Automatisierte Logik und Programmierung II

Teil V

Automatisierte Programmierung

1. **Grundkonzepte & Vorgehensweise**
2. **Synthese im Kleinen**
   – Paradigmen & Strategien
3. **Wissensbasierte Programmentwicklung**
4. **Korrektheitserhaltende Optimierungen**

Wozu Automatisierte Programmierung?

- **Softwareproduktion hat viele Probleme**
  - **Zeitaufwendig und teuer**
    - Entwurf und Implementierung fokussiert auf Modellierungs- und Programmiersprachen anstatt auf Eigenschaften des Problembereichs
    - Implementierung meist “von Hand” und ad hoc
    - Einbeziehung der Endanwender zu spät
  - **Zu viele Fehler im Endprodukt**
    - Logischer Zusammenhang zwischen Aufgabe und Lösung selten erkennbar
    - Programmierer geben keine Begründung für Korrektheit ihres Programms
- **Logische Synthese von Programmen hilft**
  - Werkzeuge zur (Teil-)Automatisierung der Konstruktion von Algorithmen
  - Logisches Fundament erhöht Zuverlässigkeit des erzeugten Programms
  - Automatisierung verringert Entwicklungszeit und -kosten und ermöglicht frühzeitige Validierung durch Endanwender

Kernaspekte einer Programmsynthese

Erzeuge korrekte ausführbare Programme aus Spezifikationen

- **Formale Spezifikation als Ausgangspunkt**
  - Formale Beschreibung von Anwendungsbereich und Problemstellung
  - Verlangt Fixierung einer formalen Sprache
- **Methoden für automatische Algorithmensynthese**
  - Benötigen theoretische Resultate über Korrektheit erzeugter Algorithmen
  - Syntheseparadigma: zulässige Manipulationen garantieren Korrektheit
  - Synthesestrategie automatisiert Anwendung zulässiger Operationen
  - Trace der Strategie dokumentiert getroffene Entscheidungen
- **Optimierung und Datentypverfeinerung**
  - Verbesserung des erzeugten Basisalgorithmus
  - Auswahl geeigneter Implementierungen der vorkommenden Datentypen
  - Sprachabhängige Optimierung bei Übertragung in Programmiersprache

Historische Entwicklung

- **Anwendung generischer Inferenztechniken**
  - **Beweise als Programme**
    - Automatischer Beweiser + Extraktion von Programmen aus Beweisen
  - **Transformation von Formeln**
    - Rewrite-Techniken + Extraktion von Programmen aus Formeln
  - Gut zur Illustration der Prinzipien ("Synthese im Kleinen")
  - Konstruktion aufwendigerer Algorithmen verlangt Spezialstrategien
- **Wissensbasierte Syntheseverfahren**
  - Wissen über algorithmische Grundstrukturen formalisiert als "**Algorithmentheorien**" (Struktur + Korrektheitsaxiome)
  - Strategien verwenden Wissen zur Erzeugung effizienter Algorithmen
  - Unterstützung statt Ersetzung des Programmierers
  - Aufwendigere Vorarbeiten aber erfolgreich in der "Praxis"

Automatisierte Logik und Programmierung

Lektion 15

Grundkonzepte der Programmsynthese

1. Formale Grundbegriffe
2. Formalisierung von Anwendungsbereichen
3. Programmsynthese am Beispiel

Programmsynthese: grundsätzliches Vorgehen

1. **Erstellen einer formalen Spezifikation**
   – Benötigt Formalisierung des Anwendungsbereichs als "**Objekttheorie**"
   – Welche Begriffe werden benutzt und was bedeuten sie?
   – Welche mathematischen Gesetze gelten für diese Begriffe?
2. **Entwurf eines läuffähigen, korrekten Algorithmus**
   – Synthesestrategie generiert Basisversion und Korrektheitsgarantien
3. **Erzeugung eines effizienten, korrekten Programms**
   – Benutzergesteuerte Optimierungstechniken verbessern Algorithmus
   – Übertragung in Zielsprache ermöglicht weitere Optimierungen
   – System garantiert Korrekheit der Optimierungen

