

Logik nach der Renaissance III

Die Logik des Bernard Bolzano

von
Nuria Brede

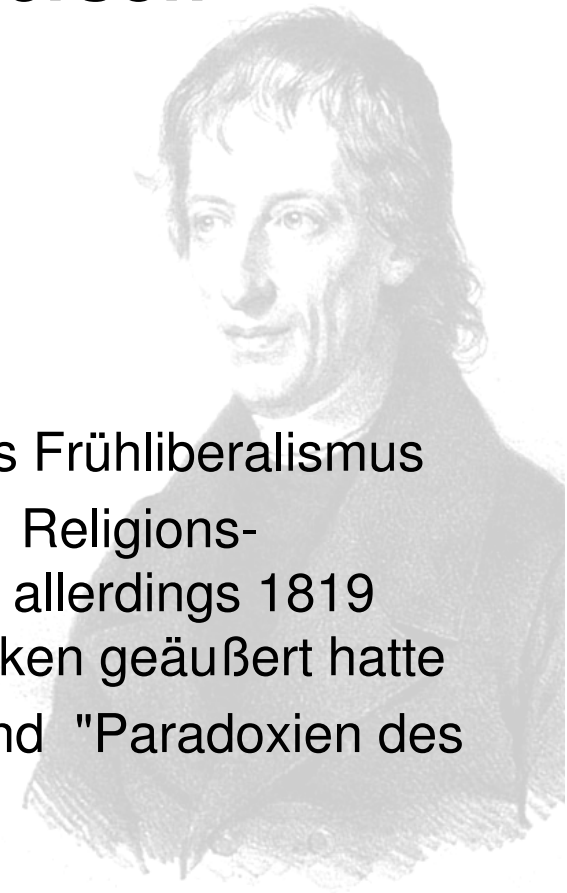
Proseminar Logik
WS 2003/04

Gliederung

- Einführung
 - *Exkurs: Kant*
 - **Die Logik Bolzanos**
 - Fazit
 - Quellen
-

Bernard Bolzano - zur Person

- * 05.10.1781 - † 18.12.1848 in Prag
- österreichischer Religionsphilosoph, Mathematiker und Erkenntnistheoretiker des Frühliberalismus
- War katholischer Priester und Professor für Religions-Philosophie an der Universität Prag, wurde allerdings 1819 entlassen, weil er liberale politische Gedanken geäußert hatte
- Hauptwerke "Wissenschaftslehre" (1837) und "Paradoxien des Unendlichen" (posthum)



Bolzanos Einflüsse

- Referenzen in "Wissenschaftslehre" deuten auf genauere Kenntnisse sowohl antiker Autoren wie *Sextus Empiricus* als auch moderner Vertreter ab *Descartes* hin
- Trotz Verweisen auf *Thomas von Aquin* und *Savonarola* offenbar weniger durch mittelalterliche Gedanken zur Logik beeinflusst
- Große Bewunderung für *Leibniz*, Titel "Wissenschaftslehre" scheint eine Verbindung der mittelalterlichen Auffassung von Logik als "*ars artium*" mit *Leibniz* "*scientia generalis*" herzustellen

Bolzano und Kant

- Zur Zeit Bolzanos war *Kants* idealistische Transzendental-Philosophie vorherrschend
- In vielen Punkten ist Bolzanos Arbeit im Dialog zu *Kants* Theorien zu sehen, seine Philosophie "vor-kritisch" (bezogen auf *Kants* "Kritik der reinen Vernunft")
- Während *Kant* **logischen und noetischen Subjektivismus** und eine Lehre der Anschauung vertritt, steht Bolzano auf einem strikt **ahistorischen** Standpunkt von unveränderlichen Wahrheiten; ist der Meinung, daß ein wahrer Satz **unabhängig von der Anschauung der Zeit** unveränderlich wahr ist

Exkurs: Immanuel Kant

- * 1724 - † 1804, dt. Philosoph, Mathematiker und Theologe
- Hält alle Neuerungen in der Logik seit Aristoteles für unerheblich (Logik als vollendete Wissenschaft)
- Allgemeines Wissen existiert in der Form von **analytischen und synthetischen Urteilen**
- **Analytische Urteile** sind so definiert, daß das **Prädikat bereits im Subjekt enthalten** ist; sie sind **a priori** und enthalten strenggenommen kein neues Wissen
- Bei **synthetischen Urteilen** **enthält das Subjekt das Prädikat noch nicht**; **a posteriori** beruhen diese somit auf Sinneserfahrungen
- **Synthetische Urteile a priori** sind für Kant auch möglich: sie beruhen auf **reiner Verstandeserkenntnis**

