# Die Philosophie der Mathematik nach Frege

1. Entwicklung nach Frege
2. Russells Theory of Logical Types
3. The Intuitionism of Brouwer
4. Hilbert’s Programme of Metamathematics
5. Quellen

# 1. Entwicklung nach Frege

- CANTOR fand heraus, dass seine Mengenlehre (Theory of sets) eine Widersprüchlichkeit enthält:

- 1899 fand er das entscheidende Paradox:
  - man nehme an, S ist die Menge aller Mengen,
  - nach seiner eigenen Theorie folgt:
  - $\overline{\overline{US}} > \overline{\overline{S}}$
  - da US aber eine Menge von Mengen ist, (nämlich die Menge aller Untermengen von S) muss es Teilmenge der Menge aller Mengen sein,
  - was dann bedeutet: $\overline{\overline{US}} < \overline{\overline{S}}$
  - Widerspruch! → Theorie funktioniert nicht

- BERTRAND RUSSELL wies FREGE auf einen weiteren Widerspruch in seinen Axiomen hin:
  - Etwas gehört zu einer Klasse, wenn es die Eigenschaften besitzt, welche die Elemente dieser Klasse ausmachen
  - Wir nehmen die Eigenschaft: „Klasse welche nicht zu sich selbst gehört“
  - Alle Elemente mit dieser Eigenschaft formen die Klasse: „Klasse, der Klassen, welche nicht zu sich selbst gehören“
  - Diese Klasse heißt K
  - 1: Wir nehmen an, die Klasse K gehört zu sich selbst:
    - Also hat sie die Eigenschaften der Klasse, dessen Element sie ist.
    - Sprich: Sie gehört zur Klasse, dessen Eigenschaft es ist, nicht zu sich selbst zu gehören → Widerspruch

  - 2: Wir nehmen an, die Klasse K gehört nicht zu sich selbst:
    - dann hat sie die Eigenschaft, der Klasse K, welche sie selbst ist, also gehört sie doch zu sich selbst
    - das ergibt einen weiteren Widerspruch!

- Um dieses Dilemma zu lösen, nahm FREGE zu erst an, dass es Eigenschaften gibt, zu denen sich keine dazugehörigen Klassen finden lassen

- Damit löst sich obiges Dilemma, da sich keine Klasse findet zur Eigenschaft: „Klasse, die nicht zu sich selbst gehört"

- Frege war damit nicht ganz zufrieden, weitere Lösung:
  - Er modifizierte sein 5. Axiom

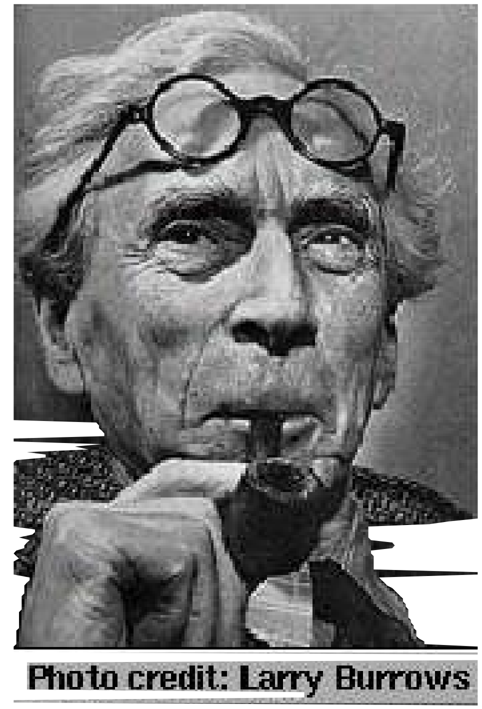
  - “Two concepts should be said to have the same extension if, and only if, every object which fell under the first *but was not itself the extension of the first* fell likewise under the second and vice versa”

  - RUSSELL und spätere Logiker merkten jedoch, dass auch diese Modifikation nicht genug half um dem Problem zu entgehen

- Es fanden sich weitere, die Widersprüche in den Theorien RUSSELLs und FREGEs fanden, deshalb stellte RUSSELL eine neue Theorie auf, „Russells Theory of Logical Types“

## 2. Russells Theory of Logical Types

- 18.05.1872 – 02.02.1970




- unterrichtete am Trinity College in Cambridge
- einer seiner Schüler war Wittgenstein
- wollte Grundlagen der Mathematik nach logischen Prinzipien herleiten

- Aussagefunktionen müssen in Typen klassifiziert werden, bezogen auf die Entitäten welche sie als Argumente zulassen

- Hierarchie der Entitäten:
    - Männer sind Individuen (Entität 0)
    - Weisheit, weise sein (Entität 1)
    - Kardinaltugend (kann von Weißheit behauptet werden) (Entität 2)

→ jedes Attribut ist von einem höheren Typen als die Entität von der es behauptet oder verneint werden kann

- Russell nimmt an, dass die Attribute immer vom <u>nächst</u> höheren Level sein müssen

- Er behauptet, dass Entitäten universell austauschbar sind (was von einem behauptet werden kann, kann auch von allen anderen behauptet werden)

