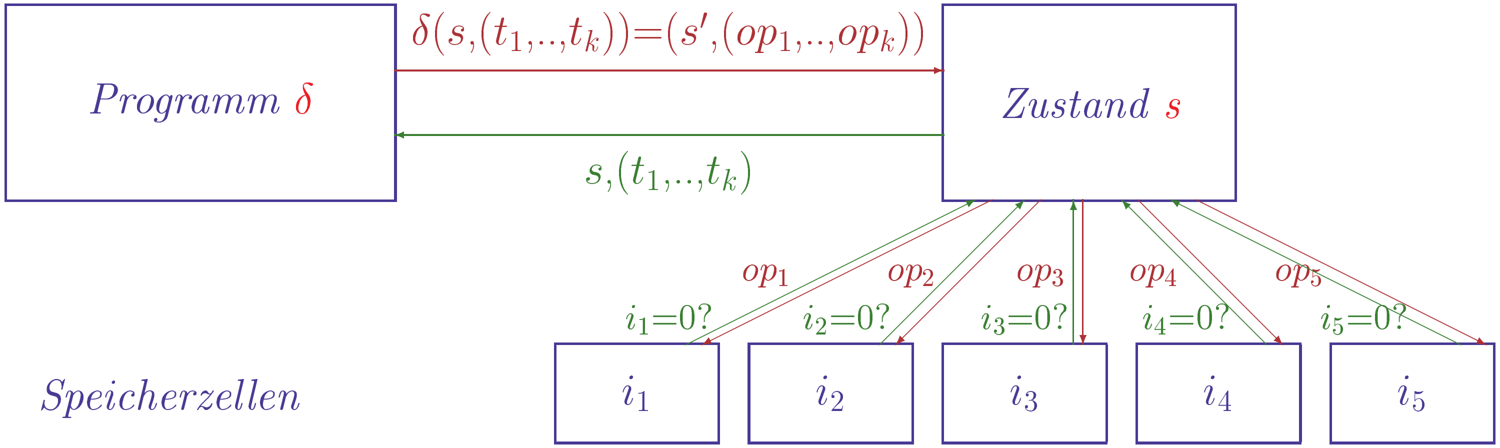
Theoretische Informatik II

Einheit 6.2

Registermaschinen

1. Arbeitsweise
2. Formale Semantik
3. Register-Berechenbarkeit
4. Programmiermethoden
5. Äquivalenz zu Turingmaschinen

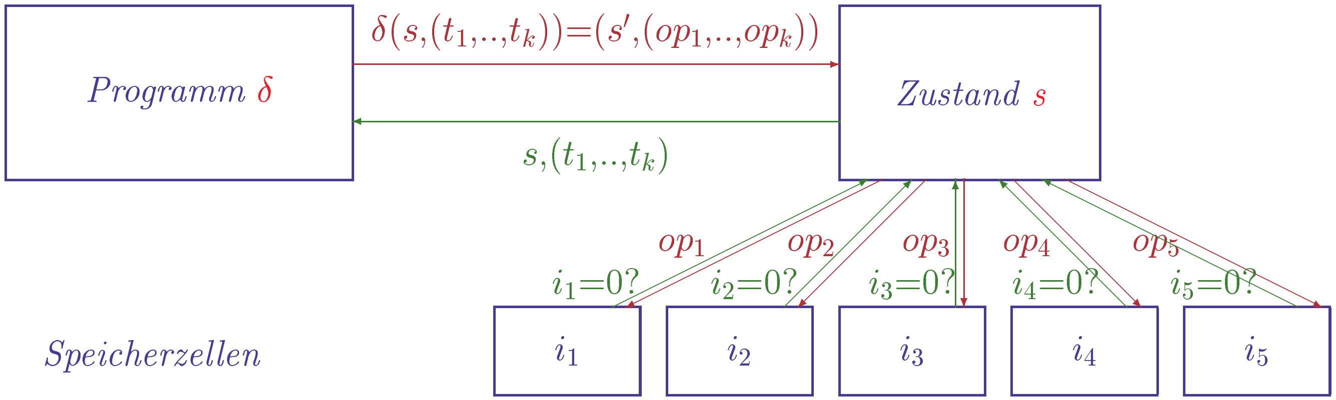


- **Standardarchitektur von Einprozessorsystemen**
  - Direkter und simultaner Speicherzugriff
  - Speicherzellen enthalten natürliche Zahlen
  - Keine Ein/Ausgabe, sehr einfacher Befehlssatz
- **Unterschiede zur Turingmaschine**
  - Endlicher Speicher, aber unendlicher Bereich für Werte von Zellen

