1. Ergänze neuen Anfangs- und Endzustand
2. Transformiere Automaten in VNEA
3. **Eliminiere Zwischenzustände**



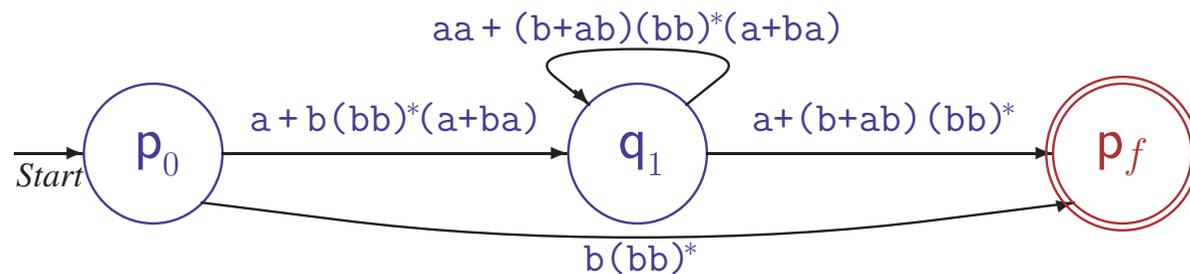
– Eliminiere q_0



– Eliminiere q_2

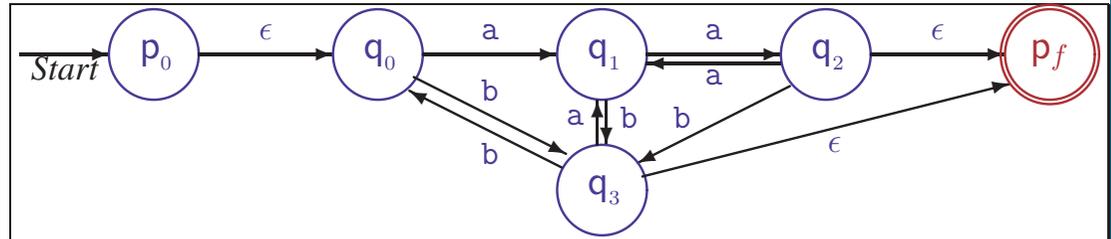


– Eliminiere q_3



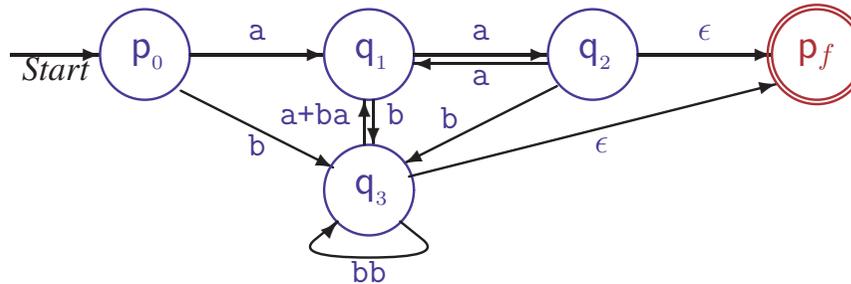
UMWANDLUNG NEA \rightarrow RA AM BEISPIEL

