

Die Anfänge der Logik

Die Entwicklung des logischen Denkens vor Aristoteles

Holger Arnold

Universität Potsdam, Institut für Informatik

`arnold@cs.uni-potsdam.de`

GRUNDFRAGEN

Was ist Logik?

- Logik untersucht die *Prinzipien* gültiger Schlussfolgerungen
- Begriffe: Gültigkeit, Wahrheit, Falschheit
- Welche Methoden des Schließens gibt es?

Was ist ein Beweis?

- Beweis einer Aussage = gültiges Ableiten der Aussage aus wahren Prämissen
- Elemente eines Beweises:
 - wahre Prämissen (Voraussetzungen die erfüllt sein müssen)
 - gültige Argumente (Beweisschritte)

METHODEN DES SCHLIESSENS

Demonstrative Argumentation

- Ausgangspunkt sind wahre Voraussetzungen
- gelangt durch Ausführen gültiger Ableitungsschritte zu notwendigerweise wahren Schlussfolgerungen

Dialektische Argumentation

- Ausgangspunkt sind Fragen oder Annahmen, die nicht unbedingt wahr sein müssen
- wird durch Ausführen gültiger Ableitungsschritte ein Widerspruch erreicht, dann ist die Annahme widerlegt
- nur negative Ergebnisse möglich

GESCHICHTLICHES

Anwendung der Logik in der Antike

- Mathematik, besonders Geometrie
- Metaphysik
- juristische oder politische Auseinandersetzungen

Woher stammt unser Wissen?

- Vorsicht!

GESCHICHTLICHES

Wichtige Personen

- Thales von Milet (624 v.Chr. – 547 v.Chr.)
- Pythagoras von Samos (569 v.Chr. – 475 v.Chr.)
- Zeno von Elea (490 v.Chr. – 425 v.Chr.)
- Euklides von Megara (430 v.Chr. – 360 v.Chr.)
- Plato (427 v.Chr. – 347 v.Chr.)
- Aristoteles (384 v.Chr. – 322 v.Chr.)
- Euclid von Alexandria (325 v. Chr. – 265 v.Chr.)

DEMONSTRATION IN DER GEOMETRIE

Entwicklung der Geometrie

- Ägypter entdeckten empirisch einige geometrische Zusammenhänge, z.B. über das Volumen von Körpern
- Griechen ersetzten die empirischen Studien durch eine demonstrative Wissenschaft
- systematisches Studium der Geometrie begann wahrscheinlich in der Schule von Pythagoras

DEMONSTRATION IN DER GEOMETRIE

Anforderungen an elementare Geometrie als deduktive Wissenschaft

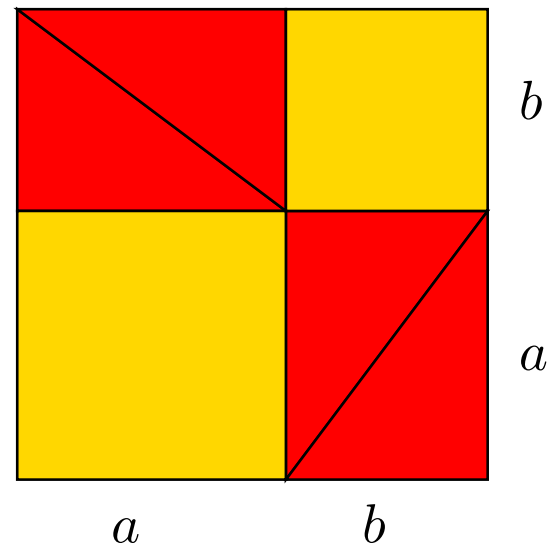
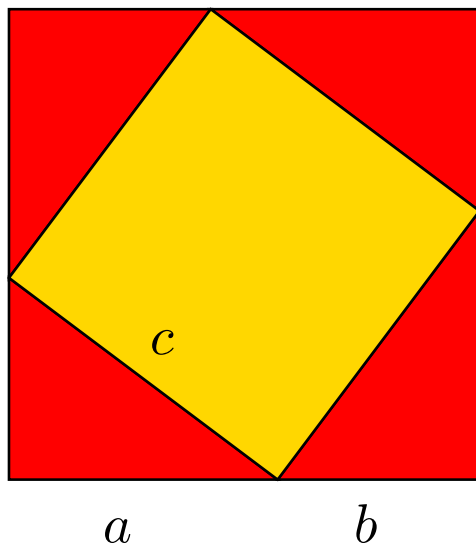
1. gewisse Annahmen werden ohne Beweis als wahr angesehen (Axiome)
2. alle anderen Aussagen werden ausschließlich von diesen Annahmen abgeleitet
3. die Ableitungen erfolgen ohne Bezug auf anschauliche geometrische Eigenschaften außer den Annahmen
→ Ableitung erfolgt *formal* (schematisiert, syntaktisch)