Achtung! Modelle in Literatur oft flexibler

Registermaschinen – mathematisch

Definition F



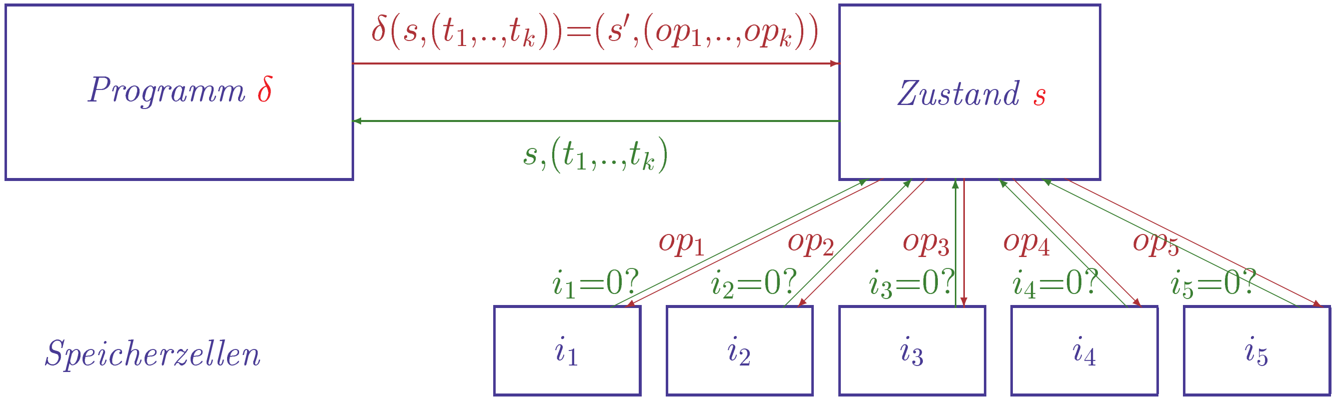
Eine **Registermaschine** ist ein 5-Tupel $\boldsymbol{\rho} = (S,\, k,\, \delta,\, s_0,\, F)$

- S nichtleere endliche Zustandsmenge
- $s_0 \in S$ Anfangszustand
- $k \in \mathbb{N}$ Anzahl der Register
- $F \subseteq S$ Menge der Endzustände
- $\delta{:}(S \backslash F) \times \{\mathtt{0,1}\}^k \to S \times \{\mathtt{-1,0,1}\}^k$ Zustandsüberführungsfunktion

Eingabe: Zustand + Testergebnisse: $t_j = \mathrm{sign}(i_j) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i_j{=}0, \\ 1 & \text{falls } i_j{>}0 \end{cases}$

Ausgabe: Zustand + Registeroperationen: op_j (Subtraktion, Identität, Addition)

Arbeitsweise von Registermaschinen



- **Anfangssituation**
  - Eingabezahl n steht im ersten Register
- **Arbeitschritt**
  - Inhalte der Register $i_1,..,i_k$ lesen und mit sign(i_j) auf Null testen
  - Zustand s und Testergebnisse $t_1,..,t_k$ als Argumente an δ geben
  - $\delta(s,(t_1,..,t_k))=(s',(op_1,..,op_k))$ bestimmen
  - Neuer Zustand s', Register j gemäß Operation op_j modifizieren
  - Stop wenn s' Endzustand ist
- **Ergebnis**
  - Inhalt des ersten Registers

Semantik von Registermaschinen

Definition G

- $K_\rho \equiv$ **Menge aller Konfigurationen** $\kappa = (s,(i_1,..,i_k))$ **von** ρ **mit**
  - $s \in S$ aktueller Zustand
  - $i_j \in \mathbb{N}$ Inhalt des Registers j
- **Anfangskonfiguration** $\alpha{:}\mathbb{N}\to K_\rho$: $\alpha(n) = (s_0,(n,0,...,0))$
- **Nachfolgekonfiguration:** $\hat{\delta}{:}K_\rho \to K_\rho$
  - Für $\kappa=(s,(i_1,..,i_k))$ mit $\delta(s,(\text{sign}(i_1),..,\text{sign}(i_k))) = (s',(op_1,..,op_k))$ ist

$$\hat{\delta}(\kappa)=(s',(i'_1,..,i'_k)),\ \text{wobei } i'_j = \begin{cases} 0 & \text{falls } i_j{=}\mathtt{0} \text{ und } op_j{=}\mathtt{-1}, \\ i_j+op_j & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Ausgabefunktion** $\omega{:}K_\rho\to\mathbb{N}$: $\omega(s, (i_1, .., i_k)) = i_1$
- **Die von** ρ **berechnete Funktion** $h_\rho{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ **ist definiert durch**

$$h_\rho(n) = \begin{cases} \omega(\hat{\delta}^m(\alpha(n))) & \text{falls } m{=}\min\{j \mid \exists s \in F.\ \hat{\delta}^j(\alpha(n)){=}(s, \_)\} \text{ existiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition H