1. Ergänze neuen Anfangs- und Endzustand
2. Transformiere Automaten in VNEA

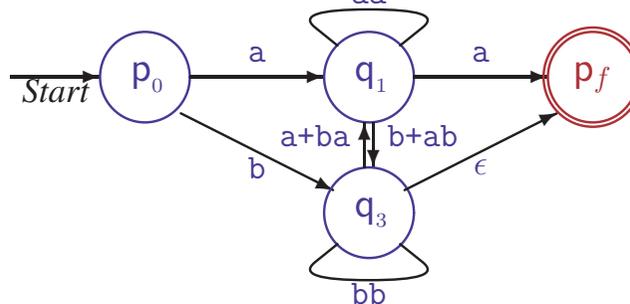


3. Eliminiere Zwischenzustände

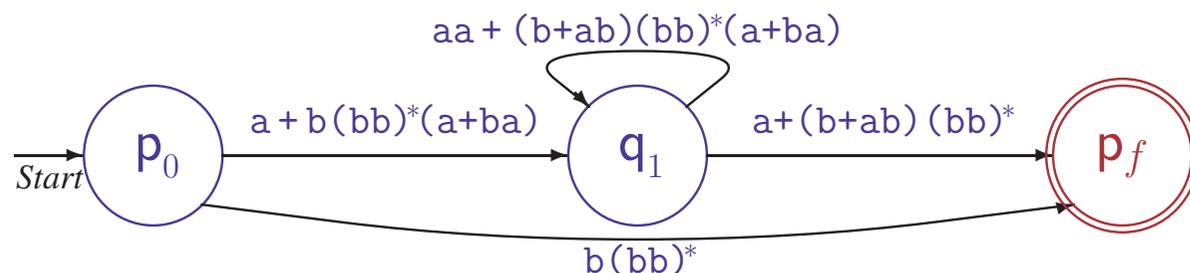
– Eliminiere q_0



– Eliminiere q_2



– Eliminiere q_3



4. Extrahierter Ausdruck ergibt sich nach Elimination von q_1

– $b(bb)^* + (a + b(bb)^*(a+ba))(aa + (b+ab)(bb)^*(a+ba))^*(a + (b+ab)(bb)^*)$

● **Algebraische Notation für Sprachen**

- ϵ , \emptyset , Symbole des Alphabets, Vereinigung, Verkettung, Sternoperator
- Äquivalent zu endlichen Automaten
- Gut zum **Nachweis algebraischer Gesetze** von Sprachen
- Anwendung in Programmiersprachen und Suchmaschinen

● **Transformation in endliche Automaten**

- **Iterative Konstruktion** von ϵ -NEAs
- **Nachträgliche Optimierung** durch Elimination von ϵ -Übergängen

● **Transformation von Automaten in Ausdrücke**

- Konstruktion durch **Elimination von Zuständen** in VNEAs
- Historisch: Konstruktion von Ausdrücken für Abarbeitungspfade
- **Nachträgliche Optimierungen** durch Anwendung algebraischer Gesetze

ANHANG

Originalmethode: allgemeines Graphanalyseverfahren

Originalmethode: allgemeines Graphanalyseverfahren

- Gegeben DEA $A = (\{q_1, \dots, q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_{f_1}, \dots, q_{f_m}\})$

Originalmethode: allgemeines Graphanalyseverfahren

- Gegeben DEA $A = (\{q_1, \dots, q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_{f_1}, \dots, q_{f_m}\})$
- Definiere Ausdrücke für Pfade durch A
 - R_{ij}^k : Regulärer Ausdruck für Menge der Wörter w mit $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$,
so dass für alle $v \sqsubseteq w$ ($v \neq w$) gilt: $\hat{\delta}(q_i, v) = q_m \Rightarrow m \leq k$
(Abarbeitung von w berührt keinen Zustand größer als k)

Originalmethode: allgemeines Graphanalyseverfahren

- Gegeben DEA $A = (\{q_1, \dots, q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_{f_1}, \dots, q_{f_m}\})$
- Definiere Ausdrücke für Pfade durch A
 - R_{ij}^k : Regulärer Ausdruck für Menge der Wörter w mit $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$,
so dass für alle $v \sqsubseteq w$ ($v \neq w$) gilt: $\hat{\delta}(q_i, v) = q_m \Rightarrow m \leq k$
(Abarbeitung von w berührt keinen Zustand größer als k)
- Setze die R_{ij}^k zu Ausdruck für $L(A)$ zusammen
 - Per Definition ist R_{ij}^n ein Ausdruck für Wörter w mit $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$
 - Setze $R = R_{1f_1}^n + \dots + R_{1f_m}^n$
 - Dann gilt $L(R) = \bigcup_{j=1}^m \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_1, w) = q_{f_j}\}$
 $= \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in \{q_{f_1}, \dots, q_{f_m}\}. \hat{\delta}(q_1, w) = q\} = L(A)$

ITERATIVE BESTIMMUNG DER AUSDRÜCKE R_{ij}^k

- **Basisfall R_{ij}^0 :** Pfad darf zwischendurch **keine Zustände berühren**
 - Pfadlänge 0 (nur für $i=j$): $\epsilon \in L(R_{ii}^0)$
 - Pfadlänge 1: $\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \subseteq L(R_{ij}^0)$
 - Ergebnis: $R_{ii}^0 = \epsilon + a_1 + \dots + a_k$, wobei $\{a_1, \dots, a_k\} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}$
 $R_{ij}^0 = \emptyset + a_1 + \dots + a_k$ ($i \neq j$)

