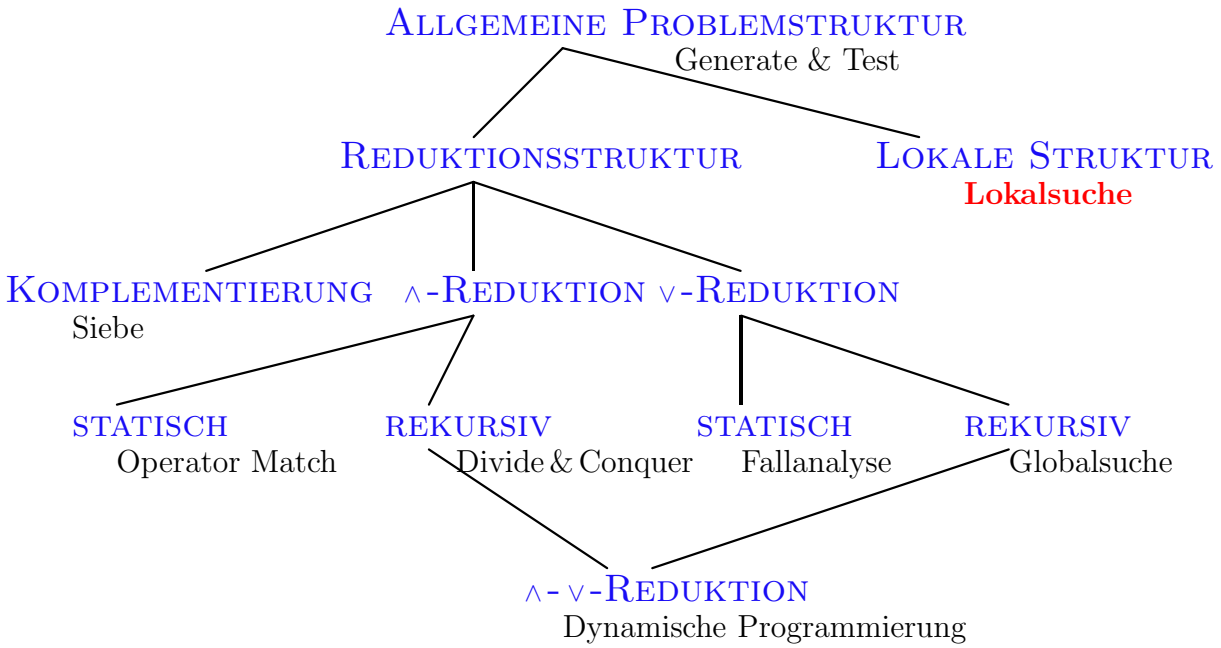
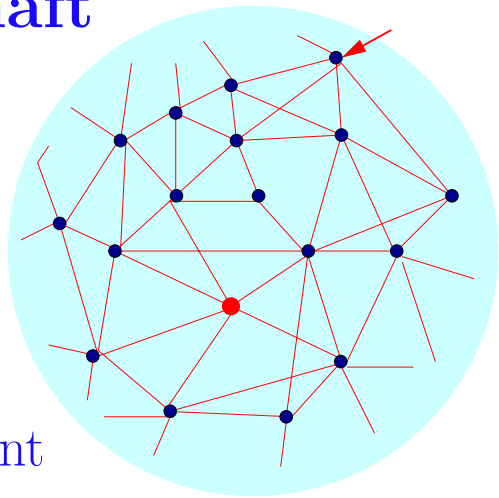
Lokalsuch-Algorithmen



- **Problemlösung durch kleine Veränderungen**
  - Bewertung der Qualität von Elementen des Bildbereichs
  - Qualität einer (Teil-)Lösung wird schrittweise verbessert
  - Gut für Optimierungsprobleme (Travelling Salesman, Scheduling, ...)
- **Lösungsverfahren: Hillclimbing**
  - Beginne irgendwo im Lösungsraum
  - Durchsuche lokale Nachbarschaft bis keine bessere Lösung zu finden

