Automatisierte Logik und Programmierung

Lektion 15

Beweisautomatisierung für die Logik erster Stufe

1. Taktische Beweismethoden
2. Maschinennahe Beweistechniken
3. JProver: Integration externer Prozeduren

Beweisführung in Logik erster Stufe

- **Interaktive Anwendung logischer Regeln**
  - Benutzer gibt Regeln des Sequenzenkalküls und Parameter an
  - System führt Regeln aus und liefert Teilziele

  Mühsam, aber sicher

- **Taktikbasierte Beweissuche**
  - Taktik sucht nach anwendbaren Regeln
  - Analyse von Konklusion & Hypothesen zur Bestimmung von Parametern

  Hilfreich in der Praxis aber unvollständig wegen begrenzter Vorausschau

- **Vollautomatische Beweisverfahren** $\mapsto$ CADE, TABLEAUX, …
  - Transformation einer Sequenz in effiziente Datenstruktur
  - Charakterisierung gültiger Sequenzen durch Eigenschaften dieser Struktur
  - Beweiser benutzt Standardverfahren zur Überprüfung der Eigenschaften
  - Viele "Standalone" Methoden für klassische Logik
  - Wenige Verfahren können auf konstruktive Logik erweitert werden

  Integration aufwendig, da Konsistenzcheck oder Beweisterme erforderlich

Schrittweise Steigerung des Automatisierungsgrades

1. Interaktion mit Regeln der Logik erster Stufe

– Konnektive und Quantoren definiert über Curry-Howard Isomorphie

– Logikregeln implementiert als Dekomposition + Wohlgeformtheitsprüfung

```
let allR = D 0 THENW Auto
```

– Tactical TryOnC verhindert Anwendung von Regeln auf unpassende Ziele

```
let andR = TryOnC (D 0) is_and_term
and orR1 = TryOnC (Sel 1 (D 0) THENW Auto) is_or_term
and orR2 = TryOnC (Sel 2 (D 0) THENW Auto) is_or_term
and impR = TryOnC (D 0 THENW Auto) is_imp_term
        ⋮
```

– Tactical Run erzeugt gekapselte Varianten der Regeln

andI, orI1, orI2, impI, ..., andE i, orE i, impE i, ...,

Regeln werden bei Inspektion interner Beweise nicht aufgefaltet

2. Bestimmung anwendbarer Regeln

– Tactical `TryAllHyps` wendet Taktik auf erste passende Hypothese an

```
let contradiction = TryAllHyps falseE is_false_term
let conjunctionE = TryAllHyps andE is_and_term
let disjunctionE = TryAllHyps orE is_or_term
let existentialE = TryAllHyps exE is_ex_term
```

– Einführungsregeln können namentlich bestimmt werden

```
let nondangerousI pf =
  let kind = operator_id_of_term (conclusion pf)
  in
   if mem kind [`all`;`not`;`implies`;`rev_implies`;`iff`;`and`]
     then Run (kind ^ `R`) pf
     else failwith `tactic inappropriate`
  ;;
```

3. Verkettung von Implikationen & Äquivalenzen

– Tactical `Chain` wendet Taktik t auf ausgewählte Hypothesen an und schließt mit Basistaktik ab

```
let Chain t hyps groundtac =
  letrec chainfor i =
    groundtac
    ORELSE
    if i = 0 then Id
      else TryOn hyps (\hyp. t hyp THEN (Complete (chainfor (i-1))))
  in
    chain_for chain_limit
;;

let imp_chain pf =
    Chain impE (select_hyps is_imp_term pf) Hypothesis pf ;;
let not_chain =
    TryAllHyps (\pos. notE pos THEN imp_chain) is_not_term ;;
let iff_chain =
    TryAllHyps (\pos. (iffE pos THEN (imp_chain ORELSE not_chain))
                ORELSE (iffE_b pos THEN (imp_chain ORELSE not_chain))
                ) is_iff_term;;
```