ITERATIVE BESTIMMUNG DER AUSDRÜCKE R_{ij}^k

- **Basisfall R_{ij}^0 :** Pfad darf zwischendurch **keine Zustände berühren**

- Pfadlänge 0 (nur für $i=j$): $\epsilon \in L(R_{ii}^0)$

- Pfadlänge 1: $\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \subseteq L(R_{ij}^0)$

- Ergebnis: $R_{ii}^0 = \epsilon + a_1 + \dots + a_k$, wobei $\{a_1, \dots, a_k\} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_i\}$

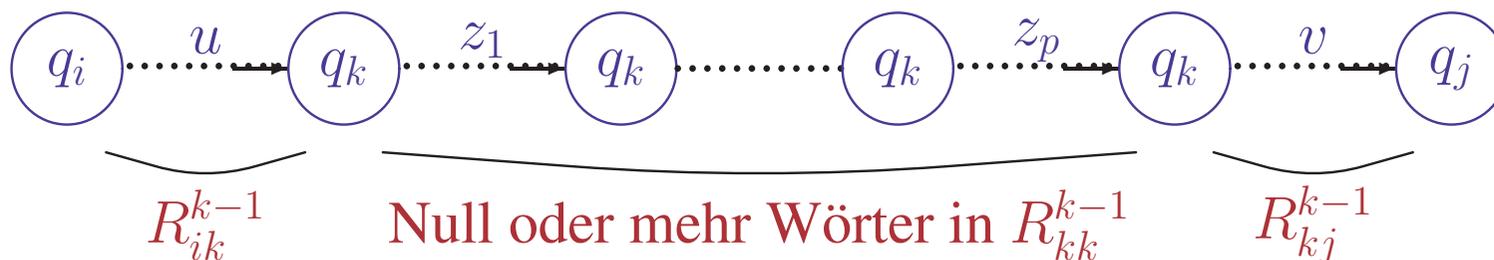
$$R_{ij}^0 = \emptyset + a_1 + \dots + a_k \quad (i \neq j)$$

- **Schrittfall R_{ij}^k ($0 < k \leq n$):** zwei Alternativen

- Wörter $w \in L(R_{ij}^k)$, deren Pfad q_k nicht enthält, gehören zu $L(R_{ij}^{k-1})$

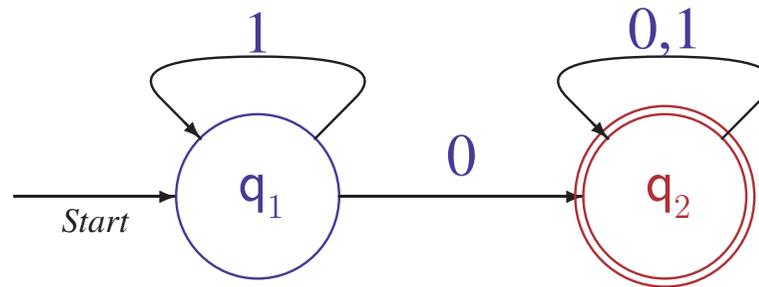
- Wörter $w \in L(R_{ij}^k)$, deren Pfad q_k enthält:

Zerlege w in $uz_1 \dots z_p v$ mit $\hat{\delta}(q_i, u) = q_k \wedge \forall l \leq p. \hat{\delta}(q_k, z_l) = q_k \wedge \hat{\delta}(q_k, v) = q_j$



- Ergebnis: $R_{ij}^k = R_{ij}^{k-1} + R_{ik}^{k-1} \circ (R_{kk}^{k-1})^* \circ R_{kj}^{k-1}$