Spezifikation von Programmierproblemen

- **Programme berechnen im Endeffekt Funktionen**
  - Aus welchem Datentyp stammen die Eingaben? Domain D
  - Zu welchem Datentyp gehören die Ausgaben? Range R
  - Gibt es Beschränkungen an zulässige Eingaben? Input-Bedingung I
  - Was ist der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgaben? Output-Bedingung O
- **Spezifikationen als formale Objekte**
  - Eine **formale Spezifikation** ist ein Quadrupel $spec = (D, R, I, O)$ wobei D und R Datentypen, I Prädikat über D, O Prädikat über $D \times R$
  - D, R, I, O sind in einer Spezifikationssprache zu beschreiben
- **Zwei mögliche Aufgabenstellungen**
  - Programm soll eine mögliche Lösung bestimmen,
    $\texttt{FUNCTION}\ f(x{:}D){:}R\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \texttt{RETURNS}\ y\ \texttt{SUCH THAT}\ O[x,y]$
  - Programm soll alle möglichen Lösungen bestimmen
    $\texttt{FUNCTION}\ f(x{:}D)\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \texttt{RETURNS}\ \{y{:}R \mid O[x,y]\}$

Programme und Korrektheit

- **Programm = Spezifikation + Algorithmus**
  - Algorithmen (Programmkörper) sind berechenbare (partielle) Funktionen auf $D \not\to R$, die auf allen zulässigen Eingaben definiert sind

- **Programme als formale Objekte**
  - Eine **formales Programm** ist ein 5-Tupel $prog = (D, R, I, O, body)$ wobei (D, R, I, O) formale Spezifikation, $body{:}D \not\to R$ berechenbar
  - *body* darf f rekursiv aufrufen und ist in Programmiersprache zu beschreiben
    - `FUNCTION` $f(x{:}D){:}R$ `WHERE` $I[x]$ `RETURNS` y `SUCH THAT` $O[x,y]$ $\equiv$ $body[f,x]$
    - `FUNCTION` $f(x{:}D)$ `WHERE` $I[x]$ `RETURNS` $\{y{:}R \mid O[x,y]\}$ $\equiv$ $body[f,x]$

- **Korrektheit von Programmen**
  - ***prog* ist korrekt**, falls $\forall x{:}D.\ I[x] \Rightarrow O[x, body(x)]$

- **Syntheseziel: Erfüllbarkeit von Spezifikationen**
  - ***spec* ist erfüllbar** (synthetisierbar), falls es eine Funktion $body{:}D \not\to R$ gibt, so daß $prog{=}(spec, body)$ korrekt ist

Spezifikations- und Programmiersprache

- **Einheitlicher Formalismus für Synthese**
  - Mathematische Sprache mit Programmiernotation
  - Beinhaltet formale Notation für die wichtigsten Datentypen
  - Aufgesetzt auf logischen Basiskalkül (z.B. Typentheorie)
- **Formales Wissen über Standard-Datentypen**
  - Definition der Begriffe im Basiskalkül
  - Verifizierte Lemmata über Eigenschaften der Begriffe
  - Quelle: Inhalt von Lehrmaterial, -büchern und Forschungsergebnissen
- **Objekttheorien: zusätzliches Domänenwissen**
  - Definition neuer Konzepte in einer Spezifikation
  - Lemmata über Grundeigenschaften dieser Konzepte

Aufbau formaler mathematischer (Objekt-)Theorien

Notwendig für Formalisierung von Programmierproblemen

- **Formalisiere Grundkonzepte der Theorie**
  - Systematischer Entwurf analog zum Aufbau der Typentheorie
    - Formale Notation für Datentyp, kanonische & nichtkanonische Elemente
    - Inferenzregeln für Elemente und Datentyp
- **Implementiere Grundkonzepte der Theorie**
  - Formale Definitionen erklären neue Begriffe durch bestehende Terme
  - Taktiken beschreiben neue Inferenzregeln durch existierende Regeln
- **Erstelle erweiterte Objekttheorie**
  - Formalisiere wichtige Begriffe durch Grundkonzepte der Theorie
  - Beweise mathematische Gesetze zu Eigenschaften “abgeleiteter” Konzepte

    Insbesondere Rewrite-Lemmata zu Kombinationen von Operationen

Beispiel: Theorie endlicher Mengen

• Grundkonzepte

Datentyp: $\texttt{Set}(\alpha)$

Operationen: $\emptyset$: $\texttt{Set}(\alpha)$

$+$: $\texttt{Set}(\alpha)\times\alpha \longrightarrow \texttt{Set}(\alpha)$

$\in$: $\alpha\times\texttt{Set}(\alpha) \longrightarrow \texttt{Bool}$

Gesetze: $\texttt{a}\notin\emptyset$

$\texttt{x}\in\texttt{(S+a)} \Leftrightarrow \texttt{(x=a} \vee \texttt{x}\in\texttt{S)}$