Diese Zusammenhänge waren den Griechen in der Zeit von Pythagoras noch nicht klar. Vielmehr war es ausreichend, wenn die Richtigkeit eines Beweises „offensichtlich“ war.

BEISPIEL: SATZ DES PYTHAGORAS $a^2 + b^2 = c^2$

Anschaulicher Beweis

- basiert auf der Umordnung geometrischer Elemente
- Beweis in Euklids „Elementen“ formal, aber viel komplexer



DEMONSTRATION IN DER GEOMETRIE

Euklids „Elemente“

- Euklid versucht in den „Elementen“ alle geometrischen Annahmen an den Anfang zu stellen und alle Sätze rein formal aus diesen Annahmen zu folgern
- älteste vollständig erhaltene Arbeit über Geometrie im antiken Griechenland
- frühe Beweise sind in den Arbeiten von Plato und Aristoteles zu finden, Ideal des deduktiven Systems war den Schulen von Pythagoras und Plato bekannt

Das Prinzip der Demonstration war nicht von Anfang an akzeptiert!

DEMONSTRATION IN DER GEOMETRIE

Welche Art von Logik wurde in den geometrischen Arbeiten betrachtet?

1. Aussagen über die „Art“ von Dingen, keine Aussagen über Individuen
 - eine Aussage wie „die Strecken AB und CD sind parallel“ ist keine Aussage über zwei bestimmte Linien
2. universale Aussagen die notwendigerweise wahr sind
 - Unterscheidung zwischen Aussagen die naturgemäß wahr sein müssen und solchen die nur „zufällig“ wahr sind

DEMONSTRATION IN DER GEOMETRIE

Welche Art von Logik wurde in den geometrischen Arbeiten betrachtet?

3. Definitionen als spezielle notwendigerweise wahre Aussagen
 - für die Griechen war eine Definition die Formulierung von Wahrheiten über Dinge
4. Zusammenfassung bzw. Einordnung verschiedener Dinge mit allgemeinen Regeln

DIALEKTIK UND METAPHYSISCHES ARGUMENTATION

Dialektik

- $\delta\iota\alpha\lambda\acute{\epsilon}\gamma\epsilon\sigma\theta\alpha\iota$ = diskutieren, erörtern
- Aristoteles bezeichnet Zeno von Elea als den Erfinder der Methode
- bereits in der Mathematik der Schule von Pythagoras verwendet (Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$)
- systematisch praktiziert u.a. von Euklides von Megara und von Sokrates

Bedeutung des Begriffs „Dialektik“ in Platons Dialogen

- Untersuchung von Hypothesen durch Betrachtung ihrer Konsequenzen
- kann eine Konsequenz nicht akzeptiert werden, so wird die Hypothese verworfen
- Sokrates: Konsequenz muss nicht logisch widersprüchlich sein, um die Hypothese zu verwerfen; es genügt wenn sie „offensichtlich“ falsch ist
- Beispiel: aus Theaetetus' These „Wissen ist Erkenntnis“ zieht Sokrates Schlussfolgerungen die Theaetetus dazu bringen, die These aufzugeben