UMWANDLUNG VON AUTOMATEN AM BEISPIEL



UMWANDLUNG VON AUTOMATEN AM BEISPIEL

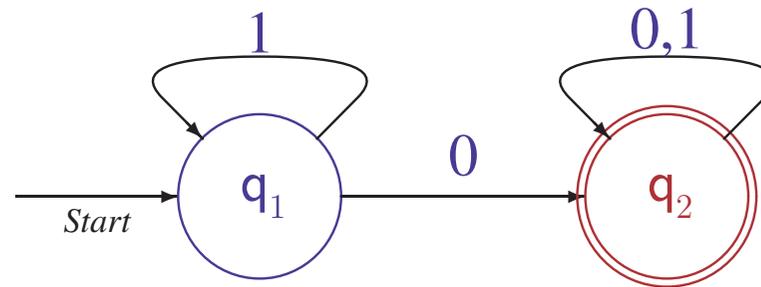
• Basisfall

$$R_{11}^0 = \epsilon + 1$$

$$R_{12}^0 = 0$$

$$R_{21}^0 = \emptyset$$

$$R_{22}^0 = \epsilon + 0 + 1$$



UMWANDLUNG VON AUTOMATEN AM BEISPIEL

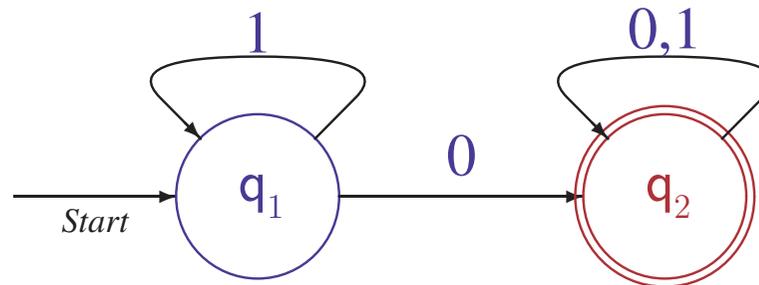
• Basisfall

$$R_{11}^0 = \epsilon + 1$$

$$R_{12}^0 = 0$$

$$R_{21}^0 = \emptyset$$

$$R_{22}^0 = \epsilon + 0 + 1$$



• Stufe 1

$$R_{11}^1 = R_{11}^0 + R_{11}^0 (R_{11}^0)^* R_{11}^0 = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1) (\epsilon + 1)^* (\epsilon + 1) \quad \mapsto 1^*$$

$$R_{12}^1 = R_{12}^0 + R_{11}^0 (R_{11}^0)^* R_{12}^0 = 0 + (\epsilon + 1) (\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto 1^* 0$$

$$R_{21}^1 = R_{21}^0 + R_{21}^0 (R_{11}^0)^* R_{11}^0 = \emptyset + \emptyset (\epsilon + 1)^* (\epsilon + 1) \quad \mapsto \emptyset$$

$$R_{22}^1 = R_{22}^0 + R_{21}^0 (R_{11}^0)^* R_{12}^0 = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset (\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \epsilon + 0 + 1$$

UMWANDLUNG VON AUTOMATEN AM BEISPIEL

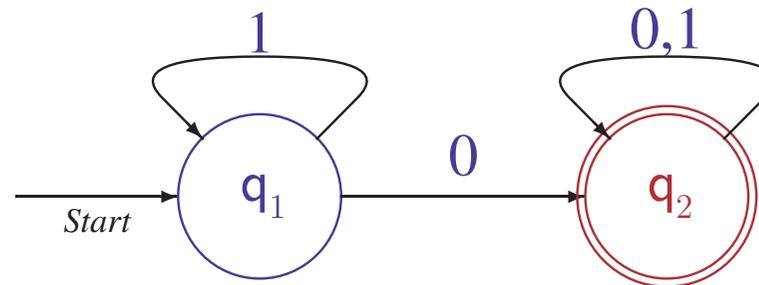
• Basisfall

$$R_{11}^0 = \epsilon + 1$$

$$R_{12}^0 = 0$$

$$R_{21}^0 = \emptyset$$

$$R_{22}^0 = \epsilon + 0 + 1$$



• Stufe 1

$$R_{11}^1 = R_{11}^0 + R_{11}^0 (R_{11}^0)^* R_{11}^0 = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1) (\epsilon + 1)^* (\epsilon + 1) \quad \mapsto 1^*$$

$$R_{12}^1 = R_{12}^0 + R_{11}^0 (R_{11}^0)^* R_{12}^0 = 0 + (\epsilon + 1) (\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto 1^*0$$

$$R_{21}^1 = R_{21}^0 + R_{21}^0 (R_{11}^0)^* R_{11}^0 = \emptyset + \emptyset (\epsilon + 1)^* (\epsilon + 1) \quad \mapsto \emptyset$$

$$R_{22}^1 = R_{22}^0 + R_{21}^0 (R_{11}^0)^* R_{12}^0 = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset (\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \epsilon + 0 + 1$$

