# Theoretische Informatik II

## Einheit 8.3

## Komplexität von Problemen


1. Untere Schranken für Komplexität
2. Nichtdeterministische Komplexität
3. Komplexitätsklassen

# Komplexität von Problemen

- **Probleme haben unterschiedlich gute Lösungen**
  - Suchen: Lineare Suche $\mathcal{O}(n)$ — Binärsuche $\mathcal{O}(\log_2 n)$
  - Sortieren: Bubblesort $\mathcal{O}(n^2)$ — Mergesort $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$

# Komplexität von Problemen

- **Probleme haben unterschiedlich gute Lösungen**
  - Suchen: Lineare Suche $\mathcal{O}(n)$ — Binärsuche $\mathcal{O}(\log_2 n)$
  - Sortieren: Bubblesort $\mathcal{O}(n^2)$ — Mergesort $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$
- **Wie effizient kann ein Problem gelöst werden?**
  - Gibt es untere Schranken für die Komplexität von Lösungen

# Komplexität von Problemen

- **Probleme haben unterschiedlich gute Lösungen**
  - Suchen: Lineare Suche $\mathcal{O}(n)$ — Binärsuche $\mathcal{O}(\log_2 n)$
  - Sortieren: Bubblesort $\mathcal{O}(n^2)$ — Mergesort $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$
- **Wie effizient kann ein Problem gelöst werden?**
  - Gibt es untere Schranken für die Komplexität von Lösungen
- **Wann ist eine Lösung gut genug?**
  - Ist ein Lösungsalgorithmus optimal bezüglich Zeit-/Platzbedarf?

# Komplexität von Problemen

- **Probleme haben unterschiedlich gute Lösungen**
  - Suchen: Lineare Suche $\mathcal{O}(n)$ — Binärsuche $\mathcal{O}(\log_2 n)$
  - Sortieren: Bubblesort $\mathcal{O}(n^2)$ — Mergesort $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$
- **Wie effizient kann ein Problem gelöst werden?**
  - Gibt es untere Schranken für die Komplexität von Lösungen
- **Wann ist eine Lösung gut genug?**
  - Ist ein Lösungsalgorithmus optimal bezüglich Zeit-/Platzbedarf?
- **Nachweis aufwendig**
  - Man muß über alle möglichen Algorithmen argumentieren

# Komplexität von Sortierverfahren

**Schneller als $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$?**

# Komplexität von Sortierverfahren

**Schneller als $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$?**

- **Sortierverfahren müssen Elemente vergleichen**
  - Sonst kann die Anordnung der Elemente nicht garantiert werden

# Komplexität von Sortierverfahren

**Schneller als $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$?**

- **Sortierverfahren müssen Elemente vergleichen**
  - Sonst kann die Anordnung der Elemente nicht garantiert werden
  - Wieviel Vergleiche werden benötigt um $a_1..a_n$ zu ordnen?
  - Bestimme Anzahl der Vergleiche für den ungünstigsten Fall

# Komplexität von Sortierverfahren

**Schneller als $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$?**

- **Sortierverfahren müssen Elemente vergleichen**
  - Sonst kann die Anordnung der Elemente nicht garantiert werden
  - Wieviel Vergleiche werden benötigt um $a_1..a_n$ zu ordnen?
  - Bestimme Anzahl der Vergleiche für den ungünstigsten Fall

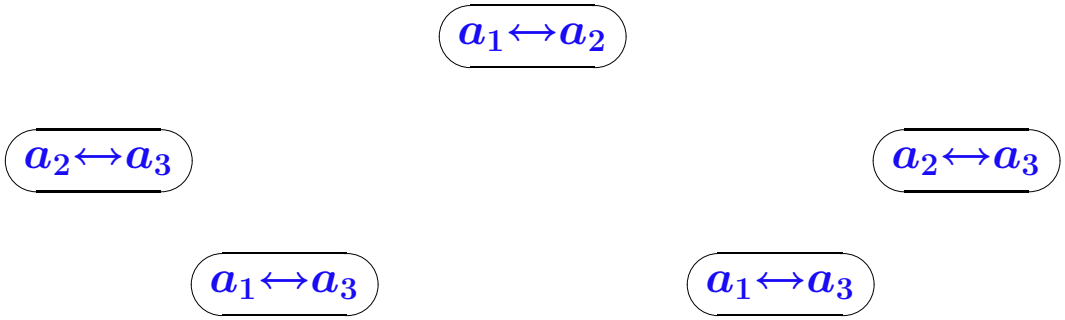
- **Betrachte Entscheidungsbaum von Algorithmen**

# Komplexität von Sortierverfahren

**Schneller als $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$?**

- **Sortierverfahren müssen Elemente vergleichen**
  - Sonst kann die Anordnung der Elemente nicht garantiert werden
  - Wieviel Vergleiche werden benötigt um $a_1..a_n$ zu ordnen?
  - Bestimme Anzahl der Vergleiche für den ungünstigsten Fall

- **Betrachte Entscheidungsbaum von Algorithmen**



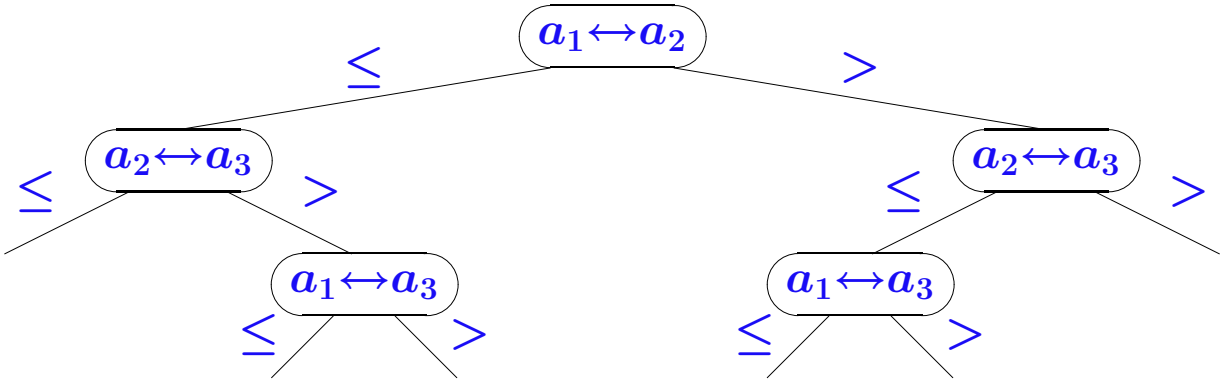

  - Innere Knoten entsprechen den durchgeführten Vergleichen

# Komplexität von Sortierverfahren

**Schneller als $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$?**

- **Sortierverfahren müssen Elemente vergleichen**
  - Sonst kann die Anordnung der Elemente nicht garantiert werden
  - Wieviel Vergleiche werden benötigt um $a_1..a_n$ zu ordnen?
  - Bestimme Anzahl der Vergleiche für den ungünstigsten Fall

- **Betrachte Entscheidungsbaum von Algorithmen**



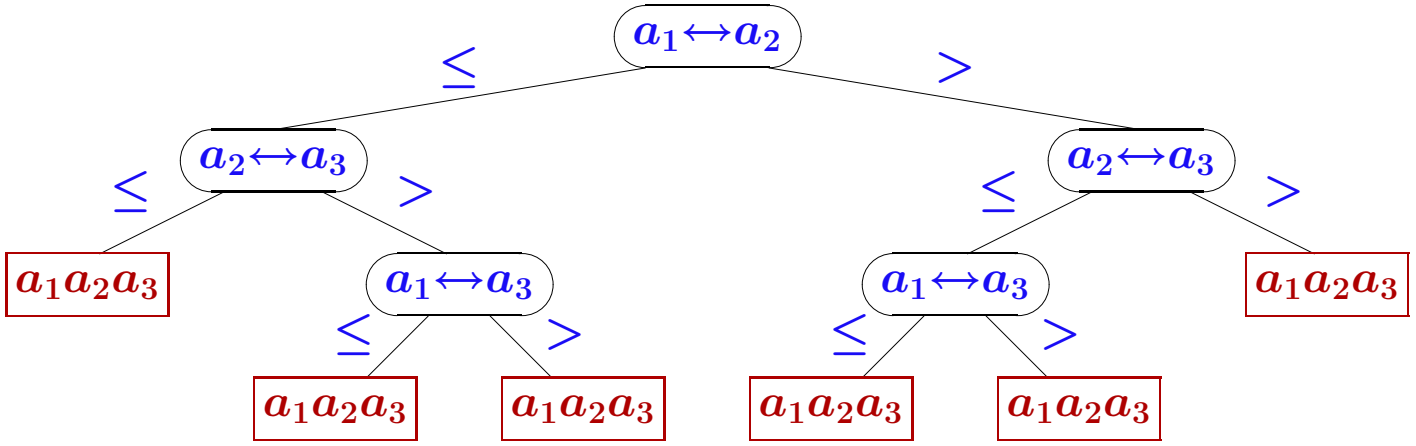

  - Innere Knoten entsprechen den durchgeführten Vergleichen
  - Kanten markiert mit Vergleichergebnis ($\leq$,$>$)

