Automatisierte Logik und Programmierung II

Teil III

Aufbau von Beweissystemen

Computerunterstützung für logisches Schliessen

- **Proof Checking**: Frühe Systeme, PCC
  - Überprüfung gegebener formaler Beweise durch Computer
  - Leicht zu programmieren aber extrem mühsam in Anwendung
- **Proof Editing**:
  - Computer führt Regeln aus und zeigt ungelöste Teilprobleme
  - Benutzer konstruieren Beweise interaktiv durch Angabe der Regeln
  - Leicht zu programmieren, Anwendbarkeit abhängig von Benutzerinterface
- **Taktisches Theorembeweisen**:
  - Beweiskonstruktion durch programmierte Anwendung von Inferenzregeln
  - Entwurf anwendungsspezifischer Inferenzregeln durch Benutzer möglich
  - Flexibel und sicher, gut für mittelgroße Anwendungen
- **Beweisprozeduren** fest eingeschränkte Anwendungsbereiche
  - Entscheidungsprozeduren: automatische Tests for entscheidbare Probleme
  - Theorembeweiser: vollständige Beweissuche in Prädikatenlogik
  - Beweisplaner, Rewriting, Model Checking, Computer Algebra, ...
  - Effizient aber unflexibel durch Verwendung maschinennaher Techniken

Beweissysteme für die Typentheorie

- **Ausdruckstarke Theorien sind unentscheidbar**
  - Vollautomatische Beweissysteme nicht praktikabel
  - Interaktive Beweiskonstruktion als Basismechanismus
- **Begrenzte Automatisierung möglich**
  - Strategische Beweissuche durch Taktiken (einfach)
  - Entscheidungsprozeduren für Teiltheorien (theoretisch aufwendig)
  - Einbindung externer Beweisprozeduren (theoretisch & technisch schwierig)
- **Existierende Systeme**
  - Nuprl: Konstruktive Typentheorie (ITT)
  - Coq: Calculus of Constructions
  - Alf: Martin-Löf Typentheorie (Name ändert sich ständig)
  - PVS: Klassische Variante der Typentheorie
  - HOL: Klassische Typentheorie
  - Isabelle: Infrastruktursystem, Hauptanwendung HOL
  - MetaPRL: Infrastruktursystem, Hauptanwendung ITT und CZF

Automatisierte Logik und Programmierung

Lektion 12

Interaktive Beweisassistenten

1. Ziele einer Implementierung
2. ML als formale Beschreibungssprache
3. Implementierung der Objektsprache
4. Systemkomponenten
5. Zur Korrektheit der Implementierung

Implementierung von Beweissystemen – was ist zu tun?

- **Datenstrukturen für Kernbegriffe der Theorie**
  - Formalisierung der Metatheorie: Beweis, Regeln, Term, Abstraktion, ...
  - Operatoren zur Konstruktion und Analyse konkreter Objekte
  - Benötigt Repräsentation der Metasprache als Programmiersprache
- **Basisterme und -regeln der Theorie implementieren**
  - In Systemtabellen oder als explizite Objekte der Bibliothek
- **Mechanismen zur Verarbeitung formalen Wissens**
  - Refiner: Anwendung von Inferenzregeln (und Taktiken) auf Beweisziele
    - Basisinferenzmaschine ohne eigene "Intelligenz"
  - Library: Verwaltung des gesamten formalen Wissens
  - Editor: visuelles Benutzerinterface
    - Bearbeitung von Termen, Beweisen, Definitionen, ...