• Stufe 2

$$R_{11}^2 = R_{11}^1 + R_{12}^1 (R_{22}^1)^* R_{21}^1 = 1^* + 1^*0(\epsilon+0+1)^*\emptyset$$

$$R_{12}^2 = R_{12}^1 + R_{12}^1 (R_{22}^1)^* R_{22}^1 = 1^*0 + 1^*0(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1)$$

$$R_{21}^2 = R_{21}^1 + R_{22}^1 (R_{22}^1)^* R_{21}^1 = \emptyset + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^*\emptyset$$

$$R_{22}^2 = R_{22}^1 + R_{22}^1 (R_{22}^1)^* R_{22}^1 = (\epsilon+0+1) + (\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1)$$

UMWANDLUNG VON AUTOMATEN AM BEISPIEL

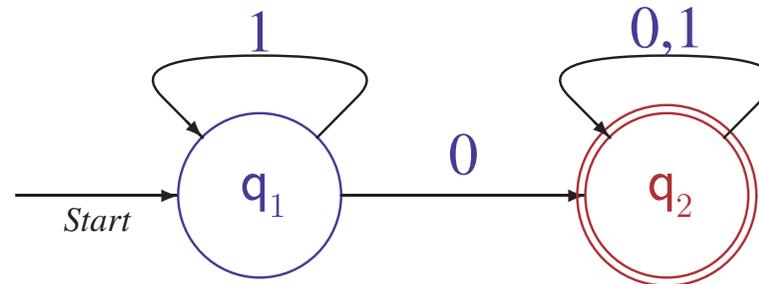
• Basisfall

$$R_{11}^0 = \epsilon + 1$$

$$R_{12}^0 = 0$$

$$R_{21}^0 = \emptyset$$

$$R_{22}^0 = \epsilon + 0 + 1$$



• Stufe 1

$$R_{11}^1 = R_{11}^0 + R_{11}^0 (R_{11}^0)^* R_{11}^0 = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1) (\epsilon + 1)^* (\epsilon + 1) \quad \mapsto 1^*$$

$$R_{12}^1 = R_{12}^0 + R_{11}^0 (R_{11}^0)^* R_{12}^0 = 0 + (\epsilon + 1) (\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto 1^* 0$$

$$R_{21}^1 = R_{21}^0 + R_{21}^0 (R_{11}^0)^* R_{11}^0 = \emptyset + \emptyset (\epsilon + 1)^* (\epsilon + 1) \quad \mapsto \emptyset$$

$$R_{22}^1 = R_{22}^0 + R_{21}^0 (R_{11}^0)^* R_{12}^0 = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset (\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \epsilon + 0 + 1$$

• Stufe 2

$$R_{11}^2 = R_{11}^1 + R_{12}^1 (R_{22}^1)^* R_{21}^1 = 1^* + 1^* 0 (\epsilon + 0 + 1)^* \emptyset \quad \mapsto 1^*$$

$$R_{12}^2 = R_{12}^1 + R_{12}^1 (R_{22}^1)^* R_{22}^1 = 1^* 0 + 1^* 0 (\epsilon + 0 + 1)^* (\epsilon + 0 + 1) \quad \mapsto 1^* 0 (0 + 1)^*$$

$$R_{21}^2 = R_{21}^1 + R_{22}^1 (R_{22}^1)^* R_{21}^1 = \emptyset + (\epsilon + 0 + 1) (\epsilon + 0 + 1)^* \emptyset \quad \mapsto \emptyset$$

$$R_{22}^2 = R_{22}^1 + R_{22}^1 (R_{22}^1)^* R_{22}^1 = (\epsilon + 0 + 1) + (\epsilon + 0 + 1) (\epsilon + 0 + 1)^* (\epsilon + 0 + 1) \quad \mapsto (0 + 1)^*$$