$\texttt{(S+a)+x = (S+x)+a}$

$\texttt{(S+a)+a = S+a}$

$\texttt{(P(}\emptyset\texttt{)} \wedge \texttt{(}\forall\texttt{S:Set(}\alpha\texttt{).P(S)} \Rightarrow \forall\texttt{a:}\alpha\texttt{.P(S+a)))} \Rightarrow \forall\texttt{S:Set(}\alpha\texttt{).P(S)}$

• Implementierung

$\emptyset \equiv \texttt{nil}$

$+ \equiv \lambda\texttt{a,S. a.S}$

$\in \equiv \lambda\texttt{a,S. }\exists\texttt{x}\in\texttt{S.x=}_b\texttt{a}$

$=_{Set} \equiv \lambda\texttt{S,T. (}\forall\texttt{a}\in\texttt{S. a}\in\texttt{T)} \wedge \texttt{(}\forall\texttt{a'}\in\texttt{T. a'}\in\texttt{S)}$

$\texttt{Set}(\alpha) \equiv \texttt{(S,T):}\alpha\,\texttt{list//S=}_{Set}\texttt{T}$

Theorie endlicher Mengen – Abgeleitete Konzepte

empty?	≡	λS. if S=∅ then tt else ff
⊆	≡	λS,S'. ∀x∈S.x∈S'
{*list-exp*}	≡	*list-exp*.nil
$\{i..j\}$	≡	ind(j-i; _,_.∅; {j}; diff,j-set. j-set+(j-diff))
$\{f_x \mid x \in S \wedge p_x\}$	≡	list_ind(S; ∅; a,_,GSF. if p_x[a/x] then GSF+f_x[a/x] else GSF
$\lvert S\rvert$	≡	list_ind(S; 0; a,S',card. if a∈S' then card else card+1)
-	≡	λS,a. {x|x∈S∧x≠a}
∪	≡	λS,S'. list_ind(S'; S; a,_,union.union+a)
∩	≡	λS,S'. {x|x∈S∧x∈S'}
\	≡	λS,S'. {x|x∈S∧x∉S'}
$\bigcup$	≡	λFAMILY. list_ind(FAMILY; ∅; S,FAM,Union.Union∪S)
$\bigcap$	≡	λFAMILY. list_ind(FAMILY; fail; S,FAM,inter. if empty?(FAM) then S else inter∩S)
map	≡	λf,S. {f(x)|x∈S}
reduce	≡	λop,S. list_ind(S; fail; a,S',redS'. if empty?(S') then a else if a∈S' then redS' else op(redS',a))
$T =_{Set} S \uplus S'$	≡	$T =_{Set} S \cup S'$ ∧ empty?($S \cap S'$)

Wichtigste Bestandteile der Formalisierungssprache

$\mathbb{B}$, `true`, `false`	Data type of boolean expressions, explicit truth values
$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$	Boolean connectives
$\forall$x$\in$S.p, $\exists$x$\in$S.p	Limited boolean quantifiers (on finite sets and sequences)
`if p then a else b`	Conditional
Seq(α)	Data type of finite sequences over members of α
`null?`, $\in$, $\sqsubseteq$	Decision procedures: emptiness, membership, prefix
[], [a], [i..j], [a_1...a_n]	Empty/ singleton sequence, subrange, literal sequence former
a.L, L·a	prepend `a`, append `a` to `L`
[f(x)|x$\in$L$\wedge$p(x)], |L|, L[i]	General sequence former, length of `L`, `i`-th element,
`domain(L)`, `range(L)`	The sets {1..|L|} and {L[i]|i$\in$domain(L)}
`nodups(L)`	Decision procedure: all the `L[i]` are distinct (no duplicates)
Set(α)	Data type of *finite* sets over members of α
`empty?`, $\in$, $\subseteq$	Decision procedures: emptiness, membership, subset
$\emptyset$, {a}, {i..j}, {a_1...a_n}	Empty set, singleton set, integer subset, literal set former
S+a, S-a	element addition, element deletion
{f(x)|x$\in$S$\wedge$p(x)}, |S|	General set former, cardinality
S$\cup$T, S$\cap$T, S\T	Union, intersection, set difference
$\bigcup$FAMILY, $\bigcap$FAMILY	Union, intersection of a family of sets