Taktikbasierte Beweisführung IV

Metalevel Analyse zur Instantiierung von Quantoren

```
let match_subEx quantified_term assumption  =
   letrec match_sub_aux vars exprop =
     map (\var.assoc var (match vars exprop assumption)) (rev vars)
    ? let var,T,prop = dest_exists exprop in match_sub_aux (var.vars) prop
   in
      match_sub_aux [] quantified_term;;

letrec exIon terms pf =
    let t.rest = terms in (exI t THEN exIon rest) pf  ?  Id pf;;

let InstantiateEx =
  let InstEx_aux pos pf =
     let sigma = match_subEx (conclusion pf) (type_of_hyp pos pf)   in
        (exIon (map snd sigma) THEN (NthHyp pos)) pf
  in
     OnSomeHyp InstEx_aux;;

let InstantiateAll =
  let InstAll_aux pos pf =
     let sigma = match_subAll (type_of_hyp pos pf) (conclusion pf) in
          (allEon pos (map snd sigma) THEN (OnLastHyp hypothesis)) pf
  in
      TryAllHyps InstAll_aux  is_all_term;;
```

Ein einfacher taktikbasierter Beweiser

Sortiere Regelanwendungen nach Aufwand für Beweissuche

```
let simple_prover = Repeat
                    (      Hypothesis
                    ORELSE contradiction
                    ORELSE InstantiateAll
                    ORELSE InstantiateEx
                    ORELSE conjunctionE
                    ORELSE existentialE
                    ORELSE nondangerousI
                    ORELSE disjunctionE
                    ORELSE not_chain
                    ORELSE iff_chain
                    ORELSE imp_chain
                    );;

letrec prover = simple_prover
                THEN Try (        Complete (orI1 THEN prover)
                          ORELSE (Complete (orI2 THEN prover)))
                ;;
```

Mögliche Verbesserungen des Beweisers

- **Verbessertes Matching**
  - Matching mit Teiltermen von Konjunktionen in Hypothesen
  - Matching mit Teiltermen von Disjunktionen in der Konklusion
  - Gleichzeitige Analyse von Quantoren in Hypothesen und Konklusion
  - Behandlung verschachtelt wechselnder Quantoren

  ⋮
- **Zielgerichtete Verkettung**
  - Auswahl relevanter Implikationen & Äquivalenzen durch Matching
  - Analyse von Teilen der Prämissen von Implikationen

  ⋮
- **Taktikbasiertes Beweisen hat Grenzen**
  - Regeln `exR`, `allL`, ... benötigen Parameter
  - Regeln `orR1`, `orR2`, ... benötigen Steuerung
  - Auswahl der richtigen Regel benötigt "Planung" des Beweises
  - Vollständige Beweissuche braucht "Vorausschau" durch Metalevel Analyse

Maschinennahe Beweistechniken

- **Ziel: einfache und schnelle Suchtechnik**
  - Verzicht auf intuitives Verständnis im Beweissuchverfahren
  - Maschinennahe Charakterisierung logischer Gültigkeit
  - Effiziente, “low-level” Suchstrategien auf Basis spezieller Datenstrukturen

- **Viele unabhängig entstandene Verfahren**
  - **Resolution**: Widerlegungsverfahren für Formeln in DNF $\mapsto$ Prolog
    - Verschmelze Klauseln mit “komplementären” Literalen
    - Komplementaritätstest erster Stufe benötigt **Unifikation**
    - Ziel ist Herleitung der leeren Klausel
  - **Matrixmethoden**: Kompakte Repräsentation von Suchbäumen
    - Matrix repräsentiert Verzweigungsstruktur von Beweisbäumen
    - Teste, ob alle Pfade komplementäre Literale enthalten
  - **Inverse Methode**: Ähnlich zur Resolution
  - **Modellelimination**: Zeige, daß kein Modell die Formel falsifizieren kann
  - **Davis Putnam**: Iterative Anwendung von Aufspaltung und Reduktion
    - Schnellstes Verfahren für Aussagenlogik, nicht erweiterbar
  - **Wenige Verfahren liefern Beweisterme**