# Komplexität von Sortierverfahren

**Schneller als $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$?**

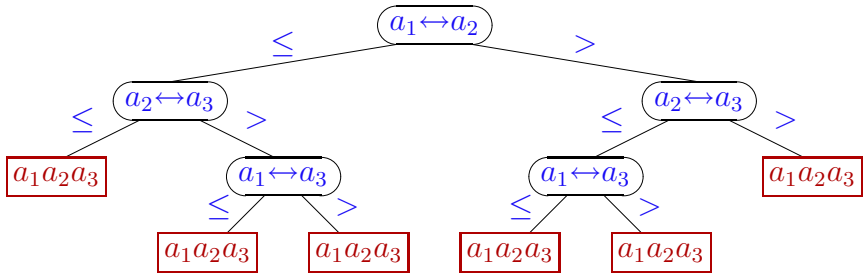
- **Sortierverfahren müssen Elemente vergleichen**
  - Sonst kann die Anordnung der Elemente nicht garantiert werden
  - Wieviel Vergleiche werden benötigt um $a_1..a_n$ zu ordnen?
  - Bestimme Anzahl der Vergleiche für den ungünstigsten Fall

- **Betrachte Entscheidungsbaum von Algorithmen**



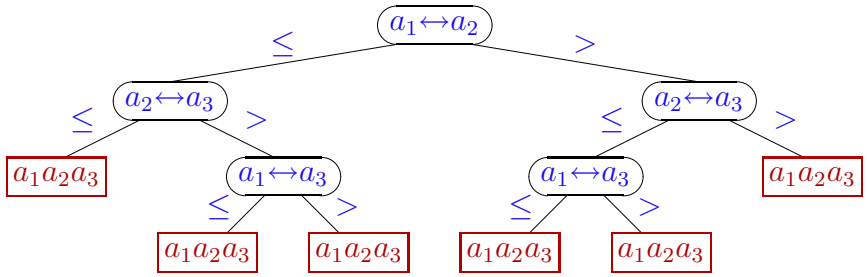

  - Innere Knoten entsprechen den durchgeführten Vergleichen
  - Kanten markiert mit Vergleichergebnis ($\leq$,$>$)
  - Blätter sind resultierende Anordnung der Elemente

# Komplexität von Sortierverfahren (II)



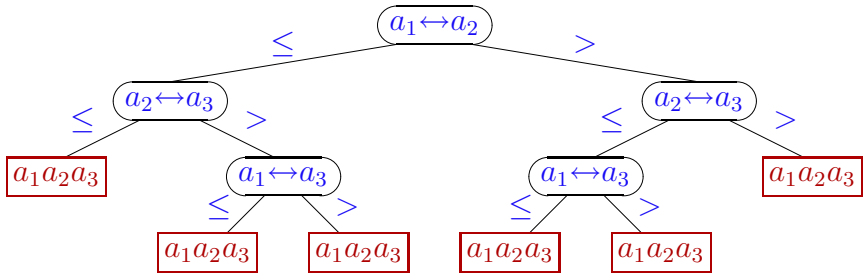

- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum

# Komplexität von Sortierverfahren (II)



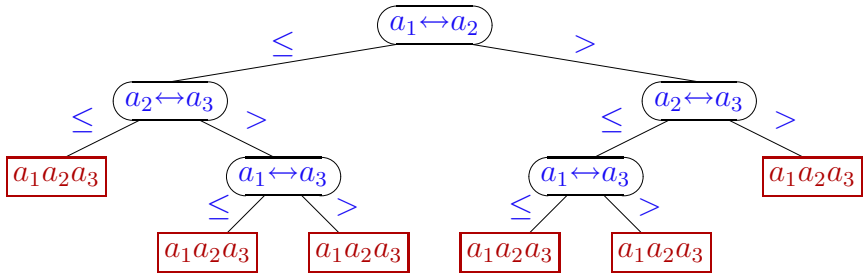

- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes

# Komplexität von Sortierverfahren (II)




- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

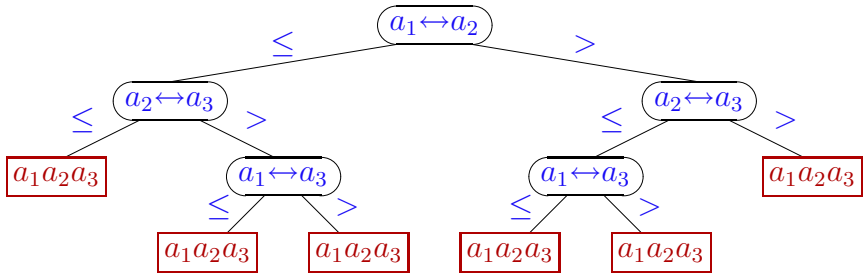
# Komplexität von Sortierverfahren (II)




- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

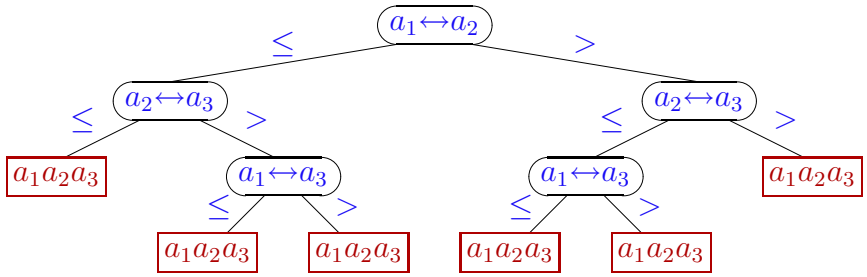
# Komplexität von Sortierverfahren (II)




- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen
- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**

# Komplexität von Sortierverfahren (II)

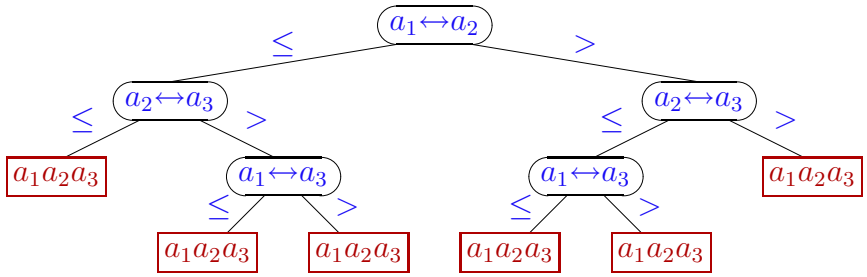



- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1..a_n$ hat $n!$ Blätter

# Komplexität von Sortierverfahren (II)

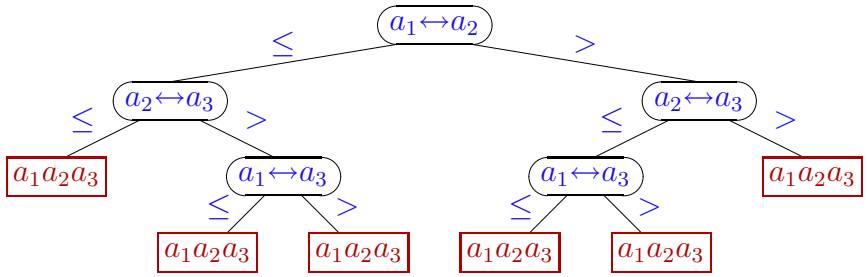



- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1..a_n$ hat $n!$ Blätter
  - Ein binärer Baum der Tiefe $k$ hat maximal $2^k$ Blätter