Lokalsuch-Algorithmen: Generelle Idee

- **Optimierung als Minimierung von Kosten**
  - Spezifikation des Problems besitzt viele mögliche "Lösungen"
  - Lösungen werden bewertet nach Nutzen, Kosten, Korrekheitsgrad, ...
  - Gesucht ist Lösung mit optimaler (o.B.d.A. minimaler) Bewertung
  - Exakte Optimierung oft $\mathcal{NP}$-vollständig
- **Lösungsverfahren durchsucht Nachbarschaft**
  - Übergang auf Nachbarn, solange Verbesserungen möglich
  - Verfahren endet in lokalen Optima
  - Nachbarschaftstruktur entscheidet über Güte der Lösung
    - Zu fein $\Rightarrow$ Verfahren führt nicht zu globalem Optimum
    - Zu grob $\Rightarrow$ Suche + Test auf lokale Optimalität ineffizient
  - **Bestimmung einer guten Nachbarschaftstruktur ist wichtig**



Grundschema von Lokalsuch-Algorithmen

$$\texttt{FUNCTION } \boldsymbol{f_{opt}}(x\texttt{:}D)\texttt{:}R \texttt{ WHERE } I[x] \texttt{ RETURNS } y$$
$$\texttt{SUCH THAT } O[x,y] \;\wedge\; \forall t\texttt{:}R\texttt{.}\,(O[x,t] \;\Rightarrow\; c[x,y]{\leq}c[x,t])$$
$$\equiv\ \texttt{let } \boldsymbol{f_{LS}}(x\texttt{,}z)$$
$$\texttt{= if } \forall t{\in}N[x,z]\texttt{.}\,(O[x,t] \;\Rightarrow\; c[x,z]{\leq}c[x,t]) \texttt{ then } z$$
$$\texttt{else } \boldsymbol{f_{LS}}(x\texttt{,}\,\texttt{arb}(\{t \mid t{\in}N[x,z]{\wedge}O[x,t]{\wedge}c[x,t]{<}c[x,z]\}))$$
$$\texttt{in } \boldsymbol{f_{LS}}(x\texttt{,}\,\mathit{Init}[x])$$

- **3 zentrale Komponenten der Algorithmentheorie**
  - $\mathit{Init}\colon D \to R$ — Initiallösung für Basisspezifikation (D, R, I, O)
  - $\boldsymbol{c}\colon R \to \mathcal{R}$ — Kostenfunktion auf geordnetem Kostenraum $(\boldsymbol{\mathcal{R}}, \leq)$
    Zusatzspezifikation des Optimierungsproblems
  - $\boldsymbol{N}\colon D \times R \to \texttt{Set}(R)$ — Nachbarschaftsstruktur
    Suchraumbeschreibung für lokale Variationen

Korrektheit des Lokalsuch-Schemas

$$\begin{array}{l}\texttt{FUNCTION } f_{opt}(x{:}D){:}R \texttt{ WHERE } I[x] \texttt{ RETURNS } y\\ \quad \texttt{SUCH THAT } O[x,y] \;\wedge\; \forall t{:}R.\,(O[x,t] \;\Rightarrow\; c[x,y]{\leq}c[x,t])\\ \equiv\; \texttt{let } f_{LS}(x,z) = \texttt{if } \forall t{\in}N[x,z].\,(O[x,t] \;\Rightarrow\; c[x,z]{\leq}c[x,t]) \texttt{ then } z\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \texttt{else } f_{LS}(x, \texttt{arb}(\{t \mid t{\in}N[x,z]{\wedge}O[x,t]{\wedge}c[x,t]{<}c[x,z]\}))\\ \quad \texttt{in } f_{LS}(x, Init[x])\end{array}$$

ist korrekt, wenn 4 Axiome erfüllt sind

---

1. $Init[x]$ **berechnet gültige Initiallösung für** O

   $\texttt{FUNCTION } f(x{:}D){:}R \texttt{ WHERE } I[x] \texttt{ RETURNS } y \texttt{ SUCH THAT } O[x,y]$

2. **Nachbarschaftsstruktur** N **ist reflexiv**

   $\forall x{:}D.\forall y{:}R.\;\; I[x]\wedge O[x,y] \;\Rightarrow\; y{\in}N[x,y]$

3. **Lokale Optima sind exakt** $\quad\mapsto$ Optimale Algorithmen

   $$\begin{array}{rl}\forall x{:}D.\forall y{:}R.\;\; I[x]\wedge O[x,y] \;\Rightarrow\; & (\forall t{\in}N[x,y].\,O[x,t] \Rightarrow c[x,y]{\leq}c[x,t])\\ \Rightarrow\; & \forall z{:}R.\,(O[x,z] \Rightarrow c[x,y]{\leq}c[x,z])\end{array}$$