Tableauxmethodik

- **Sequenzenbeweise enthalten viel Redundanz**
  - Jeder Knoten enthält alle gültigen Annahmen und die Konklusion
  - Inferenzregeln basieren auf logischen Konnektiven und Quantoren
- **Tableauxmethode verkürzt Sequenzenbeweise**
  - **Polarität** kennzeichnet Unterschied zwischen Annahmen und Konklusion
  - Inferenzregeln werden zu Klassen ähnlicher Struktur zusammengefaßt

`andL` i	$\Gamma,\, A\wedge B,\, \Delta \vdash C$ $\Gamma,\, A,\, B,\, \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A\wedge B$ $\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash B$	`andR`
`orL` i	$\Gamma,\, A\vee B,\, \Delta \vdash C$ $\Gamma,\, A,\, \Delta \vdash C$ $\Gamma,\, B,\, \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A\vee B$ $\Gamma \vdash A$	`orR1`
		$\Gamma \vdash A\vee B$ $\Gamma \vdash B$	`orR2`

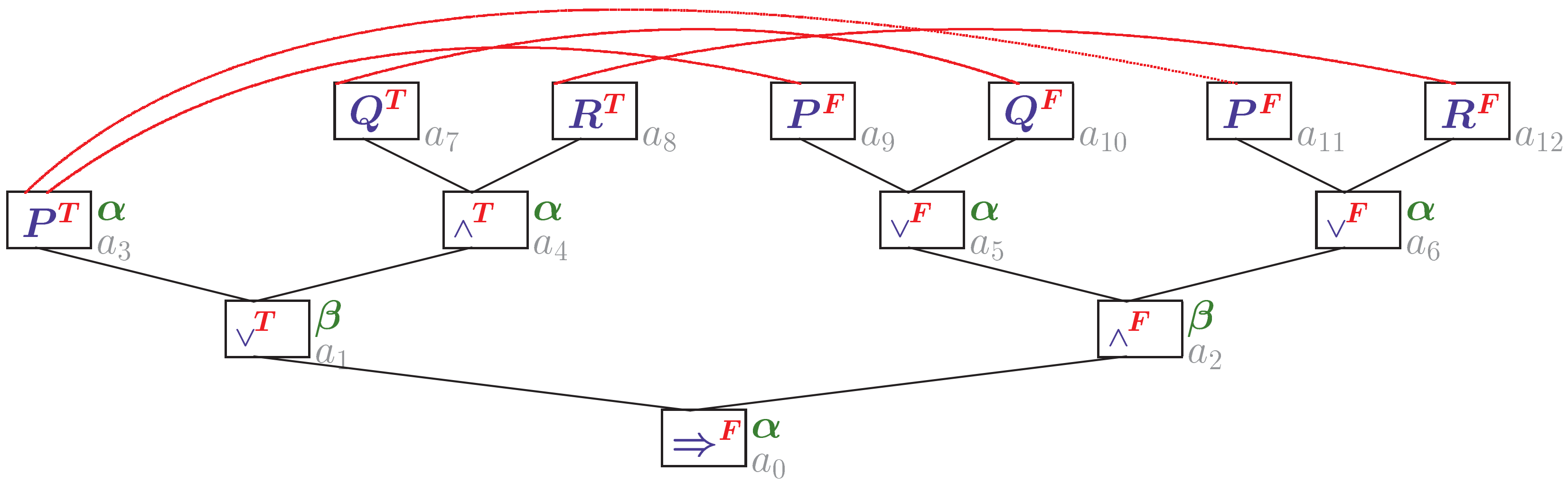
  - `andL` und `orR`: Dekomposition liefert ein Teilziel **Typ α**
  - `andR` und `orL`: Dekomposition verzeigt Beweis **Typ β**
  - `allL` und `exR`: Dekomposition instantiiert Variable mit Term **Typ γ**
  - `allR` und `exL`: Dekomposition deklariert neue Variable **Typ δ**
  - `hypothesis`: Gleiche Formeln mit anderer Polarität **Komplementarität**