# Komplexität von Sortierverfahren (II)

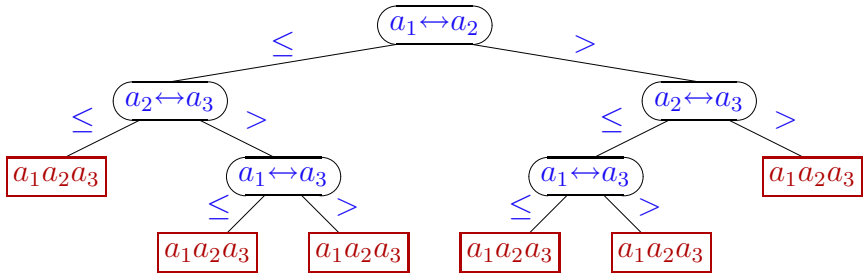



- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1..a_n$ hat $n!$ Blätter
  - Ein binärer Baum der Tiefe $k$ hat maximal $2^k$ Blätter
  - Jeder Entscheidungsbaum hat mindestens Tiefe $\log_2 n!$

# Komplexität von Sortierverfahren (II)

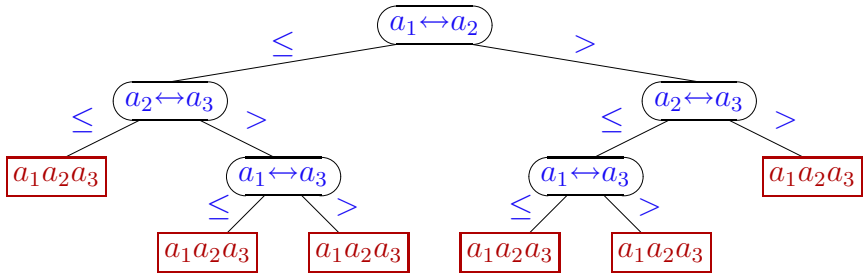



- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1..a_n$ hat $n!$ Blätter
  - Ein binärer Baum der Tiefe $k$ hat maximal $2^k$ Blätter
  - Jeder Entscheidungsbaum hat mindestens Tiefe $\log_2 n!$
  - $\log_2 n! = \log_2(\Pi_{i=1}^{n} i)$

# Komplexität von Sortierverfahren (II)

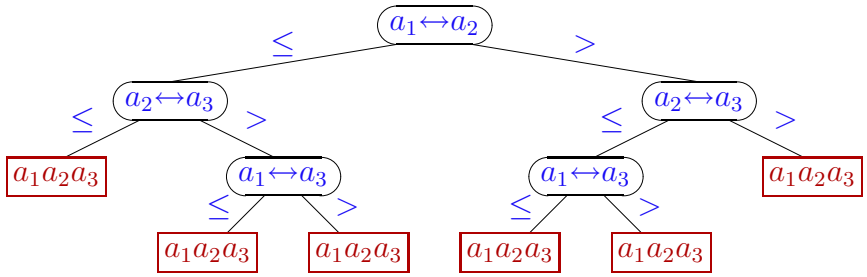



- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1..a_n$ hat $n!$ Blätter
  - Ein binärer Baum der Tiefe $k$ hat maximal $2^k$ Blätter
  - Jeder Entscheidungsbaum hat mindestens Tiefe $\log_2 n!$
  - $\log_2 n! = \log_2(\Pi_{i=1}^{n} i) = \Sigma_{i=1}^{n} \log_2 i$

# Komplexität von Sortierverfahren (II)

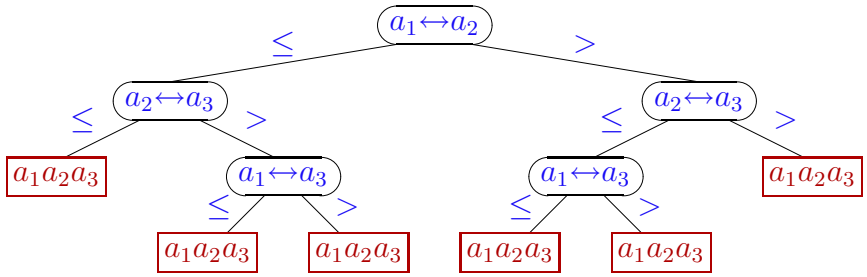



- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1..a_n$ hat $n!$ Blätter
  - Ein binärer Baum der Tiefe $k$ hat maximal $2^k$ Blätter
  - Jeder Entscheidungsbaum hat mindestens Tiefe $\log_2 n!$
  - $\log_2 n! = \log_2(\Pi_{i=1}^{n} i) = \Sigma_{i=1}^{n} \log_2 i \ \geq \Sigma_{i=n/2}^{n} \log_2(n/2)$

# Komplexität von Sortierverfahren (II)

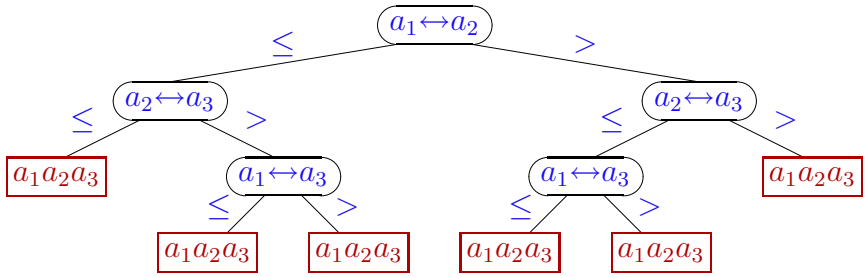



- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1..a_n$ hat $n!$ Blätter
  - Ein binärer Baum der Tiefe $k$ hat maximal $2^k$ Blätter
  - Jeder Entscheidungsbaum hat mindestens Tiefe $\log_2 n!$
  - $\log_2 n! = \log_2(\Pi_{i=1}^{n} i) = \Sigma_{i=1}^{n} \log_2 i \ \geq \Sigma_{i=n/2}^{n} \log_2(n/2) = n/2{*}(\log_2 n - 1)$

# Komplexität von Sortierverfahren (II)




- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1..a_n$ hat $n!$ Blätter
  - Ein binärer Baum der Tiefe $k$ hat maximal $2^k$ Blätter
  - Jeder Entscheidungsbaum hat mindestens Tiefe $\log_2 n!$
  - $\log_2 n! = \log_2(\Pi_{i=1}^{n} i) = \Sigma_{i=1}^{n} \log_2 i \ \geq \Sigma_{i=n/2}^{n} \log_2(n/2) = n/2{*}(\log_2 n - 1)$

$\Downarrow$

**Sortieren ist in $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$**

# Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition $n$-stelliger Zahlen**

# Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag

# Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation $n$-stelliger Zahlen**

# Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden

# Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden
- **Division $n$-stelliger Zahlen**

# Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden
- **Division $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Schriftliche Division bestimmt Ergebnis von links nach rechts

# Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden
- **Division $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Schriftliche Division bestimmt Ergebnis von links nach rechts
- **Berechnung von $n!$**

# Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden
- **Division $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Schriftliche Division bestimmt Ergebnis von links nach rechts
- **Berechnung von $n!$** $\mathcal{O}(n^2 * (\log_2 n)^2)$
  - Obergrenze: $n$-fache Multiplikation von $n$ und $n!$: $n * \log_2 n * \log_2(n^n)$
  - Untergrenze: $n/2$-fach $n/2 * (n/2)!$: $n/2 * \log_2(n/2) * n/4 * (\log_2 n - 2)$

# Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden
- **Division $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Schriftliche Division bestimmt Ergebnis von links nach rechts
- **Berechnung von $n!$** $\mathcal{O}(n^2 * (\log_2 n)^2)$
  - Obergrenze: $n$-fache Multiplikation von $n$ und $n!$: $n * \log_2 n * \log_2(n^n)$
  - Untergrenze: $n/2$-fach $n/2 * (n/2)!$: $n/2 * \log_2(n/2) * n/4 * (\log_2 n - 2)$
- **Primzahltest bei $n$-stelliger Zahlen**

# Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden
- **Division $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Schriftliche Division bestimmt Ergebnis von links nach rechts
- **Berechnung von $n!$** $\mathcal{O}(n^2 * (\log_2 n)^2)$
  - Obergrenze: $n$-fache Multiplikation von $n$ und $n!$: $n * \log_2 n * \log_2(n^n)$
  - Untergrenze: $n/2$-fach $n/2 * (n/2)!$: $n/2 * \log_2(n/2) * n/4 * (\log_2 n - 2)$
- **Primzahltest bei $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(2^n)$
  - Teilbarkeit muß für alle kleineren Zahlen getestet werden

# Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden
- **Division $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Schriftliche Division bestimmt Ergebnis von links nach rechts
- **Berechnung von $n!$** $\mathcal{O}(n^2 * (\log_2 n)^2)$
  - Obergrenze: $n$-fache Multiplikation von $n$ und $n!$: $n * \log_2 n * \log_2(n^n)$
  - Untergrenze: $n/2$-fach $n/2*(n/2)!$: $n/2 * \log_2(n/2) * n/4*(\log_2 n - 2)$
- **Primzahltest bei $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(2^n)$
  - Teilbarkeit muß für alle kleineren Zahlen getestet werden
  - Untere Schranke $\mathcal{O}(2^n)$ nicht bewiesen $\mapsto$ NP-Vollständigkeit

# Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden
- **Division $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Schriftliche Division bestimmt Ergebnis von links nach rechts
- **Berechnung von $n!$** $\mathcal{O}(n^2 * (\log_2 n)^2)$
  - Obergrenze: $n$-fache Multiplikation von $n$ und $n!$: $n * \log_2 n * \log_2(n^n)$
  - Untergrenze: $n/2$-fach $n/2*(n/2)!$: $n/2 * \log_2(n/2) * n/4*(\log_2 n - 2)$
- **Primzahltest bei $n$-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(2^n)$
  - Teilbarkeit muß für alle kleineren Zahlen getestet werden
  - Untere Schranke $\mathcal{O}(2^n)$ nicht bewiesen $\mapsto$ NP-Vollständigkeit
  - Ergebnis gut für offene kryptographische Systeme (wähle $n > 200$)

# Weitere Probleme mit exponentieller Komplexität

- **Travelling Salesman (TSP)**
  Gegeben $n$ Städte, eine Kostentabelle von Kosten $c_{ij}$ um von Stadt $i$ nach $j$ zu reisen und eine Kostenbeschränkung $B$. Gibt es eine Rundreise durch alle $n$ Städte, deren Kosten unter $B$ liegt?

# Weitere Probleme mit exponentieller Komplexität

- **Travelling Salesman (TSP)**
  Gegeben $n$ Städte, eine Kostentabelle von Kosten $c_{ij}$ um von Stadt $i$ nach $j$ zu reisen und eine Kostenbeschränkung $B$. Gibt es eine Rundreise durch alle $n$ Städte, deren Kosten unter $B$ liegt?
- **Cliquen-Problem (CLIQUE)**
  Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe $n$ und eine Zahl $k \leq n$. Gibt es in $G$ eine Clique (vollständig verbundener Teilgraph) der Größe $k$?

# Weitere Probleme mit exponentieller Komplexität

- **Travelling Salesman (TSP)**
  Gegeben $n$ Städte, eine Kostentabelle von Kosten $c_{ij}$ um von Stadt $i$ nach $j$ zu reisen und eine Kostenbeschränkung $B$. Gibt es eine Rundreise durch alle $n$ Städte, deren Kosten unter $B$ liegt?
- **Cliquen-Problem (CLIQUE)**
  Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe $n$ und eine Zahl $k \leq n$. Gibt es in $G$ eine Clique (vollständig verbundener Teilgraph) der Größe $k$?
- **Erfüllbarkeitsproblem (SAT)**
  Ist eine aussagenlogische Formel in KNF der Größe $n$ erfüllbar?

# Weitere Probleme mit exponentieller Komplexität

- **Travelling Salesman (TSP)**
  Gegeben $n$ Städte, eine Kostentabelle von Kosten $c_{ij}$ um von Stadt $i$ nach $j$ zu reisen und eine Kostenbeschränkung $B$. Gibt es eine Rundreise durch alle $n$ Städte, deren Kosten unter $B$ liegt?
- **Cliquen-Problem (CLIQUE)**
  Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe $n$ und eine Zahl $k \leq n$. Gibt es in $G$ eine Clique (vollständig verbundener Teilgraph) der Größe $k$?
- **Erfüllbarkeitsproblem (SAT)**
  Ist eine aussagenlogische Formel in KNF der Größe $n$ erfüllbar?
- **Multiprozessor-Scheduling**
  Verteile $n$ Prozesse derart auf eine Menge von Prozessoren, daß die Ressourcen der Rechner optimal genutzt werden.

# Weitere Probleme mit exponentieller Komplexität

- **Travelling Salesman (TSP)**
  Gegeben $n$ Städte, eine Kostentabelle von Kosten $c_{ij}$ um von Stadt $i$ nach $j$ zu reisen und eine Kostenbeschränkung $B$. Gibt es eine Rundreise durch alle $n$ Städte, deren Kosten unter $B$ liegt?
- **Cliquen-Problem (CLIQUE)**
  Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe $n$ und eine Zahl $k \leq n$. Gibt es in $G$ eine Clique (vollständig verbundener Teilgraph) der Größe $k$?
- **Erfüllbarkeitsproblem (SAT)**
  Ist eine aussagenlogische Formel in KNF der Größe $n$ erfüllbar?
- **Multiprozessor-Scheduling**
  Verteile $n$ Prozesse derart auf eine Menge von Prozessoren, daß die Ressourcen der Rechner optimal genutzt werden.
- **Binpacking**
  Minimiere Anzahl von Verpackungsbehältern, um $n$ verschieden große Gegenstände zu transportieren.

# Weitere Probleme mit exponentieller Komplexität

- **Travelling Salesman (TSP)**
  Gegeben $n$ Städte, eine Kostentabelle von Kosten $c_{ij}$ um von Stadt $i$ nach $j$ zu reisen und eine Kostenbeschränkung $B$. Gibt es eine Rundreise durch alle $n$ Städte, deren Kosten unter $B$ liegt?
- **Cliquen-Problem (CLIQUE)**
  Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe $n$ und eine Zahl $k \leq n$. Gibt es in $G$ eine Clique (vollständig verbundener Teilgraph) der Größe $k$?
- **Erfüllbarkeitsproblem (SAT)**
  Ist eine aussagenlogische Formel in KNF der Größe $n$ erfüllbar?
- **Multiprozessor-Scheduling**
  Verteile $n$ Prozesse derart auf eine Menge von Prozessoren, daß die Ressourcen der Rechner optimal genutzt werden.
- **Binpacking**
  Minimiere Anzahl von Verpackungsbehältern, um $n$ verschieden große Gegenstände zu transportieren.

**Bisher nur durch Testen aller Möglichkeiten lösbar**

# Entscheidungs- und Optimierungsprobleme

**Viele Probleme erscheinen in mehreren Varianten**

## Viele Probleme erscheinen in mehreren Varianten

- **Entscheidungsprobleme**
  - Teste ob eine Eingabe $x_1, .., x_n$ eine bestimmte Eigenschaft $P$ erfüllt
  - Suchen in Listen, Primzahltests, Travelling Salesman, Clique ...

**Viele Probleme erscheinen in mehreren Varianten**

- **Entscheidungsprobleme**
  - Teste ob eine Eingabe $x_1, .., x_n$ eine bestimmte Eigenschaft $P$ erfüllt
  - Suchen in Listen, Primzahltests, Travelling Salesman, Clique ...
- **Berechnungsprobleme**
  - Bei Eingabe von $x_1, .., x_n$ berechne ein $y$, so daß $P(x_1, .., x_n, y)$ gilt
  - Sortieren, Primfaktorzerlegung, Matrixmultiplikation, ...

# Entscheidungs- und Optimierungsprobleme

**Viele Probleme erscheinen in mehreren Varianten**

- **Entscheidungsprobleme**
  - Teste ob eine Eingabe $x_1, .., x_n$ eine bestimmte Eigenschaft $P$ erfüllt
  - Suchen in Listen, Primzahltests, Travelling Salesman, Clique ...
- **Berechnungsprobleme**
  - Bei Eingabe von $x_1, .., x_n$ berechne ein $y$, so daß $P(x_1, .., x_n, y)$ gilt
  - Sortieren, Primfaktorzerlegung, Matrixmultiplikation, ...
- **Optimierungsprobleme**
  - Bei Eingabe von $x_1, .., x_n$ berechne das beste $y$ mit $P(x_1, .., x_n, y)$
  - Travelling Salesman, Clique, Binpacking, Multiprocessor Scheduling

# Varianten des Cliquenproblems

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \leq |V|$. Eine $k$-Clique von $G$ ist ein vollständig verbundener Teilgraph $C = (V_c, E_c)$ mit $|V_c| = k$

# Varianten des Cliquenproblems

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \leq |V|$. Eine $k$-Clique von $G$ ist ein vollständig verbundener Teilgraph $C = (V_c, E_c)$ mit $|V_c| = k$

- **Entscheidungsproblem**
  - "Gibt es eine Lösung mit einem bestimmten Wert"
    - CLIQUE: Gibt es in $G$ eine Clique der Größe $k$?