Costas-Arrays Problem

Costas Array der Größe n:

– Permutation von $\{1..n\}$ ohne Duplikate in Zeilen der Differenzentafel

– Hilfreich für Erzeugung leicht decodierbarer Radar- und Sonarsignale

2	4	1	6	5	3
-2	3	-5	1	2	
1	-2	-4	3		
-4	-1	-2			
-3	1				
-1					

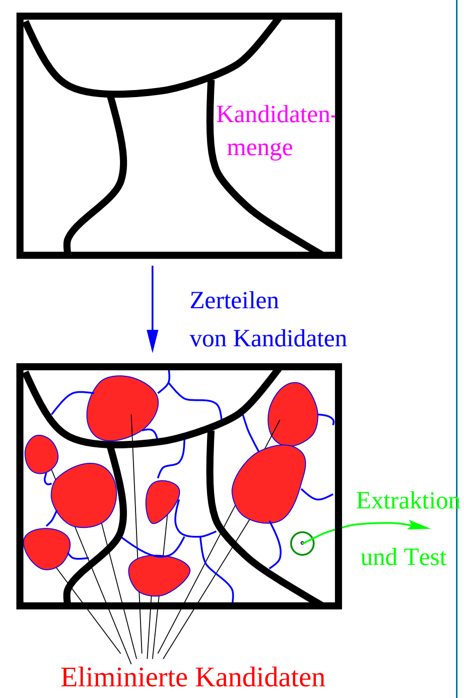
Costas Array der Ordnung 6 und seine Differenzentafel

Ziel: Berechnung aller Costas Arrays der Größe n

Berechnung aller Costas Arrays

Bis 1988 keine effiziente Lösungsalgorithmen bekannt

- **Aufzählung und Testen ist exponentiell**
  - Wie analysiert man Lösungskandidaten ohne sie aufzuzählen?
- **Lösung benutzt Globalsuche**
  - Codierung von Kandidatenmengen
  - Wiederholtes Aufteilen und und Filtern
    auf Basis von Repräsentanten
  - Extraktion konkreter Lösungen aus Repräsentanten



Globalsuchalgorithmen sind systematisch erzeugbar

Phasen einer formale Algorithmenentwicklung

1. **Erstellen der nötigen Objekttheorie**
   – Formalisierung vorkommender neuer Begriffe
   – Aufstellen mathematischer Gesetze für diese Begriffe

2. **Erstellen der formalen Spezifikation**

3. **Entwurf eines korrekten Basisalgorithmus**

4. **Verifizierte algorithmische Optimierung**

5. **Implementierung**
   – Auswahl geeigneter Implementierungen für abstrakte Datentypen
   – Ggf. Compilierung und sprachabhängige Optimierung

Unterstützung durch Synthesesystem

Steuerung durch erfahrenen Benutzer

COSTAS-ARRAYS (1): OBJEKTTHEORIE

Permutation von $\{1..n\}$ ohne Duplikate in Zeilen der Differenzentafel

- **Formalisierung vorkommender Begriffe:**

  $\mathtt{dtrow}(L,j) \;\equiv\; \mathtt{[}L\mathtt{[i]-}L\mathtt{[i+}j\mathtt{]\,|\,i} \in \mathtt{[1..|}L\mathtt{|-}j\mathtt{]]}$

  $\mathtt{perm}(L,S) \;\equiv\; \mathtt{nodups}(L) \wedge \mathtt{range}(L)\mathtt{=}S$

- **Aufstellen mathematischer Gesetze:**

  $\forall$L,L':Seq($\mathbb{Z}$).$\forall$i:$\mathbb{Z}$.$\forall$j:$\mathbb{N}$.