Definitionsbereich von ρ ist $\{n \in \mathbb{N} \mid h_\rho(n) \neq \perp\}$,
Wertebereich von ρ ist $\{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ h_\rho(n){=}m\}$

Beispiele für Registermaschinen

- $\boldsymbol{\rho_1} = (\{\mathtt{s}_0, \mathtt{s}_1\},\ \mathtt{1},\ \delta_1,\ \mathtt{s}_0,\ \{\mathtt{s}_1\})$ mit $\delta_1 =$

s	t_1	s'	op_1
$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{0}$	$\mathtt{s}_1$	$\mathtt{+1}$
$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{-1}$

  Zähle Eingabewert n auf Null herunter und addiere Eins

- **Mathematische Analyse**:
  - Anfangskonfiguration: $\alpha(n) = (\mathtt{s}_0, n)$
  - Nachfolgekonfigurationen: $\hat{\delta}(\mathtt{s}_0, n) = \begin{cases} (\mathtt{s}_0, n{-}1) & \text{falls } n{>}0, \\ (\mathtt{s}_1, \mathtt{1}) & \text{falls } n{=}0 \end{cases}$
  - Terminierung: $\min\{j \mid \hat{\delta}^j(\mathtt{s}_0, n){=}(\mathtt{s}_1, \_)\} = n{+}1$
  - Ergebnis: $\hat{\delta}^{n+1}(\mathtt{s}_0, n) = (\mathtt{s}_1, \mathtt{1})$
  - Ausgabefunktion: $\omega(\mathtt{s}_1, \mathtt{1}) = \mathtt{1}$

$$\Downarrow$$

$h_{\rho_1}(n){=}\mathtt{1}$ für alle n, Definitionsbereich $\mathbb{N}$, Wertebereich $\{\mathtt{1}\}$

Beispiele für Registermaschinen II

- $\boldsymbol{\rho_2} = (\{\mathtt{s}_0, \mathtt{s}_1, \mathtt{s}_2, \mathtt{s}_3, \mathtt{s}_4\}, 2, \delta_2, \mathtt{s}_0, \{\mathtt{s}_4\})$ mit $\delta_2 =$

s	t_1	t_2	s'	op_1	op_2
$\mathtt{s}_0$	0	0	$\mathtt{s}_4$	0	0
$\mathtt{s}_0$	0	1	$\mathtt{s}_2$	0	0
$\mathtt{s}_0$	1	*	$\mathtt{s}_1$	-1	+1
$\mathtt{s}_1$	*	*	$\mathtt{s}_0$	0	+1
$\mathtt{s}_2$	*	0	$\mathtt{s}_4$	0	0
$\mathtt{s}_2$	*	1	$\mathtt{s}_3$	+1	-1
$\mathtt{s}_3$	*	*	$\mathtt{s}_2$	+1	0

- **Analyse**

$$n \xrightarrow{\alpha} (\mathrm{s}_0, n, 0)$$
$$\xrightarrow{\delta} (\mathrm{s}_1, n-1, 1) \xrightarrow{\delta} (\mathrm{s}_0, n-1, 2) \xrightarrow{\delta} \ldots \xrightarrow{\delta} (\mathrm{s}_2, 0, 2n)$$
$$\xrightarrow{\delta} (\mathrm{s}_3, 1, 2n-1) \xrightarrow{\delta} (\mathrm{s}_2, 2, 2n-1) \xrightarrow{\delta} \ldots \xrightarrow{\delta} (\mathrm{s}_4, 4n, 0)$$
$$\xrightarrow{\omega} 4n$$

$$\Downarrow$$

$\boxed{h_{\rho_2}(n) = 4n \text{ für alle } n, \text{ Definitionsbereich } \mathbb{N}, \text{ Wertebereich } \{4n \mid n \in \mathbb{N}\}}$