# Varianten des Cliquenproblems

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \leq |V|$. Eine $k$-Clique von $G$ ist ein vollständig verbundener Teilgraph $C = (V_c, E_c)$ mit $|V_c| = k$

- **Entscheidungsproblem**
  - "Gibt es eine Lösung mit einem bestimmten Wert"
    - CLIQUE: Gibt es in $G$ eine Clique der Größe $k$?
- **Berechnungsproblem**
  - Bestimme eine konkrete Lösung mit einem bestimmten Wert
    - $\text{CLIQUE}_2$: Bestimme eine Clique $C \subseteq G$ der Größe $k$

# Varianten des Cliquenproblems

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \leq |V|$. Eine $k$-Clique von $G$ ist ein vollständig verbundener Teilgraph $C = (V_c, E_c)$ mit $|V_c| = k$

- **Entscheidungsproblem**
  - "Gibt es eine Lösung mit einem bestimmten Wert"
    - CLIQUE: Gibt es in $G$ eine Clique der Größe $k$?
- **Berechnungsproblem**
  - Bestimme eine konkrete Lösung mit einem bestimmten Wert
    - $\text{CLIQUE}_2$: Bestimme eine Clique $C \subseteq G$ der Größe $k$
- **Optimierungsprobleme**
  - Bestimme den Wert einer optimalen Lösung
    - $\text{CLIQUE}_{opt}$: Bestimme das größte $k$, so daß $G$ eine $k$-Clique enthält

# Varianten des Cliquenproblems

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \leq |V|$. Eine $k$-Clique von $G$ ist ein vollständig verbundener Teilgraph $C = (V_c, E_c)$ mit $|V_c| = k$

- **Entscheidungsproblem**
  - "Gibt es eine Lösung mit einem bestimmten Wert"
    - CLIQUE: Gibt es in $G$ eine Clique der Größe $k$?
- **Berechnungsproblem**
  - Bestimme eine konkrete Lösung mit einem bestimmten Wert
    - $\text{CLIQUE}_2$: Bestimme eine Clique $C \subseteq G$ der Größe $k$
- **Optimierungsprobleme**
  - Bestimme den Wert einer optimalen Lösung
    - $\text{CLIQUE}_{opt}$: Bestimme das größte $k$, so daß $G$ eine $k$-Clique enthält
  - Berechne die optimale Lösung
    - $\text{CLIQUE}_{opt_2}$: Bestimme eine Clique $C \subseteq G$ mit maximaler Größe $k$

# Problemvarianten von Clique sind gleich schwer

- **Löse $\mathbf{CLIQUE}_{opt}$ mit CLIQUE**
  - Beginne mit $k := |V|$ und teste ob es in $G$ eine $k$-Clique gibt
  - Reduziere $k$ bis der Test erfolgreich ist und gebe $k$ aus
  - Zusatzaufwand ist linear in $|V|$

# Problemvarianten von Clique sind gleich schwer

- **Löse $\mathbf{CLIQUE}_{opt}$ mit $\mathbf{CLIQUE}$**
  - Beginne mit $k := |V|$ und teste ob es in $G$ eine $k$-Clique gibt
  - Reduziere $k$ bis der Test erfolgreich ist und gebe $k$ aus
  - Zusatzaufwand ist linear in $|V|$
- **Löse $\mathbf{CLIQUE}_{opt_2}$ mit $\mathbf{CLIQUE}_{opt}$**
  - Bestimme $k_{opt}$ für $G$ und beginne mit $E_c := E$
  - Wähle Kante $e \in E$ und teste ob es in $(V, E_c - \{e\})$ eine $k_{opt}$-Clique gibt
  - Ist dies der Fall, so setze $E_c := E_c - \{e\}$
  - Wiederhole dies iterativ für alle Kanten aus $E$
  - Die resultierende Menge $E_c$ und die zugehörigen Ecken bilden die $k_{opt}$-Clique
  - Zusatzaufwand ist linear in $|E|$

# Problemvarianten von Clique sind gleich schwer

- **Löse $\mathbf{CLIQUE}_{opt}$ mit $\mathbf{CLIQUE}$**
  - Beginne mit $k := |V|$ und teste ob es in $G$ eine $k$-Clique gibt
  - Reduziere $k$ bis der Test erfolgreich ist und gebe $k$ aus
  - Zusatzaufwand ist linear in $|V|$
- **Löse $\mathbf{CLIQUE}_{opt_2}$ mit $\mathbf{CLIQUE}_{opt}$**
  - Bestimme $k_{opt}$ für $G$ und beginne mit $E_c := E$
  - Wähle Kante $e \in E$ und teste ob es in $(V, E_c - \{e\})$ eine $k_{opt}$-Clique gibt
  - Ist dies der Fall, so setze $E_c := E_c - \{e\}$
  - Wiederhole dies iterativ für alle Kanten aus $E$
  - Die resultierende Menge $E_c$ und die zugehörigen Ecken bilden die $k_{opt}$-Clique
  - Zusatzaufwand ist linear in $|E|$

**Löse analog $\mathbf{CLIQUE}_2$ mit $\mathbf{CLIQUE}$**

# Problemvarianten von Clique sind gleich schwer

- **Löse $\mathbf{CLIQUE}_{opt}$ mit $\mathbf{CLIQUE}$**
  - Beginne mit $k := |V|$ und teste ob es in $G$ eine $k$-Clique gibt
  - Reduziere $k$ bis der Test erfolgreich ist und gebe $k$ aus
  - Zusatzaufwand ist linear in $|V|$
- **Löse $\mathbf{CLIQUE}_{opt_2}$ mit $\mathbf{CLIQUE}_{opt}$**
  - Bestimme $k_{opt}$ für $G$ und beginne mit $E_c := E$
  - Wähle Kante $e \in E$ und teste ob es in $(V, E_c - \{e\})$ eine $k_{opt}$-Clique gibt
  - Ist dies der Fall, so setze $E_c := E_c - \{e\}$
  - Wiederhole dies iterativ für alle Kanten aus $E$
  - Die resultierende Menge $E_c$ und die zugehörigen Ecken bilden die $k_{opt}$-Clique
  - Zusatzaufwand ist linear in $|E|$

**Löse analog $\mathbf{CLIQUE}_2$ mit $\mathbf{CLIQUE}$**

**Die Umkehrungen sind trivial**

# Problemvarianten von Clique sind gleich schwer

- **Löse $\mathbf{CLIQUE}_{opt}$ mit $\mathbf{CLIQUE}$**
  - Beginne mit $k := |V|$ und teste ob es in $G$ eine $k$-Clique gibt
  - Reduziere $k$ bis der Test erfolgreich ist und gebe $k$ aus
  - Zusatzaufwand ist linear in $|V|$
- **Löse $\mathbf{CLIQUE}_{opt_2}$ mit $\mathbf{CLIQUE}_{opt}$**
  - Bestimme $k_{opt}$ für $G$ und beginne mit $E_c := E$
  - Wähle Kante $e \in E$ und teste ob es in $(V, E_c - \{e\})$ eine $k_{opt}$-Clique gibt
  - Ist dies der Fall, so setze $E_c := E_c - \{e\}$
  - Wiederhole dies iterativ für alle Kanten aus $E$
  - Die resultierende Menge $E_c$ und die zugehörigen Ecken bilden die $k_{opt}$-Clique
  - Zusatzaufwand ist linear in $|E|$

**Löse analog $\mathbf{CLIQUE}_2$ mit $\mathbf{CLIQUE}$**

**Die Umkehrungen sind trivial**

**Es reicht Entscheidungsprobleme zu analysieren**

# Viele schwere Probleme haben leichte Erfolgstests

- **Travelling Salesman:** Für eine gegebene Rundreise $i_1..i_n$ können die Kosten $c_{i_1 i_2} + \ldots c_{i_n i_1}$ in linearer Zeit berechnet und mit der Kostenbeschränkung $B$ verglichen werden

# Viele schwere Probleme haben leichte Erfolgstests

- **Travelling Salesman:** Für eine gegebene Rundreise $i_1..i_n$ können die Kosten $c_{i_1 i_2} + \ldots c_{i_n i_1}$ in linearer Zeit berechnet und mit der Kostenbeschränkung $B$ verglichen werden
- **Cliquen-Problem:** Ein gegebener Teilgraph der Größe $k$ kann in polynomieller Zeit auf Vollständigkeit überprüft werden