Grundgedanken Bolzanos

- Logik als übergeordnete Wissenschaft(slehre), die dazu dient, das gesamte Spektrum der Wahrheit in einzelne Wissenschaften aufzuteilen
- Logik ist von Psychologie und Rhetorik zu trennen
- Die **Möglichkeit** einerseits und **Erkenntnisvermögen** von Wahrheiten andererseits dürfen nicht verwechselt werden
- Trotzdem muß die Logik auch in Betracht ziehen, **wie man zu Wissen kommt** - sie kann nicht nur aus analytischen Wahrheiten im *Kant'schen* Sinne bestehen
- In gewissem Sinne ist Logik auch formal, da sie mit Formen von Schlüssen zu tun hat; dennoch ist es wichtig, Unterschiede wie **a priori** und **a posteriori** (im *Kant'schen* Sinn) zu beachten

Sätze-an-sich

- Definition Wissenschaft: Eine **Wissenschaft** „im objektiven Sinn“ ist die **Summe objektiver Wahrheiten**, wobei diese Wahrheiten zumindest einem Menschen bekannt sein müssen
- Dennoch hängen Wahrheiten nicht davon ab, den Menschen bekannt zu sein - sinnvoller ist es anzunehmen, daß die meisten Wahrheiten ausschließlich Gott bekannt sind
- Eine objektive Wahrheit ist ein wahrer **Satz-an-sich**, also ein wahrer Inhalt eines Satzes: **etwas Denk- oder Ausdrückbares, das aber nicht notwendigerweise tatsächlich gedacht oder ausgedrückt wird**
- Bei Bolzano werden **Sätze-an-sich** im selben Sinn verwandt wie implizit von früheren Logikern „Frage“, "Theorem", "Dogma" etc. in speziellen Kontexten

Wahrheiten-an-sich

- Definition: **Wahre Sätze-an-sich sind Wahrheiten-an-sich**
- Es existieren unendlich viele Wahrheiten-an-sich, von denen auch unendlich viele den Menschen bekannt sind
- Induktiver Beweis für die Unendlichkeit der Menge der Wahrheiten-an-sich:
 - Angenommen, es gäbe ausschließlich falsche Sätze, so müsste doch es zumindest eine Wahrheit geben, nämlich:
(1) **Alle Sätze sind falsch.**
 - Wenn es n Wahrheiten gibt, so gibt es auch $n+1$ Wahrheiten:
(2) **Es gibt n Wahrheiten.**
 - Wenn es n Wahrheiten gibt, dann ist Satz (2) die $(n+1)$ te Wahrheit und die ursprüngliche Annahme führt zum Widerspruch!

Wirkliches Dasein

- „**Existenz**“ oder „**Dasein**“ muss als **richtiges Attribut** beschrieben werden, obwohl dieses Attribut wiederum **einfach und undefinierbar** ist
- Sätze haben kein **wirkliches Dasein**, sie existieren nicht in Raum oder Zeit
- In Bolzanos Worten: „... Sie sind nicht solches, das in irgend einem Orte, oder zu irgend einer Zeit, der auf sonst einer Art als Wirkliches bestände.“

Vorstellungen-an-sich

- Sätze-an-sich sollen sich aus **Vorstellungen-an-sich** zusammensetzen
- Anlehnung an *Leibniz*‘ Begriff von **Ideen**, die sich bei **Änderungen unserer Mentalität nicht verändern**
- Wie **Universalien** im Mittelalter, wobei Bolzano mit den *Nominalisten* übereinstimmt, dass sie **nicht existent** sind, und mit den *Realisten*, dass sie **nicht reine Namen** sind
- Also sind **Vorstellungen-an-sich** frei von jeglicher Erfahrung oder **Subjektivität**

Beispiel zu Vorstellungen-an-sich

- Beispielsatz:
 - Sokrates war ein griechischer Philosoph.
- Sieht das Subjekt eines Satzes – hier also Sokrates – losgelöst von der realen Person als zeitloses Wesen
- Eine Proposition wird also aus zeitlosen Konstituenten zusammengesetzt

Eigenschaften & Verhältnisse

- Definiert **Verhältnis** als Beschaffenheit eines Ganzen, dessen Teile diese Beschaffenheit nicht haben, obwohl jeder von ihnen die **äußere Beschaffenheit** besitzt, im **Verhältnis** zu den jeweils anderen Teilen zu stehen
- Eine **Eigenschaft** dagegen ist eine **innere Beschaffenheit**, die in keiner Weise ein Verhältnis mit einbezieht
- Unterscheidung von **Gegenseitigkeit** und **Einseitigkeit** eines Verhältnisses
- Vorstellungen, die eine innere Beschaffenheit vorstellen, werden Eigenschaftsvorstellungen genannt; diejenige, die sich auf eine äußere beziehen dagegen Verhältnisvorstellungen