Register-Berechenbarkeit

Definition H

- f:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ **RM$_k$-berechenbar**
  - Es gibt eine Registermaschine $\rho = (S,\, k,\, \delta,\, s_0,\, F)$ mit $h_\rho{=}f$

- f:$\mathbb{N}^m\to\mathbb{N}^n$ **RM$_k$-berechenbar** $(k{\geq}\max(m,n))$
  - Es gibt eine Registermaschine $\rho = (S,\, k,\, \delta,\, s_0,\, F)$ mit $h_\rho{=}f$ und
    - · Anfangskonfiguration α^m:$\mathbb{N}^m\to K_\rho$: $\alpha^m(n_1,..,n_m) = (s_0,(n_1,..,n_m,0,...,0))$
    - · Ausgabefunktion ω^n:$K_\rho\to\mathbb{N}^n$: $\omega^n(s,(i_1,..,i_k)) = i_1,..,i_n$

- **$\mathcal{RM}$: Menge der Register-berechenbaren Funktionen**
  - $\mathcal{RM}_k = \{f{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N} \mid f \text{ ist RM}_k\text{-berechenbar}\}$
  - $\mathcal{RM} \quad = \bigcup\{\mathcal{RM}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$

Beispiele Register-Berechenbarer Funktionen

- **Konstante Funktion** $f_3(n) = c$
  - ρ_3 muß Register s_0 auf Null herunterzählen und dann c mal 1 addieren

$\rho_3 = (\{\mathtt{s}_0, .., \mathtt{s}_c\}, 1, \delta_3, \mathtt{s}_0, \{\mathtt{s}_c\})$ mit $\delta_3 =$

s	t_1	s'	op_1
$\mathtt{s}_0$	0	$\mathtt{s}_1$	+1
$\mathtt{s}_0$	1	$\mathtt{s}_0$	-1
$\mathtt{s}_1$	*	$\mathtt{s}_2$	+1
⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathtt{s}_{c-1}$	*	$\mathtt{s}_c$	+1

- **Addition** $f_4(n, m) = n+m$
  - ρ_4 muß Register s_1 auf Null herunterzählen und dabei s_0 hochzählen

$\rho_4 = (\{\mathtt{s}_0, \mathtt{s}_1\}, 1, \delta_4, \mathtt{s}_0, \{\mathtt{s}_1\})$ mit $\delta_4 =$

s	t_1	t_2	s'	op_1	op_2
$\mathtt{s}_0$	*	0	$\mathtt{s}_1$	0	0
$\mathtt{s}_0$	*	1	$\mathtt{s}_0$	+1	-1

- **Multiplikation** $f_5(n, m) = n*m$
  - ρ_5 muß s_1 auf Null herunterzählen und dabei jeweils s_0+n berechnen
  - n muß zuvor in Hilfsregister kopiert werden

Erweiterung des Modells für Programmierzwecke

- **Unterprogramme**
  - Umbenennung: Separate Zustände $s'_0,..s'_n$ und Register $r'_1,..,r'_k$
  - Aufruf: speichere Argumente in r'_1, springe nach s'_0
  - Rückgabe: kopiere Werte von r'_1 ins gewünschte Register, springe zum Folgezustand des Aufrufs
- **RM-Programmiersprache**

$\mathtt{r}_j$ `:=` $\mathtt{r}_j$`+1`	
$\mathtt{r}_j$ `:=` $\mathtt{r}_j \dot{-}$`1`	$i \dot{-} j = \max(i-j,0)$
$\mathtt{r}_j$ `:=` c	$(c \in \mathbb{N})$
`while` $\mathtt{r}_j$`=0 do` *op* `od`	(*op* beliebiger Befehl)

  - Jeder Befehl kann durch RM-Unterprogramme simuliert werden
- **Befehlsmacros**
  - Abkürzungen für Programmfragmente in RM-Programmiersprache

Simulation der RM-Programmiersprache

- $\mathtt{r}_j \mathtt{ := r}_j\mathtt{+1}$
  - Direkter RM Befehl
- $\mathtt{r}_j \mathtt{ := r}_j \dot{-} \mathtt{1}$
  - Direkter RM Befehl
- $\mathtt{r}_j \mathtt{ := } c$
  - Unterprogramm ähnlich zu ρ_3
- $\mathtt{while\ r}_j\mathtt{>0\ do}\ op\ \mathtt{od}$
  - Solange $r_j>0$ springe zu Startzustand von *op*
  - Am Endzustand von *op* springe zurück zum Anfang
  - Wenn $r_j=0$ gehe zum Endzustand des Befehls

$$\delta = \begin{array}{cccc|cccccc} s & \dots & t_j & \dots & s' & & \dots_1 & op_j & & \dots \\ \hline \mathtt{s} & * & 0 & * & \mathtt{s}_e & 0 & \dots & 0 & & \dots 0 \\ \mathtt{s} & * & 1 & * & \mathtt{s}_{op_0} & 0 & \dots & 0 & & \dots 0 \\ \mathtt{s}_{op_0} & & & & & & \text{--- } op \text{ ---} & & & \\ \mathtt{s}_{op_e} & * & * & * & \mathtt{s} & 0 & \dots & 0 & & \dots 0 \\ \hline \end{array}$$