Matrixmethoden: Kompakte Sequenzenbeweise

- **Konstruktion von Beweisbäumen ist aufwendig**
  - Sequenzenbeweise zerlegen Formeln bis `hypothesis` Regel anwendbar
  - Regeln ergänzen Teilformeln in Nachfolgerknoten des Beweises
- **Kompakte Repräsentation von Beweisbäumen**
  - Formelbaum enthält bereits alle Teilformeln
  - Tableauxtypen und Polaritäten können top-down ergänzt werden
    - Beide hängen nur vom Konnektiv und bisheriger Polarität ab
  - Äste eines Sequenzenbeweises sind durch β-Knoten definiert
  - Teilformeln mit α-Knoten als gemeinsamen Vorgänger erscheinen im gleichen Ast eines Sequenzenbeweises
  - `hypothesis` Regel $\hat{=}$ komplementäre atomare Formeln in "α-Beziehung"
- **Einfache Beweismethode**
  - Ordne **Literale** (atomare Formeln) in zweidimensionaler Matrix an
    - Nebeneinander $\hat{=}$ α-Beziehung, übereinander $\hat{=}$ β-Beziehung
  - Teste alle Pfade auf Existenz komplementärer Literale

Matrixmethoden: annotierte Formelbäume

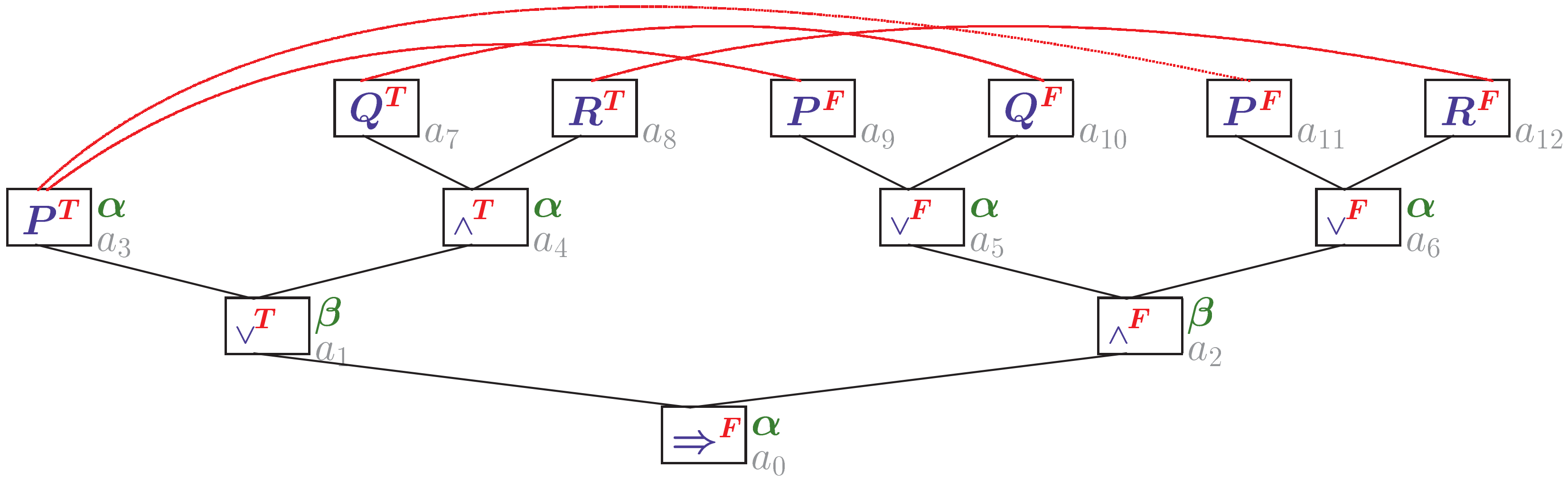
$$(P \lor (Q \land R)) \Rightarrow ((P \lor Q) \land (P \lor R))$$