Umfang

- Den **Umfang** oder das Gebiet einer Vorstellung erhält man, wenn man die **vorgestellten Gegenstände im Einzelnen angibt**
- Nur Vorstellungen, die nicht gegenstandslos sind, haben einen Umfang
- Gedanken zum Verhältnis von allgemeinen Ideen zueinander im Hinblick auf ihren Umfang illustriert Bolzano anschaulich mit Diagrammen und Beweisen

Verhältnisse im Hinblick auf Umfang

- Bsp. : (einer von Bolzanos Beweisen zu dieser Thematik)
 - Seien A und B zwei verkettete Ideen. Dann sind NICHT-A und NICHT-B ebenfalls verkettet, falls A und B zusammen nicht den weitesten denkbaren Umfang einnehmen und folgendes gilt:
 - (i) es gibt etwas, das sowohl unter NICHT-A als auch unter NICHT-B fällt
 - (ii) es gibt etwas, das unter NICHT-A fällt, aber nicht unter NICHT-B
 - (iii) es gibt etwas, das unter NICHT-B fällt, aber nicht unter NICHT-A
-

Umfang & Inhalt

- Widerspricht der Definition aus *Port Royal Logic*: Dort war **Inhalt** einer Idee **die Menge von Eigenschaften, die notwendigerweise Alles, was unter diese Idee fällt, besitzen muss**
- Kritisiert, dass seitdem die Begriffe **Inhalt** und **Umfang** als in verkehrtem Verhältnis zueinander stehend angesehen worden seien (also dass der Umfang einer Vorstellung abnimmt, wenn ihr Inhalt zunimmt und umgekehrt)
- Für Bolzano ist der **Inhalt** **die Menge der Begriffe, die zur Spezifizierung der Idee benötigt werden**
- Die Größe des Umfangs einer Vorstellung ergibt sich aus der Zahl der Gegenstände dieser Vorstellung

Beispiel zu Umfang & Inhalt

(1) Der Mann, der alle europäischen Sprachen spricht.

(2) Der Mann, der alle lebenden europäischen Sprachen spricht.

- Idee (2) hat nach Bolzano sowohl den größeren **Inhalt** als auch den größeren **Umfang** als (1)

Klassen von Propositionen

- Eine **Klasse** von Sätzen setzt sich zusammen durch Sätze, die sich **aus einem gegebenen Satz durch Ersetzung einer oder mehrerer Konstituenten** bilden lassen
- Sofern **alle einer Klasse angehörenden Sätze wahr sind** (oder zumindest diejenigen, die **gegenständlich** sind, weil sie von realen Objekten handeln), **ist der ursprünglich gegebene Satz allgemein- oder vollgültig in Bezug auf die Konstituenten, die ersetzt werden können**
- Analog dazu ein **allgemein oder durchaus ungültiger** Satz
- Falls sich durch Ersetzung einige wahre, aber auch falsche Aussagen ergeben, so hat der ursprüngliche Satz einen **Zwischengrad von Gültigkeit**, der dem **Verhältnis wahrer und falscher Aussagen in der Klasse** entspricht

Analytische & Synthetische Sätze

- Ist eine Proposition (bzw. ein Satz) **allgemein gültig** oder **allgemein ungültig**, so ist diese **analytisch im Hinblick auf die ersetzbaren Konstituenten**
- Ansonsten ist ein Satz **synthetisch** (falls sich nicht ausschließlich wahre bzw. falsche Aussagen durch Ersetzung bilden lassen)
- Definition weiter gefasst als bei *Kant*
- Überlegt deshalb, ob es sinnvoll wäre, einen **analytischen Satz**, dessen **invarianter Teil ausschließlich logische Vorstellungen enthält**, **logisch analytisch** oder **analytisch im engeren Sinne** zu nennen, denkt aber nicht, dass man eine klare Linie zwischen logischen und nicht-logischen Vorstellungen ziehen kann

Beispiel: analytisch vs. synthetisch

- Der Mensch Caius ist sterblich.
 - Ist vollgültig, wenn nur die Konstituente Caius ersetzbar ist
- Ein Dreieck enthält zwei rechte Winkel.
 - Ist synthetisch, da dieser Satz keine Konstituente enthält, aus deren Ersetzung sich ausschließlich wahre oder ausschließlich falsche Sätze ergeben
- Wichtigste Erkenntnis hinsichtlich der Unterscheidung analytisch / synthetisch: **Bestimmte Eigenschaften von Sätzen hängen von von ihrer Struktur ab.**