- Stellt später fest, dass es besser ist von Typen von Symbolen, statt von Typen von Entitäten zu sprechen

## 3. The Intuitionism of Brouwer

- 27.02.1881 – 02.12.1966

- war Mitglied von: Royal Dutch Academy of Sciences, the Royal Society in London, die Preußische Akademie der Wissenschaften in Berlin, und der Akademie der Wissenschaften in Göttingen

- Brouwer erhielt Ehrendoktortitel von den Universitäten Oslo (1929) und Cambridge (1954), wurde Ritter im Orden des holländischen Löwen (1932)

- sagt wie KANT und POINCARE, das mathematische Theoreme synthetische *a priori* Wahrheiten sind

- Bestand im Gegensatz zu FREGE, WHITEHEAD und RUSSELL darauf, dass die Arithmetik und alle anderen Arten der Mathematik durch die „Intuition“ entstehen sollten:

  - „neo-intuitionism considers the falling apart of the moments of life into qualitatively different parts, to be re-united only while remaining seperated by time, as the fundamental phenomenon of the human intellect”

- Leider stellt BROUWER nie direkt dar was er unter “Intuition” versteht, jedoch lehnt er alles ab, was mit der Idee eines tatsächlichen Unendlichem zu tun haben könnte bzw. die Existenz eines Solchen.

- **(Diskussion)**: Er bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen als „offen", ständig wachsend und niemals am Ende, man kann sie nur verstehen, wenn man ihren Aufbau versteht.

- vertritt die Ansicht, dass Mathematik und die Beweise nicht an eine bestimmte Sprache gebunden sind, speziell der Formalisierung misstraut er

- glaubt, dass ein konstruktiver Beweis eine Durchführung eines „Experimentes im Geiste" sei

- **Beispiel:** (A. HEYTING, Schüler BROUWERs)
    - 2+2=3+1 sollte gelesen werden als: „Ich untersuchte die mentalen Konstruktionen 2+2 und 3+1 und habe herausgefunden, dass sie zum gleichen Ergebnis führen.“

- ab 1918 produziert er mehrere Arbeiten die seine Ansicht verbreiteten, gegen das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten („Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch“)

- „Mathematik, welche aus der Intuition entsteht, erfordert kein logisches System, sondern dient eher als Quelle der mathematischen Prinzipien, da diese Prinzipien erst ausgedrückt werden dürfen, wenn ihre Gültigkeit durch die entsprechende Intuition gerechtfertigt ist.“

- Es existiert keine „sichere“ (math.) Sprache, welche Missverständnisse komplett vermeidet, deshalb ist es mühsam auf eine vollständige Formalisierung zu hoffen.

- HEYTING hat 1930 folgende 11 Axiome aufgestellt (BROUWER sah sie als zutreffend für die Intuitive Mathematik, dieser Zeit):
  - 1. $p \supset (p.p)$
    2. $(p.q) \supset (q.p)$
    3. $(p \supset q) \supset [(p.r) \supset (q.r)]$
    4. $[(p \supset q).(q \supset r)] \supset (p \supset r)$
    5. $q \supset (p \supset q)$
    6. $[p.(p \supset q)] \supset q$
    7. $p \supset (p \vee q)$
    8. $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
    9. $[(p \supset r).(q \supset r)] \supset [(p \vee q) \supset r]$
    10. $\neg p \supset (p \supset q)$
    11. $[(p \supset q).(p \supset \neg q)] \supset \neg p$
  - neues Symbol für die Negation: $\neg$ statt ~
  - kamen (alle) schon mal in der klassischen Logik vor

- von BROUWER abgewiesene Prinzipien können nicht erstellt werden:
  - $p \vee \neg p$ und $\neg\neg p$

- keine disjunktive Proposition zugelassen, solange nicht eine Disjunktion beweisbar ist

- GÖDEL fand heraus, dass dieses Axiomensystem durch Einführen der Zeichen $\oplus$ und $\rightarrow$, doch wieder klassische logische Axiome hat:
  - $P \oplus Q = \neg(\neg P . \neg Q)$
    $P \rightarrow Q = \neg(P . \neg Q)$

  - durch Einsetzen und Vertauschen mit HEYTINGS Axiomen, kann man alle Axiome der klassischen Logik erhalten, auch das des ausgeschlossenen Dritten: $P \oplus \neg P$ und der Eliminierung der doppelten Negation: $\neg\neg P \rightarrow P$

- das wollte BROUWER ja gerade Vermeiden

- Gödel hat damit nachgewiesen, dass BROUWER das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten, nicht eliminiert hat, sondern lediglich sagen kann, dass er es nicht anwendet, weil er es z.B. für nicht nötig erachtet.

- Gödel erkannte, dass man die HEYTING-Axiome als Abkürzung für komplizierte klassische Axiome verstehen kann:

| Heytings Ausdruck | Klassischer Ausdruck |
|---|---|
| $\neg P$ | $\Delta \sim \Delta P$ |
| $P.Q$ | $\Delta P . \Delta Q$ |
| $P \vee Q$ | $\Delta P \vee \Delta Q$ |
| $P \supset Q$ | $\Delta P \supset \Delta Q$ |

  - dabei steht $\Delta$ für „man kann demonstrieren, dass“

- Damit wird HEYTINGS System sehr ähnlich zu LEWIS' System S4, mit dem einzigen Unterschied dass hier „man kann demonstrieren, dass" statt „notwendig" verwendet wird.

