Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz, Dipl. Math. Eva Richter

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Wintersemester 2003/04

Blatt 3 — Abgabetermin: 28. November 13.00 Uhr

Das Übungsblatt soll dazu dienen, sich mit rekursiven Funktionen vertraut zu machen.

Aufgabe 3.1

Beweisen Sie, falls möglich, für die folgenden Funktionen, daß sie primitiv rekursiv sind !

a) $f_- : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit:

$$f_-(m,n) = \begin{cases} m-n & \text{falls } m \geq n, \\ n-m & \text{sonst,} \end{cases}$$

b) $f_{ggt} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit:

$f_{ggt}(n,m)$ ist die größte natürliche Zahl k sd. $m/k \in \mathbb{N}$ und $n/k \in \mathbb{N}$.

c) $f_{kgv} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit:

$f_{kgv}(m,n)$ ist die kleinste natürliche Zahl k, sd. $k/m \in \mathbb{N}$ und $k/n \in \mathbb{N}$.

d) $f_{log} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit:

$f_{log}(n,m)$ ist der ganzzahlige Anteil von $log_n(m)$.

e) $Mn_t[f] : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit:

$$Mn_t[f](n) = \begin{cases} \text{das kleinste } i \leq t \text{ mit } f(n,i) = 0 \text{ falls dies existiert} \\ t+1 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist f eine primitiv rekursive Funktion und t eine feste natürliche Zahl.

Aufgabe 3.2

Geben Sie für die (partielle) Funktion

$f_{binom} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

mit $f_{binom}(i,j) = \binom{i}{j}$ eine induktive Berechnungsvorschrift an!
(Tip: Benutzen Sie die Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks.)

Aufgabe 3.3

Ein oft genutztes Verfahren zur Definition von Klassen ist das der Hüllenbildung. Man definiert eine bestimmte Klasse von Objekten aus einem Grundbereich als die kleinste Teilmenge aus diesem Grundbereich die abgeschlossen ist unter einer vorgegebenen Menge von Operationen.

Zeigen Sie, daß die Menge der primitiv rekursiven Funktionen abgeschlossen ist unter beliebiger Vertauschung von Variablen, d.h., zeigen Sie, daß für alle primitiv rekursiven Funktionen $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und alle Permutationen π auch die Funktionen $g_\pi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(i)}, \ldots, x_{\pi(n)})$ primitiv rekursiv sind (für beliebige $n \in \mathbb{N}$).