DIALEKTIK UND METAPHYSISCHES ARGUMENTATION

Bedeutungen des Begriffs „Dialektik“ in Platons „Republik“ und danach

- Argumentationsmethode, die auf Widerlegung basiert und letztendlich zu positiven Ergebnissen großer Allgemeinheit führen kann → Interpretation unklar
- kooperative Methode philosophischer Untersuchung
- Aristoteles verallgemeinert den Begriff: Schließen von Prämissen mit unbekanntem Wahrheitswert

PLATO UND DIE PHILOSOPHIE DER LOGIK

Plato behandelte indirekt drei wichtige Fragen:

1. Was kann wahr oder falsch genannt werden?
2. Was ist eine gültige Ableitung?
3. Was ist eine Definition und was kann definiert werden?

PLATO UND DIE PHILOSOPHIE DER LOGIK

Was kann wahr oder falsch genannt werden?

- wird behandelt in „Theaetetus“ bei dem Versuch, „Wissen“ zu definieren
 - Wissen = wahre Meinung
 - Meinung wird gebildet durch einen Dialog, der nicht mit einer anderen Person, sondern mit sich selbst geführt wird
 - ähnlich: Gedanke = interne Sprache (in „Sophist“)
- welchen Dingen ordnet Plato die Attribute wahr und falsch zu?
 - den Sätzen selbst
 - den Gedanken, die in Personen auftreten, wenn ein Satz gebildet oder benutzt wird (Urteil)

PLATO UND DIE PHILOSOPHIE DER LOGIK

Was ist eine gültige Ableitung?

- hängt von Antwort auf erste Frage ab:
 - Sätze: gültige Ableitungen sind notwendige Verbindungen zwischen Sätzen (syntaktisch?)
 - Gedanken: gültige Ableitungen sind notwendige Verbindungen zwischen Gedanken — gibt es das?

Platos Theorie der Formen

- notwendige Verbindungen existieren nur zwischen „Formen“, korrektes Schließen ist Verfolgen von Verbindungen zwischen Formen
- „Formen sind weder Dinge noch Ideen“
- Form = Menge von Eigenschaften die einer Anzahl von Dingen gemeinsam ist
- aber: Formen existieren unabhängig von bestimmten Dingen
→ Interpretation unklar

PLATO UND DIE PHILOSOPHIE DER LOGIK

Was ist eine Definition und was kann definiert werden?

- in vielen Dialogen Platos werden Definitionen gesucht
- Plato sah Definitionen nicht als willkürlichen Abkürzungen
- der Inhalt einer wahren Definition ist naturgegeben und wird nicht nur vom Sprachgebrauch bestimmt
- Plato war bewusst, dass der sprachliche Aspekt einer Definition willkürlich ist → Definition bezieht sich auf das was ein Wort bezeichnet, nicht auf das Wort selbst

PROBLEME DER ANTIKEN LOGIK

Sophismen

„Was Theodoros tut, ohne dafür eines Unrechtes geziehen zu werden, das kann auch Hipparchia tun, ohne dabei eines Unrechtes geziehen zu werden; Theodoros aber tut nicht unrecht, wenn er sich selbst schlägt, also tut auch Hipparchia nicht unrecht, wenn sie den Theodoros schlägt.“

(Diogenes Laërtios, Leben und Meinungen berühmter Philosophen, VI 96-98).

Paradoxien

„Diese Aussage ist falsch.“

(Eubulides)

REFERENZEN

Weitere Informationen zur Entwicklung von Mathematik und Logik

- The MacTutor History of Mathematics archive
`www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/`
- Eric Weissteins's World of Mathematics
`mathworld.wolfram.com`
- Stanford Encyclopedia of Philosophy
`plato.stanford.edu`
- The Internet Encyclopedia of Philosophy
`www.utm.edu/research/iep/`