- HEYTINGS System ist streng genommen gar kein „logisches System", sondern es erfordert sogar ein klassisches logisches System

- Insofern war der intuitive Weg ein Weg, der nicht zum großen Ziel, des konstruktiven Beweises, führte, sondern er musste dann immer Einschränkungen hinnehmen, wie z. B. den Ausschluss vom Prinzip des ausgeschlossenen Dritten.

## 4. Hilbert’s Programme of Metamathematics

- E. ZERMELO schlug neues Axiomensystem vor, um (CANTORs) Mengenlehre von Paradoxien zu befreien

- Er konnte nicht sicherstellen, dass es konsistent war, schloss jedoch die Widersprüche der letzten Jahre aus.

- Er erlaubt nicht mehr beliebige Mengen, nur solche, dessen Existenz durch seine Axiome belegt werden kann.

## - AXIOME:

- (I) Axiom of Definiteness: 2 Mengen sind identisch, wenn alles was Element der einen Menge, auch Element der anderen Menge ist

- (II) Axiom of Elementary Sets: Im Bereich (Domain) der Mengen existiert eine Menge, welche die leere Menge als Inhalt hat; wenn das Element A Element der Menge ist, ist auch {A} (Menge die nur aus A besteht) Element der Menge

- (III) Axiom of Subsets: Elemente der Menge M können unterschieden werden, ob sie eine gewissen Eigenschaft haben. Es existiert dann eine Teilmenge L, $L \subseteq M$, in der alle, aber nur diese Elemente sind, welche die Eigenschaft haben

- (IV) Axiom of the Power Set: enthält alle Teilmengen von S

- (V) Axiom of the Union Set: Menge S, es existiert eine Menge L, welche alle Elemente, die Elemente der Elemente der Menge S sind, enthält

- (VI) Axiom of Choice: alle Elemente der Menge S schließen sich gegenseitig aus, alle sind ungleich der leeren Menge. Dann existiert eine Teilmenge der Vereinigungsmenge welche jeweils ein Element der Elemente von S hat

- er limitierte die Mengen auf Mengen, welche nicht zu groß sind

- Bereich der Mengen darf selbst keine Menge sein

- Von Neumann ergänzte, dass die Mengen sehr groß werden dürfen. Bis zur „Menge von Allem“, die nicht Teilmenge/Element von irgendetwas sein darf

- Hilbert wollte Arithmetik nicht auf Logik reduzieren, sondern beide aufeinander aufbauen, damit sie zusammen genommen frei von Widersprüchen sind

- Glaubte an axiomatische Methode („logisch unangreifbar", „fruchtbar", „think with knowledge of what one is about", "leaves the advantages of disbelief")

- 1926 "On the Infinte":
  - Theorie des tatsächlich Unbegrenztem ("the most admirable flowering of the mathematical spirit")
  - Jedes mathematische Problem ist lösbar
  - Stimmt mit BROUWER überein über die Vormachtstellung der Intuition und des konstruktiven Arguments

- Findet Begründungen durch:
  „direct reflections on content that proceeds without axiomatic assumptions but by means of thought-experiments on objects imagined in full concreteness and by the use of mathematical induction" → sehr ähnlich zu BROUWER

- Unterschiede: klassische Mathematik mit idealen Theoremen ist unerreichbar durch „finitary methods", sollte als wertvoll bewahrt werden, wenn die Konsistenz der Axiome von denen sie abgeleitet ist durch finitary argument bewiesen werden kann

- Möchte ein System bestehend aus:
  - Theorie der Zahlen
  - Klassischer Analyse

- Mengenlehre
  - basierend auf:
    - beschränktem Kalkül der Aussagefunktionen
    - Freges Axiomen der Identität
    - Axiomen von Nummern/Zahlen (z.B. Peano)
    - Axiomen der Zugehörigkeit (Zermelo)
    - Oder gleichmächtige…

→ System sollte insgesamt konsistent sein, Einzelteile sind relativ unwichtig (z.B. ihre Abhängigkeit)

- nach Beweis der Konsistenz der Axiome der konstruktiven Methoden ließ er sich hinreißen nicht konstruktive Methoden als Weiterführung der konstruktiven Methoden zu behandeln

- die konstruktive Mathematik ermöglicht Einblicke in ein spezielles Themengebiet

- keine Garantie, dass Theoreme, welche ohne diese Einsicht erlangt werden, das selbe Themengebiet behandeln

→ Zweifel daran ob man HILBERTs Methoden konsequent anwenden kann
→ trieb die Forschung in die richtige Richtung, zu den deduktiven Systemen

## 5. Quellen

- William and Martha Kneale „Development of Logic“

- Internet:

  - http://plato.stanford.edu/entries/russell/
  - http://de.wikipedia.org/wiki/Bertrand_Russell