UMWANDLUNG VON AUTOMATEN AM BEISPIEL

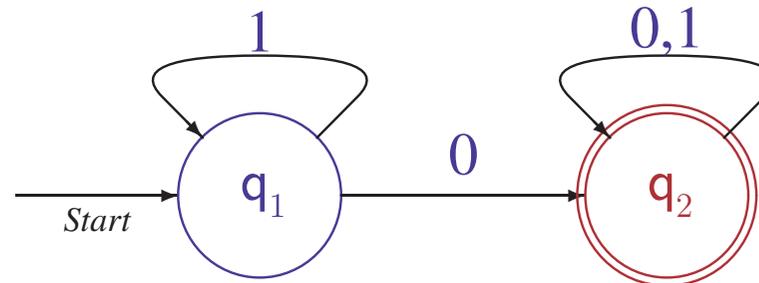
• Basisfall

$$R_{11}^0 = \epsilon + 1$$

$$R_{12}^0 = 0$$

$$R_{21}^0 = \emptyset$$

$$R_{22}^0 = \epsilon + 0 + 1$$



• Stufe 1

$$R_{11}^1 = R_{11}^0 + R_{11}^0 (R_{11}^0)^* R_{11}^0 = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1) (\epsilon + 1)^* (\epsilon + 1) \quad \mapsto 1^*$$

$$R_{12}^1 = R_{12}^0 + R_{11}^0 (R_{11}^0)^* R_{12}^0 = 0 + (\epsilon + 1) (\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto 1^* 0$$

$$R_{21}^1 = R_{21}^0 + R_{21}^0 (R_{11}^0)^* R_{11}^0 = \emptyset + \emptyset (\epsilon + 1)^* (\epsilon + 1) \quad \mapsto \emptyset$$

$$R_{22}^1 = R_{22}^0 + R_{21}^0 (R_{11}^0)^* R_{12}^0 = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset (\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \epsilon + 0 + 1$$

• Stufe 2

Gebraucht wird nur R_{12}^2

$$R_{11}^2 = R_{11}^1 + R_{12}^1 (R_{22}^1)^* R_{21}^1 = 1^* + 1^* 0 (\epsilon + 0 + 1)^* \emptyset \quad \mapsto 1^*$$

$$R_{12}^2 = R_{12}^1 + R_{12}^1 (R_{22}^1)^* R_{22}^1 = 1^* 0 + 1^* 0 (\epsilon + 0 + 1)^* (\epsilon + 0 + 1) \quad \mapsto 1^* 0 (0 + 1)^*$$

$$R_{21}^2 = R_{21}^1 + R_{22}^1 (R_{22}^1)^* R_{21}^1 = \emptyset + (\epsilon + 0 + 1) (\epsilon + 0 + 1)^* \emptyset \quad \mapsto \emptyset$$

$$R_{22}^2 = R_{22}^1 + R_{22}^1 (R_{22}^1)^* R_{22}^1 = (\epsilon + 0 + 1) + (\epsilon + 0 + 1) (\epsilon + 0 + 1)^* (\epsilon + 0 + 1) \quad \mapsto (0 + 1)^*$$

UMWANDLUNG VON AUTOMATEN AM BEISPIEL

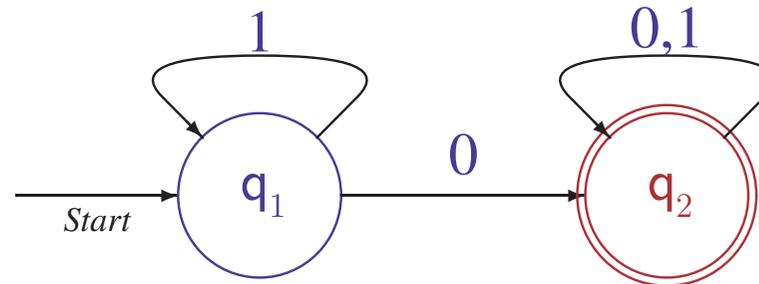
• Basisfall

$$R_{11}^0 = \epsilon + 1$$

$$R_{12}^0 = 0$$

$$R_{21}^0 = \emptyset$$

$$R_{22}^0 = \epsilon + 0 + 1$$



• Stufe 1

$$R_{11}^1 = R_{11}^0 + R_{11}^0 (R_{11}^0)^* R_{11}^0 = \epsilon + 1 + (\epsilon + 1) (\epsilon + 1)^* (\epsilon + 1) \quad \mapsto 1^*$$