Befehlsmacros I: Arithmetik

- $\texttt{r}_j \texttt{ := } \texttt{r}_i$
  – Verschiebe r_i in Hilfsregister r' und kopiere r' simultan nach r_j und r_i
  $\texttt{r}_j\texttt{:=0; r':=0;}$ $\texttt{while r}_i\texttt{>0 do r}_i\texttt{:=r}_i \dot{-} \texttt{1; r':=r'+1 od;}$
  $\texttt{while r'>0 do r':=r'} \dot{-} \texttt{1; r}_j\texttt{:=r}_j\texttt{+1; r}_i\texttt{:=r}_i\texttt{+1 od}$

- $\texttt{r}_j \texttt{ := } \texttt{r}_j\texttt{+r}_i$
  – Kopiere r_i in nach r' und zähle simultan r' herunter und r_j hoch
  $\texttt{r' := r}_i\texttt{;}$ $\texttt{while r'>0 do r':=r'} \dot{-} \texttt{1; r}_j\texttt{:=r}_j\texttt{+1 od}$

- $\texttt{r}_j \texttt{ := } \texttt{r}_j \dot{-} \texttt{r}_i$
  – Kopiere r_i nach r' und reduziere r' und r_j simultan
  $\texttt{r':=r}_i\texttt{;}$ $\texttt{while r'>0 do r':=r'} \dot{-} \texttt{1; r}_j\texttt{:=r}_j \dot{-} \texttt{1 od}$

- $\texttt{r}_j \texttt{ := } \texttt{r}_j\texttt{*r}_i$
  – r_i-faches Aufaddieren von r_j unter Verwendung von Hilfsregistern
  $\texttt{r':=r}_i\texttt{; r'':=r}_j\texttt{;}$ $\texttt{while r'>0 do r':=r'} \dot{-} \texttt{1; r}_j\texttt{:=r}_j\texttt{+r'' od}$

- $\texttt{r}_j \texttt{ := } \texttt{r}_j^{\texttt{r}_i}$
  $\texttt{r':=r}_i\texttt{; r'':=r}_j\texttt{; r}_j\texttt{:=1;}$
  $\texttt{while r'>0 do r':=r'} \dot{-} \texttt{1; r}_j\texttt{:=r}_j\texttt{*r'' od}$

Befehlsmacros II: Programmstrukturen

- while exp(r$_j$)>0 do op od (r$_j$:= exp(r$_j$) programmierbar)

  r':=r$_j$; r':=exp(r');

  while r'>0 do op; r':=r$_j$; r':=exp(r') od

- while exp(r$_j$)=0 do op od

  while 1$\dot{-}$$exp$(r$_j$)>0 do op od

- if r$_j$=0 then op fi

  r':=r$_j$; while r'=0 do op; r':=1 od

- if r$_j$$\leq$r$_i$ then op fi

  r':=r$_i$$\dot{-}r_j$; if r'=0 then op fi

  – Vergleichsoperation $\geq, <, >, =, \neq$ analog

Befehlsmacros III: Division und Produkte

- $\mathtt{r}_j$:= $\mathtt{r}_j \div \mathtt{r}_i$ (Integerdivision)
  - Subtrahiere r_i wiederholt von Kopie von r_j und zähle dabei r_j hoch
  - Korrektur um $\dot{-}1$, wenn Divisionsrest bleibt

    $\mathtt{r'}$:=$\mathtt{r}_j$; $\mathtt{r}_j$:=0;

    while r'>0 do r'':=r'; r':=r'$\dot{-}\mathtt{r}_i$; $\mathtt{r}_j$:=$\mathtt{r}_j$+1 od

    if r''<$\mathtt{r}_i$ then $\mathtt{r}_j$:=$\mathtt{r}_j\dot{-}1$

- $\mathtt{r}_j$:= $\mathtt{r}_j$ mod $\mathtt{r}_i$
  - Subtrahiere r_i wiederholt von r_j und speichere letzten "Divisionsrest"
  - Korrektur: Ergebnis bleibt 0, wenn Divisionsrest gleich r_i ist

    while $\mathtt{r}_j$>0 do r':= $\mathtt{r}_j$; $\mathtt{r}_j$:=$\mathtt{r}_j\dot{-}\mathtt{r}_i$ od;

    if r'<$\mathtt{r}_i$ then $\mathtt{r}_j$:= r'