  1. dtrow([],j) = []
  2. j$\leq$|L| $\Rightarrow$ dtrow(i.L,j) = (i-L[j]).dtrow(L,j)
  3. j$\neq$0 $\Rightarrow$ dtrow([i],j) = []
  4. L$\sqsubseteq$L' $\Rightarrow$ dtrow(L,j) $\sqsubseteq$ dtrow(L',j)
  5. j$\geq$|L| $\Rightarrow$ dtrow(L,j) = []
  6. j$\leq$|L| $\Rightarrow$ dtrow(L$\cdot$i,j) = dtrow(L,j)$\cdot$(L[|L|+1-j]-i)

  $\vdots$

Costas-Arrays (2): formale Spezifikation

Für $n \geq 1$ berechne alle Permutationen von $\{1..n\}$ ohne Duplikate in Zeilen der Differenzentafel

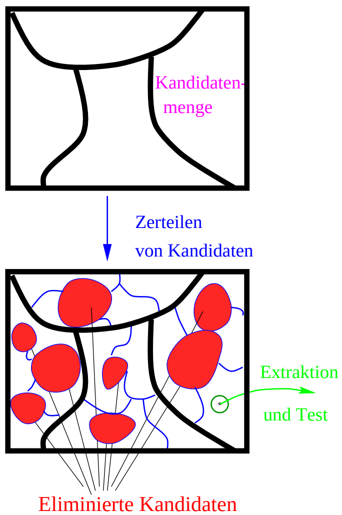
$$D \mapsto \mathbb{Z}$$
$$R \mapsto \texttt{Seq}(\mathbb{Z})$$
$$I \mapsto \lambda\texttt{n}.\ \texttt{n}\geq 1$$
$$O \mapsto \lambda\texttt{n,p}.\ \texttt{perm(p,}\{\texttt{1..n}\}\texttt{)} \ \land\ \forall\texttt{j}\in\texttt{domain(p).nodups(dtrow(p,j))}$$

```
FUNCTION Costas (n:ℤ)  WHERE n≥1
  RETURNS {p:Seq(ℤ) | perm(p,{1..n})
                      ∧ ∀j∈domain(p).nodups(dtrow(p,j))}
```

Costas-Arrays (3): Erzeugung des Basisalgorithmus

- **Grundstruktur eines Globalsuchalgorithmus**

$$\texttt{let rec } f_{gs}(x,s) = \{ z \mid z \in \texttt{ext}(s) \wedge \texttt{O}(x,z) \} \\ \cup \bigcup \{ f_{gs}(x,t) \mid t \in \texttt{split}(x,s) \wedge \Phi(x,t) \} \\ \texttt{in } f_{gs}(x, s_0(x))$$



  – `s`: Deskriptor für Mengen von Lösungskandidaten
  – $s_0(x)$: Initialdeskriptor für Eingabe `x`
  – `split(x,s)`: Rekursive Aufteilung von Kandidatenmengen
  – Φ`(x,s)`: Filter zur Elimination unnötiger Deskriptoren
  – `ext(s)`: direkte Extraktion von Lösungskandidaten `z` aus Deskriptoren
  – `O(x,z)`: Ausgabebedingung, verwendet zur endgültigen Selektion

- **Globalsuchalgorithmus für Costas-Arrays Problem**

$$\texttt{let costas(n) =} \\ \quad \texttt{let rec aux(n,s)} \\ \quad = \{ p \mid p \in \{s\} \wedge \texttt{perm}(p,\{1..n\}) \wedge \forall j{<}n.\ \texttt{nodups}(\texttt{dt-row}(p,j)) \} \\ \quad\ \cup \bigcup \{ \texttt{aux}(x,t) \mid t \in \{ s{\cdot}i \mid i \in \{1..n\} \} \\ \qquad\qquad \wedge\ \texttt{nodups}(t) \wedge \forall j{<}|t|.\ \texttt{nodups}(\texttt{dt-row}(t,j)) \} \\ \quad \texttt{in aux(n,[])}$$

Costas-Arrays (4a): Simplifikationen

```
let costas(n) =
  let rec aux(n,s)
  = { p | p ∈ {s} ∧ perm(p,{1..n}) ∧ ∀j<n. nodups(dt-row(p,j)) }
    ∪ ⋃{ aux(x,t) | t ∈ { s·i | i ∈ {1..n} }  ∧  nodups(t)
                                  ∧  ∀j<|t|. nodups(dt-row(t,j)) }
  in aux(n,[])
```

Domänenwissen: $\{\texttt{p} \mid \texttt{p} \in \{\texttt{s}\} \wedge P(\texttt{p})\} \quad \equiv \quad \texttt{if } P(\texttt{s}) \texttt{ then } \{\texttt{s}\} \texttt{ else } \emptyset$