# Viele schwere Probleme haben leichte Erfolgstests

- **Travelling Salesman:** Für eine gegebene Rundreise $i_1..i_n$ können die Kosten $c_{i_1 i_2} + \ldots c_{i_n i_1}$ in linearer Zeit berechnet und mit der Kostenbeschränkung $B$ verglichen werden
- **Cliquen-Problem:** Ein gegebener Teilgraph der Größe $k$ kann in polynomieller Zeit auf Vollständigkeit überprüft werden
- **Erfüllbarkeitsproblem:** Man kann in polynomieller Zeit testen, ob eine gegebene Belegung der Variablen eine Formel erfüllt

# Viele schwere Probleme haben leichte Erfolgstests

- **Travelling Salesman:** Für eine gegebene Rundreise $i_1..i_n$ können die Kosten $c_{i_1 i_2} + \ldots c_{i_n i_1}$ in linearer Zeit berechnet und mit der Kostenbeschränkung $B$ verglichen werden
- **Cliquen-Problem:** Ein gegebener Teilgraph der Größe $k$ kann in polynomieller Zeit auf Vollständigkeit überprüft werden
- **Erfüllbarkeitsproblem:** Man kann in polynomieller Zeit testen, ob eine gegebene Belegung der Variablen eine Formel erfüllt
- **Binpacking:** Man kann in polynomieller Zeit testen, ob eine gegebene Verteilung der Gegenstände in $k$ Verpackungsbehälter paßt

# Viele schwere Probleme haben leichte Erfolgstests

- **Travelling Salesman:** Für eine gegebene Rundreise $i_1..i_n$ können die Kosten $c_{i_1 i_2} + \ldots c_{i_n i_1}$ in linearer Zeit berechnet und mit der Kostenbeschränkung $B$ verglichen werden
- **Cliquen-Problem:** Ein gegebener Teilgraph der Größe $k$ kann in polynomieller Zeit auf Vollständigkeit überprüft werden
- **Erfüllbarkeitsproblem:** Man kann in polynomieller Zeit testen, ob eine gegebene Belegung der Variablen eine Formel erfüllt
- **Binpacking:** Man kann in polynomieller Zeit testen, ob eine gegebene Verteilung der Gegenstände in $k$ Verpackungsbehälter paßt
- **Zusammengesetztheitstest:** Man kann in quadratischer Zeit testen, ob eine gegebene Zahl Teiler von $x$ (also $x$ keine Primzahl) ist

# Viele schwere Probleme haben leichte Erfolgstests

- **Travelling Salesman:** Für eine gegebene Rundreise $i_1..i_n$ können die Kosten $c_{i_1 i_2} + \ldots c_{i_n i_1}$ in linearer Zeit berechnet und mit der Kostenbeschränkung $B$ verglichen werden
- **Cliquen-Problem:** Ein gegebener Teilgraph der Größe $k$ kann in polynomieller Zeit auf Vollständigkeit überprüft werden
- **Erfüllbarkeitsproblem:** Man kann in polynomieller Zeit testen, ob eine gegebene Belegung der Variablen eine Formel erfüllt
- **Binpacking:** Man kann in polynomieller Zeit testen, ob eine gegebene Verteilung der Gegenstände in $k$ Verpackungsbehälter paßt
- **Zusammengesetztheitstest:** Man kann in quadratischer Zeit testen, ob eine gegebene Zahl Teiler von $x$ (also $x$ keine Primzahl) ist

**Nichtdeterministische Maschinen liefern polynomielle Lösung**

# Nichtdeterministische Lösbarkeit

Asteroth/Baier §2.3

- **Nichtdeterministische Turingmaschine $\tau$**
  - Komponenten $S$, $X$, $\Gamma$, $s_0$, $b$ wie bei normaler Turingmaschine
  - Zustandsüberführungsfunktion $\delta: S \times \Gamma \rightarrow 2^{S \times \Gamma \times \{r,l,h\}}$

- **Nichtdeterministische Turingmaschine $\tau$**
  - Komponenten $S$, $X$, $\Gamma$, $s_0$, $b$ wie bei normaler Turingmaschine
  - Zustandsüberführungsfunktion $\delta: S \times \Gamma \rightarrow 2^{S \times \Gamma \times \{r,l,h\}}$
  - Nachfolgekonfigurationsfunktion $\hat{\delta}: K_\tau \rightarrow 2^{K_\tau}$

- **Nichtdeterministische Turingmaschine $\tau$**
  - Komponenten $S$, $X$, $\Gamma$, $s_0$, $b$ wie bei normaler Turingmaschine
  - Zustandsüberführungsfunktion $\delta: S \times \Gamma \to 2^{S \times \Gamma \times \{r,l,h\}}$
  - Nachfolgekonfigurationsfunktion $\hat{\delta}: K_\tau \to 2^{K_\tau}$
  - Semantik $h_\tau: X^* \to 2^{\Gamma^*}$

    $h_\tau(w) = \perp$, wenn $\hat{\delta}$ unendliche Konfigurationsfolgen ermöglicht

# Nichtdeterministische Lösbarkeit

Asteroth/Baier §2.3

- **Nichtdeterministische Turingmaschine $\tau$**
  - Komponenten $S$, $X$, $\Gamma$, $s_0$, $b$ wie bei normaler Turingmaschine
  - Zustandsüberführungsfunktion $\delta{:}S\times\Gamma \to 2^{S\times\Gamma\times\{r,l,h\}}$
  - Nachfolgekonfigurationsfunktion $\hat{\delta}{:}K_\tau \to 2^{K_\tau}$
  - Semantik $h_\tau{:}X^* \to 2^{\Gamma^*}$

    $h_\tau(w) = \perp$, wenn $\hat{\delta}$ unendliche Konfigurationsfolgen ermöglicht
  - **Keine Erweiterung des Berechenbarkeitsbegriffs**

# Nichtdeterministische Lösbarkeit

Asteroth/Baier §2.3

- **Nichtdeterministische Turingmaschine $\tau$**
  - Komponenten $S$, $X$, $\Gamma$, $s_0$, $b$ wie bei normaler Turingmaschine
  - Zustandsüberführungsfunktion $\delta{:}S\times\Gamma \to 2^{S\times\Gamma\times\{r,l,h\}}$
  - Nachfolgekonfigurationsfunktion $\hat{\delta}{:}K_\tau \to 2^{K_\tau}$
  - Semantik $h_\tau{:}X^* \to 2^{\Gamma^*}$

    $h_\tau(w) = \perp$, wenn $\hat{\delta}$ unendliche Konfigurationsfolgen ermöglicht
  - **Keine Erweiterung des Berechenbarkeitsbegriffs**
- **Nichtdeterministische Entscheidbarkeit**
  - **$\tau$ entscheidet $M \subseteq X^*$**, falls $w \in M \Leftrightarrow 1 \in h_\tau(w)$

    "Es gibt eine akzeptierende Berechnung für $w$"

# Nichtdeterministische Lösbarkeit

Asteroth/Baier §2.3

- **Nichtdeterministische Turingmaschine $\tau$**
  - Komponenten $S$, $X$, $\Gamma$, $s_0$, $b$ wie bei normaler Turingmaschine
  - Zustandsüberführungsfunktion $\delta: S \times \Gamma \to 2^{S \times \Gamma \times \{r,l,h\}}$
  - Nachfolgekonfigurationsfunktion $\hat{\delta}: K_\tau \to 2^{K_\tau}$
  - Semantik $h_\tau: X^* \to 2^{\Gamma^*}$

    $h_\tau(w) = \perp$, wenn $\hat{\delta}$ unendliche Konfigurationsfolgen ermöglicht
  - **Keine Erweiterung des Berechenbarkeitsbegriffs**

- **Nichtdeterministische Entscheidbarkeit**
  - **$\tau$ entscheidet $M \subseteq X^*$**, falls $w \in M \Leftrightarrow 1 \in h_\tau(w)$

    "Es gibt eine akzeptierende Berechnung für $w$"
  - Rechenzeit $nt_\tau(w) = \begin{cases} \text{minimale Länge einer akzeptierenden Berechnung für } w & \text{falls } w \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