ML: Formale Metasprache als Programmiersprache

- **Entstanden im Edinburgh LCF Projekt** (frühe 70er Jahre)
  - Formales Englisch zur Unterstützung von logischer Symbolverarbeitung
  - Standardisiert Ende der 80er Jahre als SML und Caml
  - Nuprl benutzt die Originalversion "Classic ML" (Appendix B des Manuals)
- **Funktionale Programmiersprache höherer Stufe**
  - Programmieren = Definition + Anwendung von Funktionen (wie λ-Kalkül)
  - Pattern Matching unterstützt Verständlichkeit komplexe Definitionen
- **Erweiterbare polymorphe Typdisziplin**
  - Grundkonstrukte: `int`, `bool`, `tok`, `string`, `unit`,
    A`->`B, A`#`B, A`+`B, A `list`
  - Anwenderdefinierbare abstrakte und rekursive Datentypen
  - Typprüfung durch erweiterten Hindley/Milner Typechecking Algorithmus
- **Kontrollierte Behandlung von Ausnahmen**
  - Anwenderdefinierbare Verarbeitung von Laufzeitfehlern

Abstrakte Datentypen in ML

```
abstype time = int # int
 with maketime(hrs,mins)
              = if hrs<0 or 23<hrs or mins<0 or 59<mins
                   then fail
                   else abs_time(hrs,mins)
 and hours t    = fst(rep_time t)
 and minutes t = snd(rep_time t)
;;
```

```
absrectype * bintree = * + (* bintree) # (* bintree)
 with mk_tree(s1,s2) = abs_bintree (inr(s1,s2) )
 and left s           = fst ( outr(rep_bintree s) )
 and right s          = snd ( outr(rep_bintree s) )
 and atomic s         = isl(rep_bintree s)
 and mk_atom a        = abs_bintree(inl a)
;;
```

`abs_`T, `rep_`T: Konversionen: explizite $\longleftrightarrow$ abstrakte Repräsentation

Datenstrukturen für die Implementierung von ITT

- **Präzisierung der informalen Definitionen**
  – Terme, Regeln, Beweise, Abstraktion, Bibliothek, ...
- **Abstrakte Datentypen kapseln Objekte**
  – Kontrollierter Zugriff nur durch Konstruktoren und Destruktoren
- **Besonderer Schutz für Beweise**
  – Änderung nur durch Anwendung von Regeln möglich
  – Verhindert unbefugte Manipulationen und Beweisen
- **Unterstützung für Beweistaktiken**
  – Beweise können nur mit Taktiken verändert werden
  – Taktiken können (im Endeffekt) nur aus Regeln erzeugt werden

Terme

Struktur: $opid\{p_1{:}F_1, ..p_k{:}F_k\}(x^1_1, ..x^1_{m_1}.t_1; \ldots x^n_1, ..x^n_{m_n}.t_n)$

$opid$	Operatorname
$p_j{:}F_j$	Parameter, bestehend aus Parameterwert und Parametertyp
$x^i_1, \ldots, x^i_{m_i}.t_i$	gebundener Term, wobei t_i Term, x^j_k Variable

---

```
absrectype  term = (tok # parm list) # bterm list
and        bterm = var list # term
  with mk_term (opid,parms) bterms = abs_term((opid,parms),bterms)
  and  dest_term t                 = rep_term t
  and  mk_bterm vars t             = abs_bterm(vars,t)
  and  dest_bterm bt               = rep_bterm bt
;;
abstype  var  = tok
  with mkvar t = abs_var t
  and  dvar  v = rep_var v
;;
abstype  level_exp  = tok + int   with   ...
abstype  parm = int + tok + string + var + level_exp + bool  with   ...
```

Sequenzen

Struktur: $x_1 : T_1, \ldots, x_n : T_n \vdash C$

x_i	Variable,
T_i, C	Term
$x_i : T_i$	Deklaration
$x_1 : T_1, \ldots, x_n : T_n$	Hypothesenliste
C	Konklusion

```
abstype  declaration = var # term
  with mk_assumption v t = abs_declaration(v,t)
  and  dest_assumption d = rep_declaration d
;;
lettype  sequent = declaration list # term;;
```