- $\mathtt{r}_j$:= $\prod_{j=1}^{\mathtt{r}_i} exp(j)$

    r':=$\mathtt{r}_i$; $\mathtt{r}_j$:=1; while r'>0 do $\mathtt{r}_j$:=$\mathtt{r}_j$*exp(r'); r':=r'$\dot{-}1$ od

Befehlsmacros IV: Primfaktoren

- $\mathtt{r}_j$ `:= prime(`$\mathtt{r}_i$`)` (`prime(`x`)` $= 0$, wenn x Primzahl ist)

```
r_j:=1; r':=2;
while r_i-r'>0 do
   if r_i mod r' = 0 then r_j:=0 fi;
   r':=r'+1
od
```

- $\mathtt{r}_j$ `:= nth-prime(`$\mathtt{r}_i$`)` (`nth-prime(`n`)` ist die n-te Primzahl)

```
r':=r_i; r_j:=1;
while r'>0 do
   r_j:=r_j+1;
   if prime(r_j) = 0 then r':=r'-1 fi
od
```

- $\mathtt{r}_k$ `:= prim-exp(`$\mathtt{r}_j$`,`$\mathtt{r}_i$`)` (`prim-exp`$(n,p) = \max\{k | p^k \text{ teilt } n\}$)

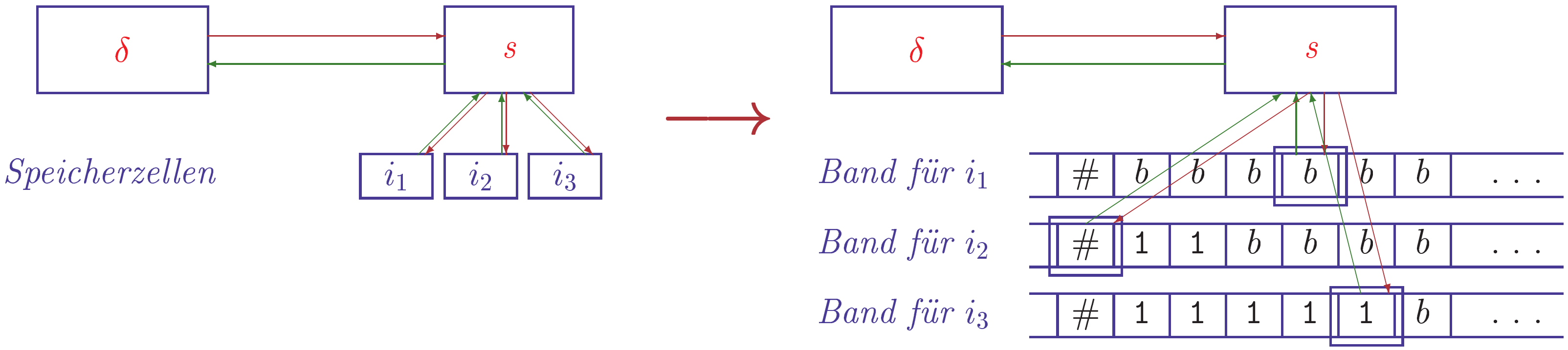
```
r_k:=0; r':=r_j;
while r' mod r_i = 0 do r':=r' div r_i; r_k:=r_k+1 od
```