COSTAS-ARRAYS (4a): Simplifikationen

```
let costas(n) =
   let rec aux(n,s)
   = if perm(s,{1..n}) ∧ ∀j<n. nodups(dt-row(s,j)) then {s} else ∅
      ∪ ⋃{ aux(x,t) | t ∈ { s·i | i ∈ {1..n} }  ∧  nodups(t)
                        ∧  ∀j<|t|. nodups(dt-row(t,j)) }
   in aux(n,[])
```

Domänenwissen: `perm(s,{1..n})` $\Rightarrow$ `|s|=n`

Kontext der Formel: `perm(s,{1..n})`

Kontext der Loopinvariante: `∀j<|s|. nodups(dt-row(s,j))`

Costas-Arrays (4a): Simplifikationen

```
let costas(n) =
   let rec aux(n,s)
   = if perm(s,{1..n}) then {s} else ∅
      ∪ ⋃{ aux(x,t) | t ∈ { s·i | i ∈ {1..n} } ∧ nodups(t)
                          ∧ ∀j<|t|. nodups(dt-row(t,j)) }
   in aux(n,[])
```

Domänenwissen:

   `perm(s,{1..n})` $\equiv$ `s⊆{1..n}` $\wedge$ `{1..n}⊆s` $\wedge$ `nodups(s)`

   `{1..n}⊆s` $\equiv$ `{1..n}\s=∅`

Kontext der Loopinvariante: `nodups(s)`

Rahmenbedingung für Deskriptoren `J({1..n},s)`: `s⊆{1..n}`

COSTAS-ARRAYS (4A): SIMPLIFIKATIONEN

```
let costas(n) =
   let rec aux(n,s)
   = if {1..n}\s=∅ then {s} else ∅
      ∪ ⋃{ aux(x,t) | t ∈ { s·i | i ∈ {1..n} }  ∧ nodups(t)
                              ∧ ∀j<|t|. nodups(dt-row(t,j)) }
   in aux(n,[])
```

Domänenwissen:

$\{\, f(\mathtt{x},\mathtt{t}) \mid \mathtt{t} \in \{g(\mathtt{s},\mathtt{i}) \mid \mathtt{i} \in S\,\} \wedge h(\mathtt{t})\} = \{\, f(\mathtt{x},g(\mathtt{s},\mathtt{i})) \mid \mathtt{i} \in S \wedge h(g(\mathtt{s},\mathtt{i}))\}$

COSTAS-ARRAYS (4A): SIMPLIFIKATIONEN

```
let costas(n) =
   let rec aux(n,s)
   = if {1..n}\s=∅ then {s} else ∅
      ∪ ⋃{ aux(x,s·i) | i ∈ {1..n} ∧ nodups(s·i)
                              ∧ ∀j<|s·i|. nodups(dt-row(s·i,j)) }
   in aux(n,[])
```

Domänenwissen: `i ∈ {1..n} ∧ nodups(s·i)` $\equiv$ `i ∈ {1..n}\s`

COSTAS-ARRAYS (4A): SIMPLIFIKATIONEN

```
let costas(n) =
   let rec aux(n,s)
   = if {1..n}\s=∅ then {s} else ∅
     ∪ ⋃{ aux(x,s·i) | i ∈ {1..n}\s
                      ∧ ∀j<|s·i|. nodups(dt-row(s·i,j)) }
   in aux(n,[])
```

Domänenwissen:

dt-row(s·i,j) = dt-row(s,j)·(s[|s·i|-j]-i)

nodups($t \cdot k$) $\equiv$ nodups(t) $\wedge$ $k \notin t$

∀j<|s·i|.P(j) $\equiv$ ∀j<|s|.P(j) $\wedge$ P(|s|)

dt-row(s·i,|s|) = [s[|s·i|-|s|]-i]

nodups([s[|s·i|-|s|]-i]) $\equiv$ true

2	4	1	6	5	3
-2	3	-5	1	2	
1	-2	-4	3		
-4	-1	-2			
-3	1				
-1					

Kontext der Loopinvariante: ∀j<|s|. nodups(dt-row(s,j))