Zugriff auf Sequenzkomponenten durch Beweisdestruktoren

Regeln und Beweise

Inferenzregel: $r = (\text{dec},\text{val})$

dec Dekomposition: Abbildung von Sequenzen in Listen von Sequenzen

val Validierung: Abbildung von Listen von Termen und Sequenzen in Terme

Beweis mit Wurzel Z: Sequenz Z oder Struktur $\pi = (Z, r, [\pi_1,..,\pi_n])$

Z	Sequenz
r	Inferenzregel
$\pi_1,\ldots,\pi_n$	Beweise, deren Wurzeln die Teilziele von $\text{dec}(Z)$ sind

```
abstype  rule     = .....
absrectype  proof = sequent # rule # proof list
  with mk_proof_goal decs t = abs_proof((decs,t), ◇,[])
  and  refine r p    = let children   = deduce_children r p
                       and validation= deduce_validation r p
                       in children, validation
  and  hypotheses p = fst (fst (rep_proof p))
  and  conclusion p = snd (fst (rep_proof p))
  and  refinement p = fst (snd (rep_proof p))
  and  children   p = snd (snd (rep_proof p))
;;
lettype  validation = proof list -> proof;;
lettype  tactic     = proof -> (proof list # validation);;
```

Repräsentation von Regeln und Beweisen

- **Regeln repräsentiert als Regelschemata**
  - Beweisbaum speichert angewandte Regel in jedem Knoten
  - `refine` wandelt Regeln in Taktiken um
  - Taktik verwendet Pattern Matching und Term Rewriting
  - Erleichtert Komposition von Regeln
- **Taktiken verfeinern Regelbegriff**
  - Taktiken sind Dekompositionen
  - Anwendung der Dekomposition erzeugt Teilziele und Validierung
  - Anwendung der Validierung baut Beweisbaum, wenn Blätter bewiesen
- **Korrektheit des Systems leicht verifizierbar**
  - Überprüfe korrekte Repräsentation der Regeln (Bibliotheksobjekte)
  - Verifiziere Implementierung von `refine`
- **Refiner kann ausgelagert werden**
  - Prozedur muß `deduce_children` und `deduce_validation` bereitstellen

Repräsentation definitorischer Erweiterungen

- **Struktur einer Abstraktion:** $lhs \ \equiv \ rhs$

  lhs (Abstraktions-)Term, dessen Unterterme Variablen sind

  rhs Term, dessen freie Variablen auch in lhs frei sind

  Neuer Term auf linker Seite wird durch Term der rechten Seite definiert

- **Einfache Repräsentation als Datenstruktur**
  - Datentyp: `abstype abstraction = term # term`
  - Konstruktor `mk_abstraction` testet Zusatzbedingungen

- **Abstraktionsanwendung ist aufwendiger** (Folie 13)
  - Pattern Matching und Instantiierung von Variablen
  - Variablen zweiter Stufe beschreiben Terme mit gebundenen Variablen

- **Unabhängige Behandlung der Darstellungsform**
  - **Display-Formen** beschreiben textliche Darstellung, Formatierung, Klammerung, Abkürzungen, ...
  - Unterstützt vertraute, einfache und verständliche Notationen

Repräsentation von Bibliothekskonzepten

- **Bibliothek: formales mathematisches Lehrbuch**
  - Definitionen, Sätze, Beweise, Methoden, Anmerkungen, Regeln, ...
  - Ermöglicht zusätzliche Inferenzregeln: `lemma`, `extract`, ...
- **Bibliotheksstruktur**
  - Ungeordnete Kollektion von Objekten
  - Strukturen (Theorien, Directories, Links,...) können aufgesetzt werden
- **Bibliotheksobjekte**

  Tupel bestehend aus Inhalt und Verwaltungsinformation

Inhalt:	Abstraktion, Display Form, (Teil-)Beweis, ML code, Text, ...
Art:	`ABS`, `DISP`, `STM`, `CODE`, `COM`, `RULE`, `DIR`, ...
Eigenschaften:	Status, Name, Aktiv?, Referenzumgebung, ...
Extra:	Abhängige Objekten, interne Id, sichtbare Position, ...