$$\mathcal{RM} = \mathcal{T}_{\{1\},\{1\}}$$ Satz I

Beweis durch gegenseitige Simulation

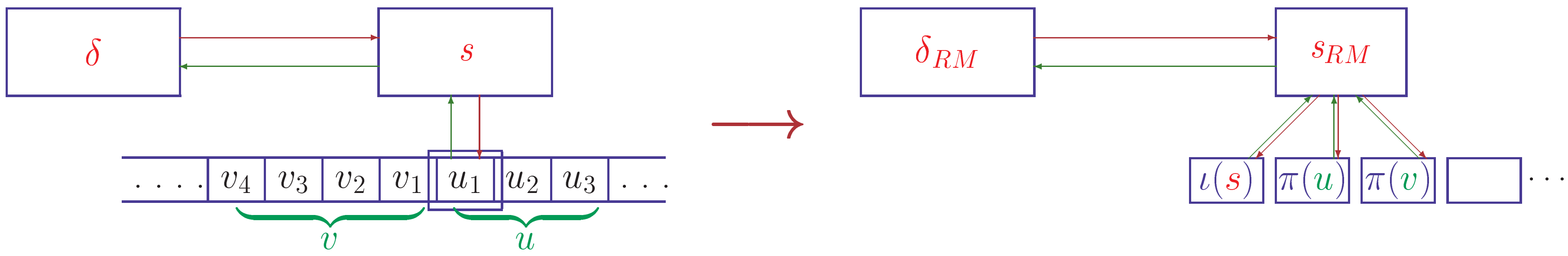
- $\mathcal{RM} \subseteq \mathcal{T}_{\{1\},\{1\}}$
  - Simuliere jedes Register durch separates (einseitiges) Turingband
  - Simuliere Registeroperationen durch Hinzufügen bzw. Löschen von Einsen
  - k-Band-Maschine durch Einbandmaschine simulierbar
- $\mathcal{RM} \supseteq \mathcal{T}_{\{1\},\{1\}}$
  - Direkte Simulation nicht möglich da Anzahl der Register endlich
  - Codiere Bandinhalt und Kopfsymbol als (beliebig große) Zahlen
  - Simuliere Einzelschritte durch entsprechende arithmetische Operationen
  - Umfangreiche Details

Simulation einer RM durch eine TM



- **Band für Register r wird kellerartig verarbeitet**
  – Kopf am rechten Ende der unären Codierung des Registerinhalts
- **Überführungsfunktion direkt simulierbar**
  – Registerinhaltstest 0: Lesen des Bandanfangsmarkers #
  – Registerinhaltstest 1: Lesen einer 1
  – Registerinhalt vergrößern: nach rechts gehen und eine 1 schreiben
  – Registerinhalt verringern: 1 löschen und nach links gehen (wenn möglich)

Simulation einer TM durch eine RM



- **Repräsentiere TM-Konfigurationen in Registern**
  - 3 Register für linke Hälfte, rechte Häfte, Zustand
  - Braucht eindeutige Codierung π von Strings als Zahlen
- **Repräsentiere Überführungstabelle in Zuständen**
  - Je ein separater Zustand pro Eintrag in der Tabelle
  - Unterprogramm schreibt (codiertes) Ergebnis $\delta(s,a)=(s',a',P)$ in Register
- **Simuliere Ausführung der Turingmaschine**
  - Erzeuge Codierung der TM-Anfangskonfiguration aus RM-Eingabe
  - Simuliere Berechnung der TM-Nachfolgekonfiguration
  - Decodiere TM-Endkonfiguration in Ausgabe der Registermaschine

Codierung von Konfigurationen und Überführungsfunktion

- **Primzahlcodierung π von Strings über Γ** Definition J
  - Für $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_m\}$ sei $\iota(a_i)=i$
  - Für $w = w_1 \ldots w_r$ sei $\pi(w) = \Pi_{j=1}^{r}\, p_j^{\iota(w_j)}$ $\qquad (p_j = \texttt{nth-prime}(j))$

    z.B. $\pi(\epsilon) = 1, \quad \pi(a_4 a_2 a_1) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 720$
  - π injektiv wegen Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung
- **Repräsentation von TM-Konfigurationen**
  - Für $S = \{s_0, \ldots, s_k\}$ sei $\iota(s_i)=i$
  - Verwende alternative Repräsentation (s,u,v) von Konfigurationen
  - Codierung durch Registerinhalt $(\mathtt{r}_1, \mathtt{r}_2, \mathtt{r}_3, \ldots) = (\iota(s), \pi(u), \pi(v), \ldots)$
- **Repräsentation der Überführungstabelle**
  - Für $S=\{s_0, \ldots, s_k\}$, $\Gamma=\{a_1, \ldots, a_m\}$ verwende Zustände $\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_{(k+1)*m}$
  - Zustand $\bar{s}_{j*m+i}$ enthält Unterprogramm für $\delta(s_j, a_i)=(s_{j'}, a_{i'}, P)$

    $\mathtt{r}_1\mathtt{:=}j'\mathtt{;}\;\; \mathtt{r}_4\mathtt{:=}i'\mathtt{;}\;\; \mathtt{r}_5\mathtt{:=}\iota(P)$ $\qquad (\iota(l)=0,\ \iota(h)=1,\ \iota(r)=2)$
  - Register $\mathtt{r}_6$, $\mathtt{r}_7$, … werden für Zwischenergebnisse der Simulation benutzt