# Nichtdeterministische Lösbarkeit

Asteroth/Baier §2.3

- **Nichtdeterministische Turingmaschine $\tau$**
  - Komponenten $S$, $X$, $\Gamma$, $s_0$, $b$ wie bei normaler Turingmaschine
  - Zustandsüberführungsfunktion $\delta: S \times \Gamma \to 2^{S \times \Gamma \times \{r,l,h\}}$
  - Nachfolgekonfigurationsfunktion $\hat{\delta}: K_\tau \to 2^{K_\tau}$
  - Semantik $h_\tau: X^* \to 2^{\Gamma^*}$

    $h_\tau(w) = \perp$, wenn $\hat{\delta}$ unendliche Konfigurationsfolgen ermöglicht
  - **Keine Erweiterung des Berechenbarkeitsbegriffs**

- **Nichtdeterministische Entscheidbarkeit**
  - **$\tau$ entscheidet $M \subseteq X^*$**, falls $w \in M \Leftrightarrow 1 \in h_\tau(w)$

    "Es gibt eine akzeptierende Berechnung für $w$"
  - Rechenzeit $\boldsymbol{nt_\tau(w)} = \begin{cases} \text{minimale Länge einer akzep–tierenden Berechnung für } w & \text{falls } w \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - Zeitkomplexität $\boldsymbol{ntime_\tau(n)} = \max\{nt_\tau(w) \mid |w|=n\}$

# Nichtdeterministische Lösbarkeit

Asteroth/Baier §2.3

- **Nichtdeterministische Turingmaschine $\tau$**
  - Komponenten $S$, $X$, $\Gamma$, $s_0$, $b$ wie bei normaler Turingmaschine
  - Zustandsüberführungsfunktion $\delta: S \times \Gamma \to 2^{S \times \Gamma \times \{r,l,h\}}$
  - Nachfolgekonfigurationsfunktion $\hat{\delta}: K_\tau \to 2^{K_\tau}$
  - Semantik $h_\tau: X^* \to 2^{\Gamma^*}$

    $h_\tau(w) = \perp$, wenn $\hat{\delta}$ unendliche Konfigurationsfolgen ermöglicht
  - **Keine Erweiterung des Berechenbarkeitsbegriffs**

- **Nichtdeterministische Entscheidbarkeit**
  - **$\tau$ entscheidet $M \subseteq X^*$**, falls $w \in M \Leftrightarrow 1 \in h_\tau(w)$

    "Es gibt eine akzeptierende Berechnung für $w$"
  - Rechenzeit $\boldsymbol{nt_\tau(w)} = \begin{cases} \text{minimale Länge einer akzep–tierenden Berechnung für } w & \text{falls } w \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - Zeitkomplexität $\boldsymbol{ntime_\tau(n)} = \max\{nt_\tau(w) \mid |w|=n\}$
  - Platzkomplexität $\boldsymbol{nspace_\tau(n)}$ analog definiert

# Nichtdeterminismus als Raten und Verifizieren

- **Deterministische Turingmaschine mit Orakel**
  - Eingabe des Wortes $w$ auf erstem Arbeitsband
  - Phase 1: Orakel generiert Wort $w'$ auf zweitem Arbeitsband
  - Phase 2: $\tau$ verarbeitet $w$ und $w'$ deterministisch

# Nichtdeterminismus als Raten und Verifizieren

- **Deterministische Turingmaschine mit Orakel**
  - Eingabe des Wortes $w$ auf erstem Arbeitsband
  - Phase 1: Orakel generiert Wort $w'$ auf zweitem Arbeitsband
  - Phase 2: $\tau$ verarbeitet $w$ und $w'$ deterministisch
  - $\tau$ entscheidet $M \subseteq X^*$, falls $\forall w, w'. h_\tau(w, w') \neq \bot$
    und $w \in M \Leftrightarrow \exists w'.\ h_\tau(w, w') = 1$

# Nichtdeterminismus als Raten und Verifizieren

- **Deterministische Turingmaschine mit Orakel**
  - Eingabe des Wortes $w$ auf erstem Arbeitsband
  - Phase 1: Orakel generiert Wort $w'$ auf zweitem Arbeitsband
  - Phase 2: $\tau$ verarbeitet $w$ und $w'$ deterministisch
  - $\tau$ entscheidet $M \subseteq X^*$, falls $\forall w, w'. h_\tau(w, w') \neq \bot$
    und $w \in M \Leftrightarrow \exists w'.\ h_\tau(w, w') = 1$
  - Rechenzeit $ot_\tau(w) = \min\{t_\tau(w, w') \mid h_\tau(w, w') = 1\}$ (0 falls $w \notin M$)
    Orakel benötigt keine Rechenzeit zum Schreiben

# Nichtdeterminismus als Raten und Verifizieren

- **Deterministische Turingmaschine mit Orakel**
  - Eingabe des Wortes $w$ auf erstem Arbeitsband
  - Phase 1: Orakel generiert Wort $w'$ auf zweitem Arbeitsband
  - Phase 2: $\tau$ verarbeitet $w$ und $w'$ deterministisch
  - $\tau$ entscheidet $M \subseteq X^*$, falls $\forall w, w'. h_\tau(w, w') \neq \bot$
    und $w \in M \Leftrightarrow \exists w'.\ h_\tau(w, w') = 1$
  - Rechenzeit $ot_\tau(w) = \min\{t_\tau(w, w') \mid h_\tau(w, w') = 1\}$ (0 falls $w \notin M$)
    Orakel benötigt keine Rechenzeit zum Schreiben
  - Zeitkomplexität $otime_\tau(n) = \max\{ot_\tau(w) \mid |w| = n\}$

# Nichtdeterminismus als Raten und Verifizieren

- **Deterministische Turingmaschine mit Orakel**
  - Eingabe des Wortes $w$ auf erstem Arbeitsband
  - Phase 1: Orakel generiert Wort $w'$ auf zweitem Arbeitsband
  - Phase 2: $\tau$ verarbeitet $w$ und $w'$ deterministisch
  - $\tau$ entscheidet $M \subseteq X^*$, falls $\forall w, w'. h_\tau(w, w') \neq \bot$
    und $w \in M \Leftrightarrow \exists w'.\ h_\tau(w, w') = 1$
  - Rechenzeit $ot_\tau(w) = \min\{t_\tau(w, w') \mid h_\tau(w, w') = 1\}$ (0 falls $w \notin M$)
    Orakel benötigt keine Rechenzeit zum Schreiben
  - Zeitkomplexität $otime_\tau(n) = \max\{ot_\tau(w) \mid |w| = n\}$
- **NTM's und OTM's sind äquivalent**

# Nichtdeterminismus als Raten und Verifizieren

- **Deterministische Turingmaschine mit Orakel**
  - Eingabe des Wortes $w$ auf erstem Arbeitsband
  - Phase 1: Orakel generiert Wort $w'$ auf zweitem Arbeitsband
  - Phase 2: $\tau$ verarbeitet $w$ und $w'$ deterministisch
  - $\tau$ entscheidet $M \subseteq X^*$, falls $\forall w, w'. h_\tau(w, w') \neq \bot$
    und $w \in M \Leftrightarrow \exists w'.\ h_\tau(w, w') = 1$
  - Rechenzeit $ot_\tau(w) = \min\{t_\tau(w, w') \mid h_\tau(w, w') = 1\}$ (0 falls $w \notin M$)
    Orakel benötigt keine Rechenzeit zum Schreiben
  - Zeitkomplexität $otime_\tau(n) = \max\{ot_\tau(w) \mid |w| = n\}$
- **NTM's und OTM's sind äquivalent**
  - OTM kann Berechnungsfolge der NTM raten und deterministisch ausführen

# Nichtdeterminismus als Raten und Verifizieren

- **Deterministische Turingmaschine mit Orakel**
  - Eingabe des Wortes $w$ auf erstem Arbeitsband
  - Phase 1: Orakel generiert Wort $w'$ auf zweitem Arbeitsband
  - Phase 2: $\tau$ verarbeitet $w$ und $w'$ deterministisch
  - $\tau$ entscheidet $M \subseteq X^*$, falls $\forall w, w'. h_\tau(w, w') \neq \bot$
    und $w \in M \Leftrightarrow \exists w'.\ h_\tau(w, w') = 1$
  - Rechenzeit $ot_\tau(w) = \min\{t_\tau(w, w') \mid h_\tau(w, w') = 1\}$ (0 falls $w \notin M$)
    Orakel benötigt keine Rechenzeit zum Schreiben
  - Zeitkomplexität $otime_\tau(n) = \max\{ot_\tau(w) \mid |w| = n\}$
- **NTM's und OTM's sind äquivalent**
  - OTM kann Berechnungsfolge der NTM raten und deterministisch ausführen
  - NTM kann alle Berechnungsfolgen der OTM "parallel" ausführen