COSTAS-ARRAYS (4b): Endliche Differenzierung

```
let costas(n) =
   let rec aux(n,s)
   = if {1..n}\s=∅ then {s} else ∅
      ∪ ⋃{ aux(x,s·i) | i ∈ {1..n}\s
                        ∧ ∀j<|s|. (s[|s·i|-j]-i) ∉ dt-row(s,j)}
   in aux(n,[])
```

Ersetze ineffiziente Neuberechnung durch neue Variablen:

`{1..n}\s` $\mapsto$ `pool`

`|s·i|` $\mapsto$ `ssize`

Integriere Variablen in Definition von `aux`

Costas-Arrays (4b): Endliche Differenzierung

```
let costas(n) =
   let rec aux(n,s,pool,ssize)
   = if pool=∅ then {s} else ∅
      ∪ ⋃{ aux(x,s·i,pool\{i},ssize+1) | i ∈ pool
                                    ∧ ∀j<|s|. (s[ssize-j]-i) ∉ dt-row(s,j)}
   in aux(n,[],{1..n},1)
```

Costas-Arrays (4c): Fallanalyse

$$
\begin{array}{l}
\texttt{let costas(n) =} \\
\quad \texttt{let rec aux(n,s,pool,ssize)} \\
\quad \texttt{= if pool=}\emptyset\texttt{ then }\{\texttt{s}\}\texttt{ else }\emptyset \\
\qquad \cup \bigcup\{\texttt{aux(x,s}\cdot\texttt{i,pool}\backslash\{\texttt{i}\}\texttt{,ssize+1) | i}\in\texttt{pool} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge\ \forall\texttt{j<|s|. (s[ssize-j]-i)}\notin\texttt{dt-row(s,j)}\} \\
\quad \texttt{in aux(n,[],}\{\texttt{1..n}\}\texttt{,1)}
\end{array}
$$

Domänenwissen:

$(\texttt{if pool=}\emptyset\texttt{ then }\{\texttt{s}\}\texttt{ else }\emptyset) \cup S \texttt{ = if pool=}\emptyset\texttt{ then }\{\texttt{s}\} \cup S\texttt{ else }S$

Costas-Arrays (4c): Fallanalyse

$$
\begin{array}{l}
\texttt{let costas(n) =} \\
\quad \texttt{let rec aux(n,s,pool,ssize)} \\
\quad \texttt{= if pool=}\emptyset \\
\quad\quad \texttt{then } \{\texttt{s}\} \cup \bigcup\{\texttt{aux(x,s}\cdot\texttt{i,pool}\backslash\{\texttt{i}\}\texttt{,ssize+1)} \mid \texttt{i} \in \texttt{pool} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge\ \forall \texttt{j<|s|. (s[ssize-j]-i)} \notin \texttt{dt-row(s,j)}\} \\
\quad\quad \texttt{else } \bigcup\{\texttt{aux(x,s}\cdot\texttt{i,pool}\backslash\{\texttt{i}\}\texttt{,ssize+1)} \mid \texttt{i} \in \texttt{pool} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge\ \forall \texttt{j<|s|. (s[ssize-j]-i)} \notin \texttt{dt-row(s,j)}\} \\
\quad \texttt{in aux(n,[],}\{\texttt{1..n}\}\texttt{,1)}
\end{array}
$$

Domänenwissen: $\bigcup\{ f\texttt{(i)} \mid \texttt{i} \in \emptyset\} = \emptyset$

Kontext der Formel: $\texttt{pool=}\emptyset$

Costas-Arrays (5): Datentypverfeinerung

Ersetze abstrakte Definitionen von Datentypen durch effiziente konkrete Implementierungen

```
let costas(n) =
   let rec aux(n,s,pool,ssize)
   = if pool=∅
      then {s}
      else ⋃{ aux(x,s·i,pool\{i},ssize+1) | i ∈pool
                                    ∧ ∀j<|s|. (s[ssize-j]-i) ∉dt-row(s,j)}
   in aux(n,[],{1..n},1)
```

---

n: $\mathbb{Z}$ $\mapsto$ Standardimplementierung positiver ganzen Zahlen

s: `Seq(`$\mathbb{Z}$`)`, Elemente werden hinten angehängt $\mapsto$ umgekehrt verkettere Liste

pool: `Set(`$\mathbb{Z}$`)`: Elemente werden aus fester Menge entnommen $\mapsto$ Bitvektor

ssize: $\mathbb{Z}$ $\mapsto$ Standardimplementierung positiver ganzen Zahlen