In Nuprl wird jedes Objekt als abstrakter Term definiert

Implementierung der konkreten Objektsprache

- **Basisterme**

Operator und Termstruktur	*Darstellungsform*
function{}$(S;\, x\,.T)$	$x\!:\!S\!\rightarrow\!T$
lambda{}$(x\,.t)$	$\lambda x\,.t$
apply{}$(f;t)$	$f\ t$
$\vdots$	$\vdots$

  – Auflistung der Abstraktionsterme in ML-Operatorentabelle

  – Erstellung von Display Formen für jeden Basisterm

- **Konstruktoren & Destruktoren**

```
let mk_function_term x S T = make_term (`function`,[]) [[],S; [x],T]
and mk_lambda_term x t = make_term (`lambda`,[]) [[x],t]
and mk_apply_term f a = make_term (`apply`,[]) [[],f; [],a]
       ⋮
let dest_function t = let op,[(),a; [x],b] = dest_term t in x,a,b
and dest_lambda t = let op,[[x],b] = dest_term t in x,b
and dest_apply t = let op,[(),f; [],a] = dest_term t in f,a
       ⋮
```

- **Aufbau durch Verwendung von Bibliotheksobjekten**

  – Operatorentabelle, Konstruktoren, Destruktoren in Code-Objekten

  – Display Formen und Inferenzregeln sind explizite Bibliotheksobjekte

$\mapsto$ **schnelle, flexible Implementierung “beliebiger” Theorien**

Implementierung des konkreten Inferenzsystems

- **Inferenzregeln dargestellt als Regel-Objekte**

$\Gamma \vdash S \times T \;\lfloor \textbf{ext}\ \langle s, t\rangle \rfloor$
by `independent_pairFormation`
$\Gamma \vdash S \;\lfloor \textbf{ext}\ s \rfloor$
$\Gamma \vdash T \;\lfloor \textbf{ext}\ t \rfloor$

- RULE: independent_pairFormation

```
H  ⊢ A × B ext <a, b>
  BY independent_pairFormation ()

  H  ⊢ A ext a
  H  ⊢ B ext b
```

- **Substitutionen und Parameter explizit dargestellt**

$\Gamma \vdash x_1{:}S_1 \to T_1 = x_2{:}S_2 \to T_2 \in \mathbb{U}_j \;\lfloor \mathsf{Ax} \rfloor$
by `functionEquality` $\boxed{x}$
$\Gamma \vdash S_1 = S_2 \in \mathbb{U}_j \;\lfloor \mathsf{Ax} \rfloor$
$\Gamma, x{:}S_1 \vdash T_1[x/x_1] = T_2[x/x_2] \in \mathbb{U}_j \;\lfloor \mathsf{Ax} \rfloor$

- RULE: functionEquality

```
H  ⊢ (x1:a1 → b1) = (x2:a2 → b2)
  BY functionEquality y

  H  ⊢ a1 = a2
  H y:a1 ⊢ !subst(b1; x1.y) = !subst(b2; x2.y)
```

- **Aufruf von Spezialprozeduren möglich**

- RULE: arith

```
H  ⊢ C ext t
  BY arith 𝕌

     Let SubGoals t = CallLisp(ARITH)
  SubGoals
```

Komponenten von Beweissystemen

- **Inferenzmaschine** (Refiner)
  - Anwendung von Inferenzregeln auf Beweisziele
  - Erzeugung noch zu bearbeitender Teilprobleme
- **Bibliothek** (Library)
  - Logische Datenbank zur Verwaltung von formalem Wissen
- **Benutzerinterface** (Editor)
  - Interface zur Kommunikation mit der Bibliothek
  - Visuelle Bearbeitung von Terme, Beweise, Definitionen, ...
- **Optionale Komponenten**
  - Extraktion von Programmen aus Beweisen
  - Evaluator: Ausführung von Programmen
  - Exportmechanismen: Ascii Repräsentation, LaTeX, HTML, ...