# Nichtdeterminismus als Raten und Verifizieren

- **Deterministische Turingmaschine mit Orakel**
  - Eingabe des Wortes $w$ auf erstem Arbeitsband
  - Phase 1: Orakel generiert Wort $w'$ auf zweitem Arbeitsband
  - Phase 2: $\tau$ verarbeitet $w$ und $w'$ deterministisch
  - $\tau$ entscheidet $M \subseteq X^*$, falls $\forall w, w'. h_\tau(w, w') \neq \bot$
    und $w \in M \Leftrightarrow \exists w'.\ h_\tau(w, w') = 1$
  - Rechenzeit $ot_\tau(w) = \min\{t_\tau(w, w') \mid h_\tau(w, w') = 1\}$ (0 falls $w \notin M$)
    Orakel benötigt keine Rechenzeit zum Schreiben
  - Zeitkomplexität $otime_\tau(n) = \max\{ot_\tau(w) \mid |w| = n\}$
- **NTM's und OTM's sind äquivalent**
  - OTM kann Berechnungsfolge der NTM raten und deterministisch ausführen
  - NTM kann alle Berechnungsfolgen der OTM "parallel" ausführen
  - **Rechenzeit ist identisch**

# Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge $M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM $\tau$ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.

# Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge $M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM $\tau$ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **DTIME($f$)** $= \{M \mid M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$

# Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge $M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM $\tau$ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **DTIME($f$)** $= \{M \mid M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge $M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM $\tau$ mit $ntime_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.

# Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge $M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM $\tau$ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **DTIME($f$)** $= \{M \mid M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge $M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM $\tau$ mit $ntime_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **NTIME($f$)** $= \{M \mid M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$

# Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge $M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM $\tau$ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **DTIME($f$)** $= \{M \mid M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge $M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM $\tau$ mit $ntime_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **NTIME($f$)** $= \{M \mid M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$
- **Platzkomplexität**
  - Eine Menge $M$ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM $\tau$ mit $space_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.

# Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge $M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM $\tau$ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **DTIME($f$)** $= \{M \mid M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge $M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM $\tau$ mit $ntime_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **NTIME($f$)** $= \{M \mid M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$
- **Platzkomplexität**
  - Eine Menge $M$ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM $\tau$ mit $space_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **DSPACE($f$)** $= \{M \mid M$ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$

# Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge $M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM $\tau$ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **DTIME($f$)** $= \{M \mid M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge $M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM $\tau$ mit $ntime_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **NTIME($f$)** $= \{M \mid M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$
- **Platzkomplexität**
  - Eine Menge $M$ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM $\tau$ mit $space_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **DSPACE($f$)** $= \{M \mid M$ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge $M$ hat nichtdeterministische Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM $\tau$ mit $nspace_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.

# Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge $M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM $\tau$ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **DTIME($f$)** $= \{M \mid M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge $M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM $\tau$ mit $ntime_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **NTIME($f$)** $= \{M \mid M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$
- **Platzkomplexität**
  - Eine Menge $M$ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM $\tau$ mit $space_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **DSPACE($f$)** $= \{M \mid M$ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge $M$ hat nichtdeterministische Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM $\tau$ mit $nspace_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **NSPACE($f$)** $= \{M \mid M$ hat nichtdeterministische Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$

# Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge $M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM $\tau$ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **DTIME($f$)** $= \{M \mid M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge $M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM $\tau$ mit $ntime_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **NTIME($f$)** $= \{M \mid M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$
- **Platzkomplexität**
  - Eine Menge $M$ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM $\tau$ mit $space_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **DSPACE($f$)** $= \{M \mid M$ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge $M$ hat nichtdeterministische Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM $\tau$ mit $nspace_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die $M$ entscheidet.
  - **NSPACE($f$)** $= \{M \mid M$ hat nichtdeterministische Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$

**Konkrete Analysen werden mit abstrakten deterministischen oder nichtdeterministischen Algorithmen durchgeführt**

# Wichtige Komplexitätsklassen

- $\mathcal{P} = \bigcup_k DTIME(n^k)$ **: Effiziente Lösbarkeit**
  - Menge der in polynomieller Zeit lösbaren Probleme

# Wichtige Komplexitätsklassen

- $\mathcal{P} = \bigcup_k DTIME(n^k)$ **: Effiziente Lösbarkeit**
  - Menge der in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
- $\mathcal{NP} = \bigcup_k NTIME(n^k)$ **:**
  - Menge der nichtdeterministisch in polynomieller Zeit lösbaren Probleme

# Wichtige Komplexitätsklassen

- $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \bigcup_k DTIME(n^k)$ **: Effiziente Lösbarkeit**
  - Menge der in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
- $\boldsymbol{\mathcal{NP}} = \bigcup_k NTIME(n^k)$ **:**
  - Menge der nichtdeterministisch in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
- **Weitere Zeitkomplexitätsklassen**
  - $EXPTIME = \bigcup_k DTIME(2^{n^k})$
  - $NEXPTIME = \bigcup_k NTIME(2^{n^k})$
  - $LOGTIME = DTIME(\log_2 n)$
  - $NLOGTIME = NTIME(\log_2 n)$

# Wichtige Komplexitätsklassen

- $\boldsymbol{\mathcal{P} = \bigcup_k DTIME(n^k)}$ **: Effiziente Lösbarkeit**
  - Menge der in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
- $\boldsymbol{\mathcal{NP} = \bigcup_k NTIME(n^k)}$ **:**
  - Menge der nichtdeterministisch in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
- **Weitere Zeitkomplexitätsklassen**
  - $EXPTIME = \bigcup_k DTIME(2^{n^k})$
  - $NEXPTIME = \bigcup_k NTIME(2^{n^k})$
  - $LOGTIME = DTIME(\log_2 n)$
  - $NLOGTIME = NTIME(\log_2 n)$
- **Platzkomplexitätsklassen**
  - $LOGSPACE = DSPACE(\log_2 n)$
  - $NLOGSPACE = NSPACE(\log_2 n)$
  - $PSPACE = \bigcup_k DSPACE(n^k)$
  - $NPSPACE = \bigcup_k NSPACE(n^k)$
  - $EXPSPACE = \bigcup_k DSPACE(2^{n^k})$
  - $EXPSPACE = \bigcup_k NSPACE(2^{n^k})$

# Beispiele für Komplexitätsklassen

- $\mathcal{P}$:
  - Arithmetische Operationen, Sortieren, Matrixmultiplikation, ...

# Beispiele für Komplexitätsklassen

- $\mathcal{P}$:
  - Arithmetische Operationen, Sortieren, Matrixmultiplikation, ...
- $\mathcal{NP}$:
  - Travelling Salesman, Cliquen-Problem, Erfüllbarkeitsproblem
  - Multiprozessor-Scheduling, Binpacking, Zusammengesetztheitstest

# Beispiele für Komplexitätsklassen

- $\mathcal{P}$:
  - Arithmetische Operationen, Sortieren, Matrixmultiplikation, ...
- $\mathcal{NP}$:
  - Travelling Salesman, Cliquen-Problem, Erfüllbarkeitsproblem
  - Multiprozessor-Scheduling, Binpacking, Zusammengesetztheitstest
- $\mathcal{EXPTIME}$:
  - Travelling Salesman, Cliquen-Problem, Erfüllbarkeitsproblem
  - Multiprozessor-Scheduling, Binpacking, Primzahltest

# Beispiele für Komplexitätsklassen

- $\mathcal{P}$:
  - Arithmetische Operationen, Sortieren, Matrixmultiplikation, ...
- $\mathcal{NP}$:
  - Travelling Salesman, Cliquen-Problem, Erfüllbarkeitsproblem
  - Multiprozessor-Scheduling, Binpacking, Zusammengesetztheitstest
- $EXPTIME$:
  - Travelling Salesman, Cliquen-Problem, Erfüllbarkeitsproblem
  - Multiprozessor-Scheduling, Binpacking, Primzahltest
- **Komplexitätsklassenhierarchie**

  $$LOGTIME \subseteq NLOGTIME \subseteq LOGSPACE \subseteq NLOGSPACE$$
  $$\subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \subseteq PSPACE \subseteq NPSPACE$$
  $$\subseteq EXPTIME \subseteq NEXPTIME \subseteq EXPSPACE \subseteq \ldots$$

  - Es wird vermutet, daß alle Inklusionen echt sind