Parsen der Formel erzeugt Formelbaum

- **Zuweisung von Polaritäten:** $T \;\hat{=}\;$ Hypothese, $F \;\hat{=}\;$ Konklusion
- **Bestimmung des Typs:** $\alpha \;\hat{=}\;$ linear, $\beta \;\hat{=}\;$ Verzweigung
- **Zuweisung von Polaritäten an Unterformeln**
- **Bestimmung des Typs der Unterformeln**
- **Erzeuge Konnektionen zwischen komplementären Literalen**

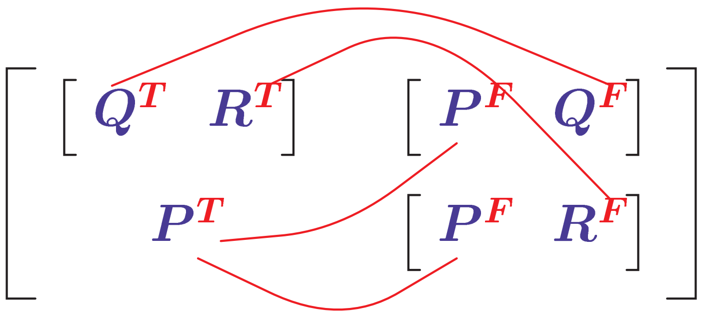
MATRIXMETHODEN: ANALYSE DER PFADE



- **4 atomare Pfade** $a_3a_9a_{10}$, $a_3a_{11}a_{12}$, $a_7a_8a_9a_{10}$, $a_7a_8a_{11}a_{12}$
- **Alle Pfade enthalten komplementäre Literale**

  Formel $(P \vee (Q \wedge R)) \Rightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ **ist gültig**
- **Zweidimensionale Repräsentation**

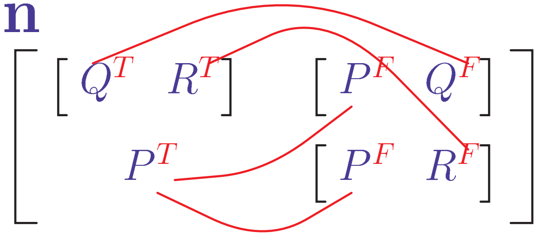
  Mit Konnektionen



$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^T & R^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \end{bmatrix} \\ P^T & \begin{bmatrix} P^F & R^F \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

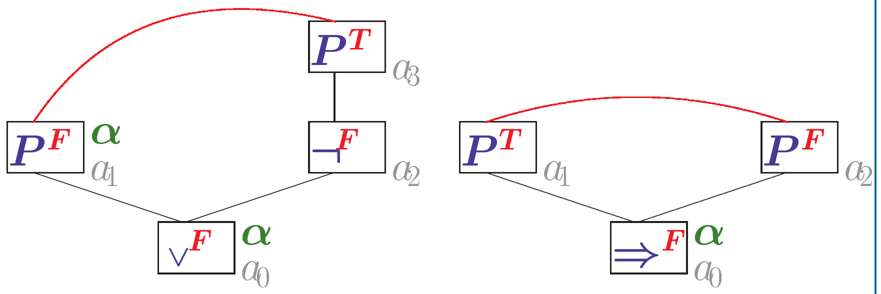
Matrixmethoden: zusätzliche Aspekte

- **Pfadüberprüfung folgt Konnektionen**
  - Frühzeitiges Abschneiden zu prüfender Pfade
  - Verringert Anzahl notwendiger Überprüfungen



- **Logik erster Stufe braucht Term-Unifikation**
  - Variablen von γ-Knoten können instantiiert werden
  - Variablen von δ-Knoten gelten als Konstante
  - Standard-Algorithmen von Robinson oder Martelli-Montanari

- **Konstruktive Logik braucht zusätzliche Methoden**
  - Unterscheide $P \vee \neg P$ von $P \Rightarrow P$
  - Regeln für $\Rightarrow$, $\neg$, $\forall$ sind irreversibel
  - Bestimme Reihenfolge der $\Rightarrow$, $\neg$, $\forall$
  - Hilfsmittel: Präfix(String)-Unifikation

