Formale Entwicklungen nach Frege
ergänzendes Material

Peter Keller

2. Januar 2004

Einleitung

Die nachfolgenden Axiome und Regeln sind als Ergänzung des Vortrags „Formale Entwicklungen nach Frege“ gedacht und werden in den Folien an geeigneter Stelle durch den Vortragenden erwähnt. Aufgrund der Fülle an Entwicklungen ist es nicht möglich alle Axiome und Regeln im Detail zu erläutern und für das Verständnis des Vortrages ist dies auch nicht notwendig.
Dieses Dokument ist daher eher als eine Art Aufzählung der Axiome zu verstehen und dient allein eher der Anschauung als dem Verständnis.
Weiterführende Erläuterungen sind z.B. in „Grundzüge der theoretischen Logik“ von Hilbert und Ackermann zu finden. Genauere Angaben zu den einzelnen Axiomen und den damit verbundenen Systemen können den entsprechenden Arbeiten der Mathematiker entnommen werden.

Peter Keller

Erste Abkürzungen und Quantoren:

$(x)F(x)$ – für alle x gilt $F(x)$
$(\exists x)F(x)$ – es existiert ein x, sodass $F(x)$ gilt
$(\hat{x}F(x)$ – die Klasse, die $F(x)$ erfüllt
$(\iota x)F(x)$ – Das einzige x, das $F(x)$ erfüllt

Übersicht über verschiedene Zeichen und Abkürzungen

	Peano-Russel	Hilbert	Variants	Lukasiewicz
Negation	$\sim P$	$\bar{P}$	$-P, \neg P$	Np
Konjunktion	$P.Q$	$P\&Q$	$PQ, P \wedge Q$	Kpq
Disjunktion	$P \vee Q$	$P \vee Q$	PQ	Apq
Implikation	$P \supset Q$	$P \to Q$		Cpq
Äquivalenz	$P \equiv Q$	$P \sim Q$	$P \leftrightarrow Q$	Epq
Allquantor	$(x)F(x)$	$(x)F(x)$	$\forall x F(x), \vee x F(x)$	$\Pi x \Phi x$
Existenzquantor	$(\exists x)F(x)$	$(Ex)F(x)$	$\exists x F(x), \vee x F(x)$	$\Sigma x \Phi x$

Gleichungen von Schönfinkel:

Axiome:

(1) $Ix = x$

(2) $Cxy = x$

(3) $Tfxy = fyx$

(4) $Z(fg)x = f(gx)$

(5) $Sfgx = fx(gx)$

zusätzliche mögliche Umformungen (werden in der Analyse von Mustern in natürlichen Sprachen verwendet)

$I = SCC$
$Z = S(CS)C$
$T = S(ZZS)(CC)$
$Ufg = fx \,|^x\, gx$

$Dfx = fxx \cong D = SCC(CI) = SS(C(SCC))$

moderne Schreibweise von Freges Axiomen:

Axiome:

(1) $p \supset (q \supset p)$

(2) $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$

(3) $[p \supset (q \supset r)] \supset [(q \supset (p \supset r)]$

(4) $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$

(5) $\sim\sim p \supset p$

(6) $p \supset \sim\sim p$

(7) $(x)f(x) \supset f(y)$

Ableitungsregeln:

(i) Austauschregel

(ii) $\frac{P \qquad\qquad P \supset Q}{Q}$

(iii) $\frac{F(x)}{(x)F(x)}$

(iv) $\frac{P \supset F(x)}{P \supset (x)F(x)}$ falls x nicht frei in P ist

mögliche Ersetzungen einzelner Axiome:

Das dritte Axiom ist redundant und die letzten drei Axiome können durch

$$(\sim p \supset \sim q) \supset (q \supset p)$$

ersetzt werden.
Weiterhin können auch alle Axiome ersetzt werden durch:

(I) $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$

(II) $(\sim p \supset p) \supset p$

(III) $(p \supset (\sim p \supset q))$

Die Axiome von Whitehead und Russel

Axiome:

(1) $(p \vee p) \supset p$

(2) $q \supset (p \vee q)$

(3) $(p \vee q) \supset (q \vee p)$

(4) $[p \vee (q \vee r)] \supset [q \vee (p \vee r)]$

(5) $(q \vee r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$

Nach Bernays ist Axiom 4 ebenfalls redundant.

Scheffer-Pierce-Axiome

Axiom:

$$[p \mid (q \mid r)] \mid ([t \mid (r \mid t)] \mid \{(s \mid q) \mid [(p \mid s) \mid (p \mid s)]\})$$

Ableitungsregel:

$$\frac{P \qquad P \mid (Q \mid R)}{R}$$

Nach Nicod ist dieses Ableitungsschema ausreichend.