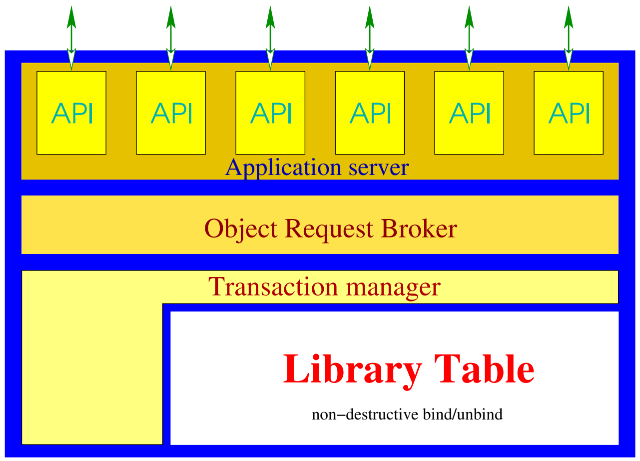
Mechanismen sind unabhängig
als separate Prozesse implementieren?

Verarbeitung von Inferenzregeln (Refiner)

- **Basisinferenzmaschine ohne eigene "Intelligenz"**
  - Implementierung von `refine`
    - Wandelt Inhalte der Regel-Objekte in Taktiken um
- **Schutz gegen unbefugte Manipulation von Beweisen**
  - Bearbeitung von Beweisobjekten muß Refiner benutzen
- **Inferenzmechanismen**
  - Pattern Matching + Term Rewriting für die meisten Regelschemata
  - Entscheidungsprozeduren für `arith` und `equality`
  - β-Reduktion für `compute`
  - Matching zweiter Stufe für Auf- und Rückfalten von Abstraktionen
- **Unabhängig vom restlichen Beweissystem**
  - Implementierung als separater Prozess möglich
  - Abfrage der Regeln durch Kommunikation mit Bibliothek realisierbar
  - Erlaubt simultane und asynchrone Verwendung mehrerer Refiner

Mathematisch logische Wissensbank (Library)

- **Grundoperationen zur Verwaltung von Objekten**
  - Erzeugung, Löschen, Umbenennen, Verschieben, (De)Aktivieren, Drucken,
  - Strukturierung in Theorien und Directories, Browsen, Suchen, ...
- **Wissensarchivierung**
  - Zertifikate: Rechtfertigung für gespeicherte Inferenzen
  - Explizite Links und logische Abhängigkeiten zwischen Objekten
- **Anbindung anderer Komponenten**
  - Refiner, Editor, externe Systeme als Klienten
  - Mehrfache Instanzen möglich



- **Datenbankoperationen**
  - Dauerhafter Objektspeicher, Konsistenzsicherung
  - Backup alter Zustände, Undo, Versionskontrolle
  - Transaktionsgesteuerter simultaner Zugriff mehrerer Klienten
  - Selektive Sichten auf Teile der Bibliothek

Benutzerinterface (Editor)

Visuelle Unterstützung zur Bearbeitung von Wissen

- **Navigator**
  – Navigation durch Bibliothek und Aufruf bereitgestellter Operationen
- **Kommandointerface**
  – Interpretation von ML-Programmen und metasprachlichen Befehlen
- **Beweiseditor**
  – Beweisführung und Navigation durch Beweisbäume
- **Termeditor**
  – Strukturelles Editieren von Termen in Präsentationsform
- **Objekteditoren**
  – Erstellung und Modifikation spezifischer Objekte
- **Unabhängig**
  – Mehrere Editoren können gleichzeitig auf dieselbe Library zugreifen

Nuprl's Navigator

Manual §4

- **Visuelle Navigation durch Bibliothek**
  - Keyboard- oder Maus-gesteuertes Durchlaufen
  - Patterngesteuerte Namenssuche
  - Springen zu gespeicherten Positionen
- **Ausführung von Bibliothekskommandos**
  - Vorbereitete "Buttons" für die wichtigsten Operationen
    - Erzeugung von Objekten, Theorien, Definitionen, Modulen
    - Löschen, Kopieren, Verschieben, Umbenennen, Drucken, ...
    - Import, Export, Drucken und Dokumentation von Theorien
  - Aufruf der Operationen öffnet Kommandomenü
  - Graphische Interaktion verbesserungsfähig (i.w. Textterminal)
- **Undo und Redo für jede Operation**
- **Anpassbar**
  - Buttons und Erscheinungsbild durch Bibliotheksobjekte definiert