4. **Alle gültigen Lösungen sind endlich erreichbar**

   $\forall x{:}D.\forall y,z{:}R.\;\; I[x]\wedge O[x,y]\wedge O[x,z] \;\Rightarrow\; \exists k{:}\mathbb{N}.\,z{\in}N_O^k[x,y]$

$N_O^0[x,y] = \{y\} \quad N_O^{k+1}[x,y] = \bigcup\{\, N^k[x,t] \mid t{\in}N[x,y]\wedge O(x,t)\,\}$

Lokalsuch-Schema: Korrektheitsbeweis

- **Abspalten und Spezifikation der Hilfsfunktion f_{ls}**

  $\texttt{FUNCTION } f_{opt}(x\!:\!D)\!:\!R \texttt{ WHERE } I[x] \texttt{ RETURNS } y$
  $\quad\texttt{SUCH THAT } O[x,y] \;\wedge\; \forall t\!:\!R.\,(O[x,t] \;\Rightarrow\; c[x,y]{\leq}c[x,t])$
  $\equiv\; f_{LS}(x\,,Init[x])$

  $\texttt{FUNCTION } f_{ls}(x,z\!:\!D{\times}R)\!:\!R \texttt{ WHERE } I[x] \;\wedge\; O[x,z] \texttt{ RETURNS } y$
  $\quad\texttt{SUCH THAT } O[x,y] \;\wedge\; \forall t{\in}N[x,y].\,(O[x,t] \;\Rightarrow\; c[x,y]{\leq}c[x,t])$
  $\equiv\; \texttt{if } \forall t{\in}N[x,z].\,(O[x,t] \;\Rightarrow\; c[x,z]{\leq}c[x,t]) \texttt{ then } z$
  $\qquad\texttt{else } f_{LS}(x,\texttt{arb}(\{t \mid t{\in}N[x,z]{\wedge}O[x,t]{\wedge}c[x,t]{<}c[x,z]\}))$

- **Korrektheit von f_{opt} folgt aus der von f_{ls} mit Axiomen 1 & 3**
  - Für den Startwert $z = Init[x]$ gilt $O[x,z]$
  - Für $y = f_{LS}(x\,,z)$ gilt $O[x,y] \;\wedge\; \forall t{\in}N[x,y].\,(O[x,t] \;\Rightarrow\; c[x,y]{\leq}c[x,t])$
  - Mit Axiom 3 folgt $\forall t{:}R.\,(O[x,t] \;\Rightarrow\; c[x,y]{\leq}c[x,t])$

- **Partielle Korrektheit von f_{ls} folgt aus Programmkörper**
  - Hält f_{ls} mit Ausgabe z, so gilt $\forall t{\in}N[x,z].\,(O[x,t] \;\Rightarrow\; c[x,z]{\leq}c[x,t])$

- **Terminierung von f_{ls} folgt aus Ordnung $(\mathcal{R},{\leq})$ und Axiom 4**

Sortieren mit Lokalsuchalgorithmen

- **Formuliere Sortierung als Ordnungsoptimierung**
  - Einfache Basisspezifikation $O[L,S] = \texttt{rearranges}(L,S)$
  - Kostenfunktion $c[L,S] = \#_>(S)$: Anzahl der Fehlstellungen $S_i > S_{i+1}$
  - Es gilt $\#_>(S) \geq 0$ und $\#_>(S) = 0 \;\Rightarrow\; \texttt{ordered}(S)$
  - Spezifikation `FUNCTION sort(L:Seq(ℤ)):Seq(ℤ) WHERE true RETURNS S SUCH THAT rearranges(L,S) ∧ ∀S':Seq(ℤ).rearranges(L,S') ⇒ #>(S)≤#>(S')`
- **Lokalsuchalgorithmus**
  - Initiallösung $Init[L] = L$ ↦ Axiom 1
  - Nachbarschaft $N[S,S'] = \texttt{permute}_{i,j}(S,S')$: Vertauschen von S_i und S_j
    - Vertauschen ist reflexiv, Lokale Minima sind exakt ↦ Axiom 2,3
    - Alle Umordnungen erreichbar durch iteratives Vertauschen ↦ Axiom 4
  - Ergibt Sortieren durch beliebiges Austauschen von Elementen
    - Ineffizient, da zu viele Nachbarn zu prüfen (vermutlich $\mathcal{O}(n^3)$)
- **Lokalsuchalgorithmus mit kleinerer Nachbarschaft**
  - Restriktion auf benachbarte Komponenten
  - Nachbarschaft $N[S,S'] = \texttt{perm}_i(S,S') = \texttt{permute}_{i,i+1}(S,S')$
  - Ergibt Bubblesort (nach algorithmischer Optimierung)