Verträglichkeit von Sätzen

- Gibt es unter den Konstituenten der verschiedenen Sätzen einer Gruppe solche, die in der gesamten Gruppe ersetzt werden können, so dass man ausschließlich wahre Sätze erhält - dann sind die ursprünglichen Sätze der Gruppe **verträglich**, sonst **unverträglich** im Hinblick auf jene Konstituenten.
- Ein **möglicher** Satz ist **verträglich mit allen Begriffswahrheiten** (reine, generelle Wahrheiten)
- Eine **notwendige** Wahrheit ist dadurch definiert, daß ihre **Negation unverträglich mit allen Begriffswahrheiten** ist

Ableitbarkeit

- Die Sätze M,N,O,... heißen **ableitbar** von den Sätzen A,B,C,D,... in in Abhängigkeit von den Konstituenten i,j,... **sofern alle Mengen von Ideen, die Mengen von wahren Sätzen erzeugen, wenn sie in A,B,C,D,... für i,j,... eingesetzt werden, dasselbe tun, wenn sie in M,N,O,... Für i,j,... eingesetzt werden**
- Ableitbarkeit als Relation kann auch zwischen falschen Propositionen bestehen (etwas andere Vorstellung von Ableitbarkeit als sie heute vorherrscht)
- Ableitbarkeit ist ein Spezialfall von Verträglichkeit
- Kein Satz kann seine eigene Negation als Konsequenz haben (These von *Aristoteles*, die Bolzano verteidigt)

Ableitbarkeit (2)

- Kein Satz, es sei denn er ist universell wahr, kann ableitbar sowohl aus einem Satz als auch dessen Negation sein
 - Falls ein Satz Konsequenz der Prämissen A, B, C, D, \dots, X und auch der Prämissen $A, B, C, D, \dots, \text{NICHT-}X$ ist, so folgt er allein aus A, B, C, D, \dots
- Die Relation **Ableitbarkeit** ist transitiv
 - Wenn M ableitbar ist aus A, B, C, D, \dots . Dann ist $\text{NICHT-}A$ ableitbar aus $B, C, D, \dots, \text{NICHT-}M$
- Folgt ein Satz **aus einer Menge von Sätzen, aber nicht aus irgendeiner Untermenge dieser Menge**, dann heißt diese Relation **exakt ableitbar**; weder die Konsequenz noch eine der Prämissen können in diesem Fall universell gültig sein

Ableitbarkeit (3)

- Notation für ableitbar-aus:

$$\frac{A,B,C,D,\dots}{M}$$

- Weitere Theoreme:

$$- \frac{A,B,C,D,E,F,G,\dots}{M} \quad \rightarrow \quad \frac{A,B,C,D,\dots}{\text{Falls } E,F,G, \dots \text{ Dann } M}$$

$$\text{Aus } \frac{A,B,C,D,\dots}{M} \text{ und } \frac{H,J,K,\dots}{\text{NICHT-M}} \text{ folgt } \frac{A,B,C,D,\dots}{\text{NICHT}(H \text{ und } J \text{ und } K \dots)}$$

Schema eines Satzes

- Jede These muss aus **Unterlage**, **Aussageteil** und **Bindeglied** bestehen
- Dabei ist die Unterlage die **Beschaffenheit**, die in der Sprache durch ein abstraktes Nomen repräsentiert wird und das Bindeglied ist **haben**
- Bsp.:
 - Gott existiert. = Gott hat Existenz.
 - Sokrates war weise. = Sokrates-in-Vergangenheit hat Weisheit.

Fazit

- Zwar gehört Bolzanos logisches Werk zu den interessantesten seiner Zeit, dennoch war er nicht sehr einflussreich
- Wie Leibniz war er seiner Zeit voraus, war bemüht um mathematische Formalisierung und nahm z.B. Grundlagen der modernen Logik wie logische Folgerungen vorweg
- Mit Verträglichkeit und Ableitbarkeit von Sätzen Wegbereiter der axiomatischen Logik
- Erst im 20. Jahrhundert wurden seine Entwürfe zur Logik wieder aufgegriffen (während seine Bedeutung als Mathematiker schon wesentlich früher bekannt war)

Quellen

- Kneale, William & Martha: The Development of Logic
- Bolzano, Bernard: Wissenschaftslehre
- Daněš, Jaromír: Weiterentwicklung der Leibnizschen Logik bei Bolzano

- www.philosophenlexikon.de
- www.phillex.de
- www.bautz.de/bbkl/