$$R_{12}^1 = R_{12}^0 + R_{11}^0 (R_{11}^0)^* R_{12}^0 = 0 + (\epsilon + 1) (\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto 1^* 0$$

$$R_{21}^1 = R_{21}^0 + R_{21}^0 (R_{11}^0)^* R_{11}^0 = \emptyset + \emptyset (\epsilon + 1)^* (\epsilon + 1) \quad \mapsto \emptyset$$

$$R_{22}^1 = R_{22}^0 + R_{21}^0 (R_{11}^0)^* R_{12}^0 = \epsilon + 0 + 1 + \emptyset (\epsilon + 1)^* 0 \quad \mapsto \epsilon + 0 + 1$$

• Stufe 2

Gebraucht wird nur R_{12}^2

$$R_{11}^2 = R_{11}^1 + R_{12}^1 (R_{22}^1)^* R_{21}^1 = 1^* + 1^* 0 (\epsilon + 0 + 1)^* \emptyset \quad \mapsto 1^*$$

$$R_{12}^2 = R_{12}^1 + R_{12}^1 (R_{22}^1)^* R_{22}^1 = 1^* 0 + 1^* 0 (\epsilon + 0 + 1)^* (\epsilon + 0 + 1) \quad \mapsto 1^* 0 (0 + 1)^*$$

$$R_{21}^2 = R_{21}^1 + R_{22}^1 (R_{22}^1)^* R_{21}^1 = \emptyset + (\epsilon + 0 + 1) (\epsilon + 0 + 1)^* \emptyset \quad \mapsto \emptyset$$

$$R_{22}^2 = R_{22}^1 + R_{22}^1 (R_{22}^1)^* R_{22}^1 = (\epsilon + 0 + 1) + (\epsilon + 0 + 1) (\epsilon + 0 + 1)^* (\epsilon + 0 + 1) \quad \mapsto (0 + 1)^*$$

Regulärer Ausdruck des Automaten ist: $1^* 0 (0 + 1)^*$

DAS PFADANALYSEVERFAHREN IST ZU KOMPLIZIERT

- **Konstruktion aller R_{ij}^k ist aufwendig**
 - Es müssen mehr als n^3 Ausdrücke R_{ij}^k erzeugt werden
 - Ausdrücke R_{ij}^k können viermal so groß wie die R_{ij}^{k-1} werden
 - Ohne Vereinfachung der R_{ij}^k sind bis zu $n^3 * 4^n$ Symbole zu erzeugen

DAS PFADANALYSEVERFAHREN IST ZU KOMPLIZIERT

- **Konstruktion aller R_{ij}^k ist aufwendig**
 - Es müssen mehr als n^3 Ausdrücke R_{ij}^k erzeugt werden
 - Ausdrücke R_{ij}^k können viermal so groß wie die R_{ij}^{k-1} werden
 - Ohne Vereinfachung der R_{ij}^k sind bis zu $n^3 * 4^n$ Symbole zu erzeugen
- **Optimierungen des Verfahrens sind möglich**
 - Vermeide Vielfachkopien der R_{ij}^{k-1}
 - Vereinfache Ausdrücke R_{ij}^k direkt nach Erzeugung
 - Liefert keine grundsätzliche Verbesserung

DAS PFADANALYSEVERFAHREN IST ZU KOMPLIZIERT

- **Konstruktion aller R_{ij}^k ist aufwendig**
 - Es müssen mehr als n^3 Ausdrücke R_{ij}^k erzeugt werden
 - Ausdrücke R_{ij}^k können viermal so groß wie die R_{ij}^{k-1} werden
 - Ohne Vereinfachung der R_{ij}^k sind bis zu $n^3 * 4^n$ Symbole zu erzeugen
- **Optimierungen des Verfahrens sind möglich**
 - Vermeide Vielfachkopien der R_{ij}^{k-1}
 - Vereinfache Ausdrücke R_{ij}^k direkt nach Erzeugung
 - Liefert keine grundsätzliche Verbesserung

Zustandselimination ist erheblich effizienter