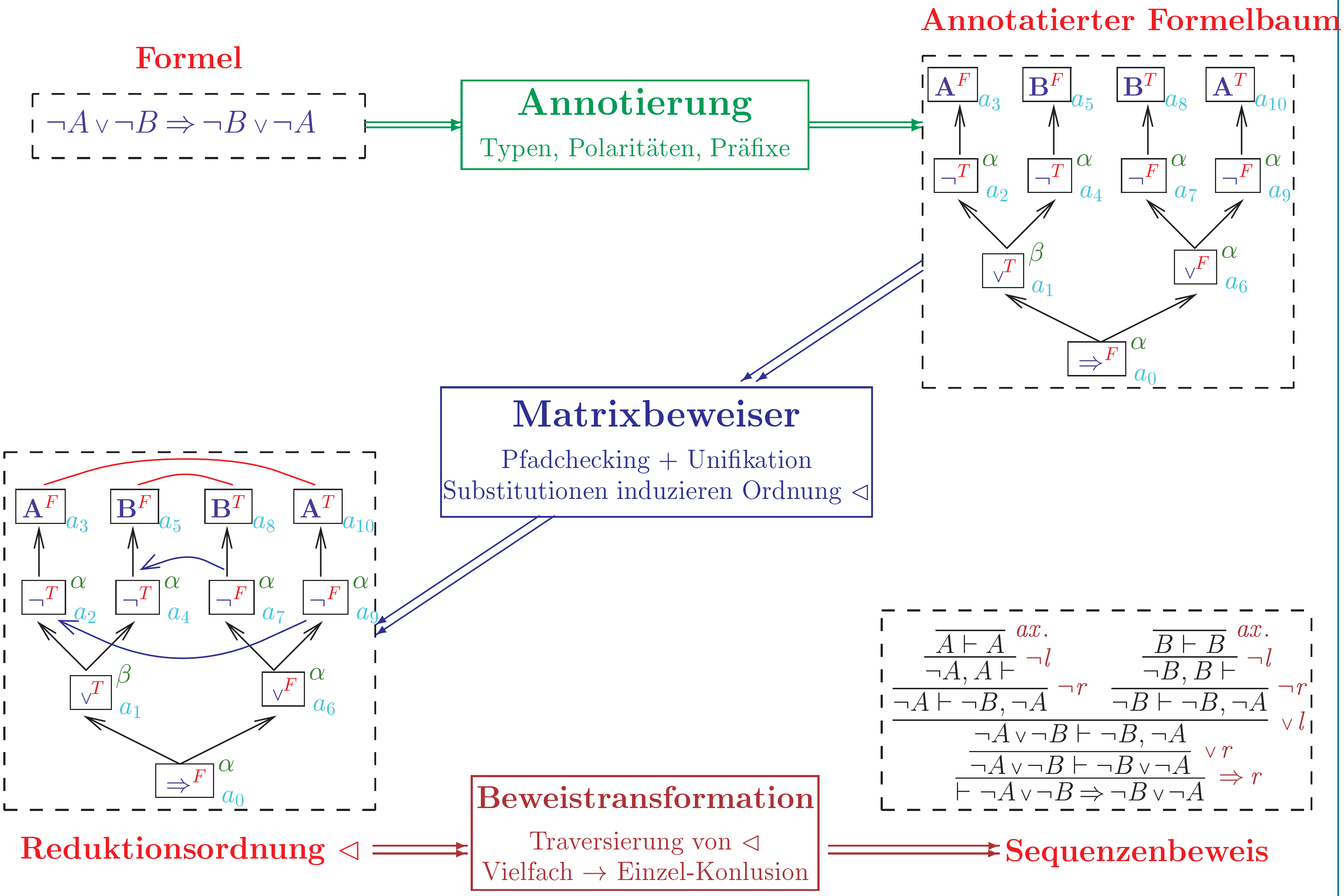


$\boldsymbol{P \vee \neg P}$ $\qquad$ $\boldsymbol{P \Rightarrow P}$

$\Downarrow$

Thema für separate Lehrveranstaltung

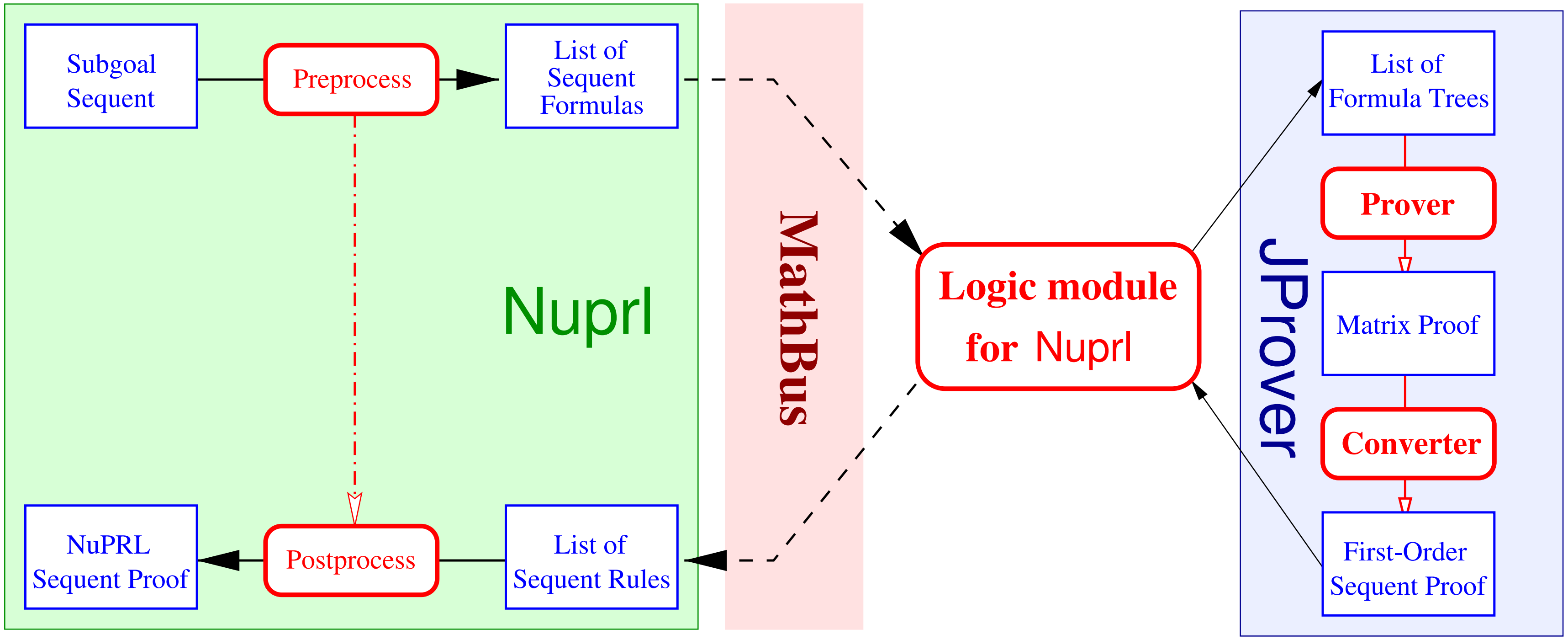
JProver: Integration von Matrixmethoden in Nuprl



JProver: der automatische Beweiser

- **Beweissuche**
  - Matrixbeweiser für intuitionistische Logik erster Stufe (Kreitz & Otten 1999)
    (Konnektionsgetriebene Pfadüberprüfung + Termunifikation)
  - Zusätzliche Stringunifikation für konstruktive Beweise (Otten & Kreitz 1996)
  - Substitutionen und Formelbaum induzieren Reduktionsordnung
- **Beweistransformation**
  - Extrahiert Sequenzenbeweis aus Matrixbeweis (Kreitz & Schmitt 2000)
  - Traversiert Reduktionsordnung ohne Suche (Schmitt 2000)
  - Handhabt Sequenzenkalküle mit mehreren/ einer Konlusion (Egly & Schmitt 1999)
- **Implementierung** (Schmitt et. al 2001)
  - Stand-alone Beweiser in OCaml
  - Einbettung in MetaPRL-Umgebung liefert Basisfunktionalitäten
    (Datentypen für Terme, Termunifikation, Modul System)