Axiome von Hilbert und Bernays

Axiome:

I (1) $p \supset (q \supset p)$
(2) $[p \supset (p \supset q)] \supset (p \supset q)$
(3) $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$

II (1) $p.q \supset p$
(2) $p.q \supset q$
(3) $(p \supset q) \supset [(p \supset r) \supset (p \supset q.r)]$

III (1) $p \supset p \vee q$
(2) $q \supset p \vee q$
(3) $(p \supset r) \supset [(q \supset r) \supset (p \vee q \supset r)]$

IV (1) $(p \equiv q) \supset (p \supset q)$
(2) $(p \equiv q) \supset (q \supset p)$

(3) $(p \supset q) \supset [(q \supset p) \supset (p \equiv q)]$

V (1) $(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$

(2) $(p \supset \sim\sim p)$

(3) $(\sim\sim p \supset p)$

wobei $I(1)$,$V(1)$ und $V(3)$ von Frege stammen, $I(3)$ von Lukasiewicz und $III(2)$ aus „principia Mathematica„

natürliche Deduktion und Entwicklung - Gentzen

Ableitungsregeln

(1) $\frac{P \quad Q}{P.Q}$

(2) (a) $\frac{P.Q}{P}$

(b) $\frac{P.Q}{Q}$

(3) (a) $\frac{P}{P \vee Q}$

(b) $\frac{Q}{P \vee Q}$

(4) $\frac{P \vee Q \quad P|R \quad Q|R}{R}$

(5) $\frac{P|\dagger}{\sim P}$

(6) (a) $\frac{P \quad \sim P}{\dagger}$

(b) $\frac{\sim\sim P}{P}$

(7) $\frac{P|Q}{P \supset Q}$

(8) $\frac{P \quad P \supset Q}{Q}$

(9) $\frac{Fx}{(x)Fx}$

(10) $\frac{(x)Fx}{F\Upsilon}$

(11) $\frac{FY}{(\exists)Fx}$

(12) $\frac{(\exists)Fx \quad Fx(P)}{P}$

„†“ bezeichnet das Absurde, das Unmögliche. Die Komplexität der Axiome resultiert aus der Tatsache, dass eine Ableitung mehrere Ursachen aber nur eine Folge haben kann.

Entwicklungen

Ableitungsregeln:

(1) $\frac{P \quad Q}{P.Q}$

(2) (a) $\frac{P.Q}{P}$

(b) $\frac{P.Q}{Q}$

(3) (a) $\frac{P}{P \vee Q}$

(b) $\frac{Q}{P \vee Q}$

(4) $\frac{P \vee Q}{P \quad Q}$

(5) $\frac{*}{P \quad \sim P}$

(6) $\frac{P \quad \sim P}{*}$

(7) (a) $\frac{*}{P \quad P \supset Q}$

(b) $\frac{Q}{P \supset Q}$

(8) $\frac{P \quad P \supset Q}{Q}$

(9) $\frac{\{Fx\}}{(x)Fx}$

(10) $\frac{(x)Fx}{F\Upsilon}$

(11) $\frac{F\Upsilon}{(\exists x)Fx}$

(12) $\frac{(\exists x)Fx}{\{Fx\}}$

„*“ bezeichnet einen Ausdruck, der beliebig gewählt werden kann.

modale Logik

Axiome

B1 $p.q \prec q.p$

B2 $p.q \prec p$

B3 $p \prec p.q$

B4 $(p.q).r \prec p.(q.r)$

B5 $p \prec \sim\sim p$

B6 $[(p \prec q).(q \prec r)] \prec (p \prec r)$

B7 $[p.(p \prec q)] \prec q$

B8 $\Diamond(p.q) \prec \Diamond p$

B9 $(\exists p, q)[\sim (p \prec q). \sim (p \prec \sim q)]$

„$\Diamond$“ bezeichnet das Undefinierte, man könnte sagen: „es ist möglich, dass...“. Weiterhin steht „$P \prec Q$“ als Abkürzung für „$\sim \Diamond(P. \sim Q)$“

mehrwertige Logik

Mit der Definition von mehrwertigen Logiken können entsprechende Operationen anhand von Wahrheitswertetabellen definiert werden. Ist die Anzahl der möglichen Werte für eine Aussage unendlich (wie es z.B. von von Neumann vorgeschlagen wird) und die möglichen Werte im Intervall [0;1], so lassen sich Negation und Implikation ähnlich wie in der Stochastik definieren:

$$[\sim P] = 1 - [P]$$
$$[P \supset Q] = 1 \ f\ddot{u}r \ [P] \leq [Q]$$
$$[P \supset Q] = 1 - [P] + [Q] \ f\ddot{u}r \ [Q] < [P]$$

Die scheinbare Ähnlichkeit zur Stochastik war die Begründung für den Versuch der Weiterentwicklung, allerdings ergeben sich für „$\Diamond$“ Werte, die nicht in die Theorie der Wahrscheinlichkeit passen. So ist:

$$[\Diamond P] = 1 \ f\ddot{u}r \ [P] \geq \frac{1}{2}$$

und

$$[\Diamond P] = 2[P] \ f\ddot{u}r \ [P] < \frac{1}{2}.$$

Satz von Tarski

A. Tarski zeigte[1] , dass jedes System, das

S1 $p \supset \sim\sim p$

S2 $q \supset (p \supset q)$

S3 $\sim p \supset (p \supset q)$

S4 $p \supset [\sim q \supset \sim (p \supset q)]$

erfüllt und in sich widerspruchsfrei ist, nur eine mögliche konsistente und widerspruchsfreie Vervollständigung erfahren kann, nämlich die der gewöhnlichen zweiwertigen Logik.

[1] in „Über Erweiterungen der unvollständigen Systeme des Aussagenkalküls“