Browsen der Bibliothek mit Nuprls Navigator

- TERM: Navigator

```
MkTHY*  OpenThy*  CloseThy*  ExportThy*  ChkThy*  ChkAllThys*  ChkOpenThy*
CheckMinTHY*  MinTHY*  EphTHY*  ExTHY*

Mill*  ObidCollector*  NameSearch*  PathStack*  RaiseTopLoops*
PrintObjTerm*  PrintObj*  MkThyDocObj*  ProofHelp*  ProofStats*  showRefEnvs*  FixRefEnvs*
CpObj*  reNameObj*  EditProperty*  SaveObj*  RmLink*  MkLink*  RmGroup*

ShowRefenv*  SetRefenvSibling*  SetRefenvUsing*  SetRefenv*  ProveRR*  SetInOBJ*
MkTHM*  MkML*  AddDef*  AddRecDef*  AddRecMod*  AddDefDisp*  AbReduce*  NavAtAp*
Act*  DeAct*  MkThyDir*  RmThyObj*  MvThyObj*

↑↑↑↑  ↑↑↑  ↑↑   ↑  ←  <>
↓↓↓↓  ↓↓↓  ↓↓   ↓  →  ><

Navigator: [num_thy_1; standard; theories]

Scroll position : 5

List Scroll : Total 159,  Point 5,  Visible : 10
 ----------------------------------------------
    CODE  TTF  RE_init_num_thy_1
    COM   TTF  num_thy_1_begin
    COM   TTF  num_thy_1_summary
    COM   TTF  num_thy_1_intro
    DISP  TTF  divides_df
 -> ABS   TTF  divides
    STM   TTF  divides_wf
    STM   TTF  comb_for_divides_wf
    STM   TTF  zero_divs_only_zero
    STM   TTF  one_divs_any
 ----------------------------------------------
```

- Bewegung des Nav Points durch Keyboard, Maus, oder Arrow-buttons
- Öffnen von Objekten durch "rechtsgehen" (oder Mittel-Click)
- Sichtbarkeitsbereich kann vergrößert oder verkleinert werden

Editieren von Termen

Manual §5

- **Mathematische Notation erlaubt keine Parser**
  - Zu reichhaltig (nicht kontextfrei) und nicht einheitlich geregelt
  - Notation ist keine gute Repräsentationform für logische Konzepte
- **Typentheorie trennt Notation von Struktur**
  - Logische Struktur leichter zu verarbeiten
  - Separate Darstellungsform sorgt für verständliche Notation
- **Editiere logische Struktur von Termen**
  - bei gleichzeitiger Präsentation der Darstellungsform auf dem Bildschirm
- **Struktureditor**
  - Erzeugung des Termbaums durch Ausfüllen von Slots in Darstellungsform
  - Kenntnis der genauen Syntax nicht erforderlich
  - Umdenken erforderlich: keine lineare Eingabe von Text

Benutzer kann mit verständlicher Notation arbeiten

Bearbeiten von Beweisen

Manual §6

- **Sichtbare Entwicklung von Beweisen**
  - Navigation durch Beweisbaum mit Maus und Keyboard
  - Arbeiten im einzelnen Beweisknoten
  - Kontrolliertes Interface zum Refiner (via Library)
  - Graphische Interaktion verbesserungsfähig (i.w. Textterminal)
- **Operationen auf Beweisen**
  - Erzeugung von Beweiszielen mit Term-Editor
  - Synchrone oder asynchrone Ausführung von Taktiken
  - Komprimierung und Expansion bis zu elementaren Schritten
  - Verarbeitung von Backup-Beweisen und 'Schmierblatt'-Beweisen
  - Erzeugung von Extrakt-Termen