JProver: Anbindung an Nuprl



- Präprozessor für Nuprl Sequenzen und semantische Unterschiede
- Kommunikation von Termen im MathBus Format über INET socket
- JLogic Modul: extrahiert semantische Information aus Termen und konvertiert Sequenzenbeweis in das Format von Nuprl
- Postprozessor baut Nuprl Beweisbaum für Ausgangssequenz

Logische Integration in Nuprl

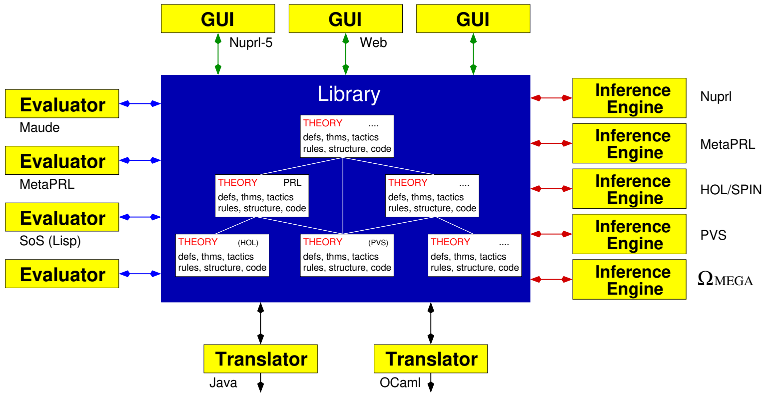
- **Logikmodul: Komponenten**
  - OCaml code für Kommunikation mit interaktivem Beweiser
  - `JLogic` Modul zur Darstellung Nuprl Logik

- **Das `JLogic` Modul**
  - Beschreibt Terme, welche Nuprl's logische Konnektive implementieren
  - Liefert Operationen zum Zugriff auf Teilterme
  - Decodiert Sequenzen, die in MathBus Format ankommen
  - Codiert JProver's Sequenzenbeweis ins MathBus Format

```
module Nuprl_JLogic =
struct
let is_all_term = nuprl_is_all_term
let dest_all = nuprl_dest_all
let is_exists_term = nuprl_is_exists_term
let dest_exists = nuprl_dest_exists
let is_and_term = nuprl_is_and_term
let dest_and = nuprl_dest_and
let is_or_term = nuprl_is_or_term
let dest_or = nuprl_dest_or
let is_implies_term = nuprl_is_implies_term
let dest_implies = nuprl_dest_implies
let is_not_term = nuprl_is_not_term
let dest_not = nuprl_dest_not

type inference = '(string*term*term) list
let empty_inf = []
let append_inf inf t1 t2 r =
    ((Jall.ruletable r), t1, t2) :: inf
end
```

Der Weg zur logischen Wissensbank ...



- **Verbinde externe Systeme**
  - Beweissysteme: PVS, HOL, ...
  - Browser (ASCII, web,...) und
    Editoren (strukturiert, Emacs-mode,...)
- **Ergänze neue Kapazitäten**
  - Archivierung (Dokumentation & Zertifizierung, Versionskontrolle)
  - Einbettung des Inhalts externer Wissensbanken
  - Eine Vielfalt von Rechtfertigungen (verschiedene Vertrauensstufen)
  - Erzeugung formaler und textlicher Dokumente
  - Asynchrone und verteilte Operation
  - Meta-schließen (z.B.. über Bezüge zwischen verschiedenen Theorien)

$\Downarrow$

Referenzumgebung für Entwicklung zuverlässiger Softwaree