Simulation der TM Ausführung im Detail

- **Erzeugung der Anfangskonfiguration**
  - Anfangskonfiguration der RM ist $\alpha(n) = (s_0,(n,0,...,0))$
  - Anfangskonfiguration der TM ist $(s_0,\epsilon,\underbrace{1...1}_{n})$
  - Der Einfachheit halber hat rechter String mindestens ein (Kopf-)symbol

    $\texttt{if r}_1\texttt{=0 then r}_3\texttt{:=}2^{\iota(b)}\texttt{ else r}_3\texttt{:=}\Pi_{j=1}^{r_1}\texttt{ nth-prime(}j\texttt{)}^{\iota(1)}\texttt{ fi;}$

    $\texttt{r}_1\texttt{:=0; r}_2\texttt{:=1}$
- **Lesen des Symbols unter dem Kopf**
  - Codierung des Strings $v_1...v_r$ in $\texttt{r}_3$ ist $2^{\iota(v_1)} * \Pi_{j=2}^{r}\ p_j^{\iota(v_j)}$
  - Berechne $\iota(v_1)$ und speichere nach $\texttt{r}_4$, "lösche" v_1 aus $\texttt{r}_3$

    $\texttt{r}_4\texttt{:=prim-exp(r}_3\texttt{,2); r}_3\texttt{:=r}_3\texttt{ div }2^{\texttt{r}_4}$
- **Bestimmung des auszuführenden Befehls**
  - Durch schrittweises Herunterzählen gehe zum Zustand $\bar{s}_{\texttt{r}_1 * m + \texttt{r}_4}$
  - Führe entsprechendes Unterprogramm aus und gehe zum Zustand $\bar{s}$
  - $\texttt{r}_1$ enthät Folgezustand, $\texttt{r}_4$ neues Kopfsymbol, $\texttt{r}_5$ Kopfbewegung

Simuliere Schreiben ($\mathtt{r}_4$) und Kopfbewegung ($\mathtt{r}_5$)

Kopfbewegung erfordert Umcodierung der Strings

```
if r₅=1 then r₃:=r₃ * 2^r₄; goto sₑ fi                          P = h

if r₅=2 then                                                    P = r
   r₆:=r₃; r₃:=1; r₇:=2; r₈:=2                r₇=n, r₈ = (n-1)te Primzahl
   while r₆>1 do             Umverschlüsseln r₃: von nte auf (n-1)te Primzahl)
      r₉:= nth-prime(r₇); r₁₀:=prim-exp(r₆,r₉)
      r₆:=r₆ div r₉^r₁₀; r₃:=r₃*r₈^r₁₀; r₈:=r₉; r₇:=r₇+1
   od
   if r₃=1 then r₃:=2^ι(b) fi          Sonderfall Bandende: rechts ein b anhängen
     r₆:=r₂; r₂:=2^r₄; r₇:=2; r₈:=2
   while r₆>1 do             Umverschlüsseln r₂: von (n-1)te auf nte Primzahl)
      r₉:= nth-prime(r₇); r₁₀:=prim-exp(r₆,r₈)
      r₆:=r₆ div r₈^r₁₀; r₂:=r₂*r₉^r₁₀; r₈:=r₉; r₇:=r₇+1
   od
fi

if r₅=0 then ...                                          P = l, analog
```

Simulation der TM Ausführung: Ausgabe

- **Decodierung der Ausgabekonfiguration**
  - Endkonfiguration der TM ist (s,u,v) mit $u{=}1^k b^*$, $v{=}1^j b^*$
  - Endkonfiguration der RM muß $k+j$ in Register $\mathtt{r}_1$ enthalten
  - Schrittweise decodiere Primexponenten bis zum ersten Leerzeichen

```
r1:=0; r4:=1; r5:=nth-prime(r4); r6:=prim-exp(r2,r5)
while r6=ι(1) do
   r2:= r2 div r5^r6; r1:=r1+1;
   r4:=r4+1; r5:=nth-prime(r4); r6:=prim-exp(r2,r5)
od;
r4:=1; r5:=nth-prime(r4); r6:=prim-exp(r2,r5)
while r6=ι(1) do
   r3:= r3 div r5^r6; r1:=r1+1;
   r4:=r4+1; r5:=nth-prime(r4); r6:=prim-exp(r2,r5)
od
```

q.e.d