Typischer Beweisknoten

- PRF: intsqrt

```
① # top 1
②
③ 1. x:ℕ
   ⊢ ∃y:ℕ. y²≤x ∧ x<(y+1)²

④ BY NatInd 1

⑤ # 1 1
   .....basecase.....
   ⊢ ∃y:ℕ. y²≤0 ∧ 0<(y+1)²

⑥ BY exR ⌜0⌝
   There is 1 hidden subgoal

⑤ # 1 2
   .....upcase.....
   1. x:ℤ
   2. 0<x
   3. ∃y:ℕ. y²≤x-1 ∧ x-1<(y+1)²
   ⊢ ∃y:ℕ. y²≤x ∧ x<(y+1)²

⑤ BY
```

- PRF: intsqrt

```
① # top 1 2
② .....upcase.....
③ 1. x:ℤ
   2. 0<x
   3. ∃y:ℕ. y²≤x-1 ∧ x-1<(y+1)²
   ⊢ ∃y:ℕ. y²≤x ∧ x<(y+1)²

④ BY
```

① Status und Adresse im Beweisbaum

② Annotation des Beweisknotens

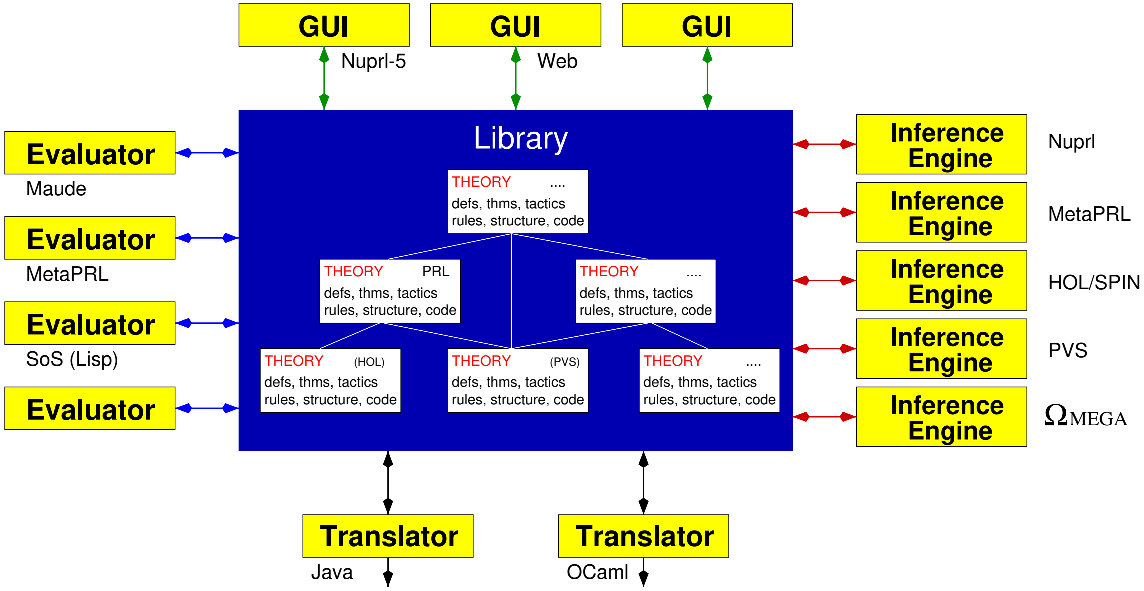
③ Beweisziel (Sequenz)

④ Angewandte Beweistaktik

⑤ Teilziele mit Status, Adresse, Sequenz (neue Hypothesen)

⑥ Beweise der Teilziele, sofern vorhanden

Nuprl: Gesamtarchitektur



- **Kooperierende Prozesse**
  - Library im Zentrum
  - "Beliebig viele" Refiner, Editoren und externe Systeme als Klienten
  - Angebundene externe Klienten: MetaPRL, JProver
- **Kooperierende Inferenzmaschinen**
  - Asynchrones und verteiltes Theorembeweisen (In Erprobung)
- **Reflexive Systemstruktur**
  - Systemdesign in Library enthalten (und veränderbar)