Synthese von Lokalsuch-Algorithmen

Lokalsuche $\hat{=}$ Nachbarschaft + Suchfilter

- **Bestimme effektive Nachbarschaftsstruktur**
  - Beschreibe Nachbarschaft als Perturbation (Verwirbelung)
  - Inkrementelle Veränderung von Werten aus R
    - Numerik: δ-Vektoren, Kombinatorik: Austausch von Komponenten
  - Formalisiert als $N[x,y] \hat{=} \{\, Action[i,j,x,y] \mid i,j \in \pi[x,y] \,\}$
    - Änderungsaktion $Action[i,j,x,y]$ modifiziert Lösungspunkt $(x,y) \in D \times R$
    - Parameter $i,j \in \pi[x,y]$ sind minimale Bestandteile von (x,y)
- **Bestimme effiziente Suchfilter**
  - Optimiere Nachbarschaftsstruktur durch frühzeitiges Abschneiden
    - Feasibility Constraint für $O[x,y]$
    - Optimality Constraint für $\forall t \in N[x,z].\, (O[x,t] \;\Rightarrow\; c[x,z] \leq c[x,t])$

Wissensbasierte Synthese von Lokalsuch-Algorithmen

Spezialisiere vorformuliertes Programmierwissen

- **Lokalsuchtheorie: allgemeine Suchstruktur für R**
  - Vorgefertigte Nachbarschaftsstruktur, die Axiome 2–4 erfüllt
  - Formalisiert als Objekt $\mathcal{L} = (D,R,I,O,\pi,Action)$
  - Wissensbank speichert Lokalsuchtheorien für Grunddatentypen
- **Spezialisierungsmechanismen**
  - Synthetisiere Initiallösung $Init[x]$ für Spezifikation $spec = (D,R,I,O)$
  - Wähle $\mathcal{L}$ für Bildbereich R, so daß $spec \ll spec_{\mathcal{L}}$ beweisbar
  - Extrahiere Substitution $\theta{:}D \rightarrow D_{\mathcal{L}}$ und spezialisiere $\mathcal{L}$ mit θ
    - Ergibt Nachbarschaftsstruktur N für Problemstellung
  - Generiere Filter zur Beschränkung auf optimale Lösungen
- **Eventuell Verzicht auf Exaktheit**
  - Liefert effizienteren, aber suboptimalen Algorithmus

- **Umordnung von Folgen**
  - Suche $\hat{=}$ Permutation einzelner Elemente einer Folge
  - Änderungsparameter: Indizes der Eingabeliste `L`
  - Perturbation: Vertauschung zweier Elemente einer Ausgabeliste `S`

$$\texttt{LS\_seq\_re}(\alpha) \equiv \begin{array}{lll} D & \mapsto & \texttt{Seq}(\alpha) \\ R & \mapsto & \texttt{Seq}(\alpha) \\ I & \mapsto & \lambda \texttt{L}.\ \texttt{true} \\ O & \mapsto & \lambda \texttt{L},\texttt{S}.\ \texttt{rearranges(L,S)} \\ \pi & \mapsto & \lambda \texttt{L},\texttt{S}.\ \texttt{(domain(S),domain(S))} \\ Action & \mapsto & \lambda \texttt{i},\texttt{j},\texttt{L},\texttt{S}.\ [\texttt{S}_{(i \leftrightarrow j)(k)} \mid \texttt{k} \in \texttt{domain(S)}] \end{array}$$

$$\texttt{(i}\leftrightarrow\texttt{j)(k)} \hat{=} \texttt{if k=i then j else if k=j then i else k}$$

- **Teilmengen fester Größe**
  - Suche $\hat{=}$ Austausch einzelner Elemente einer Menge
  - Änderungsparameter: Elemente der Ein- und Ausgabemenge
  - Perturbation: Austausch zweier Elemente in Ausgabemenge

$$\texttt{LS\_subsets}(\alpha) \equiv \begin{array}{lll} D & \mapsto & \texttt{Set}(\alpha) \times \mathbb{N} \\ R & \mapsto & \texttt{Set}(\alpha) \\ I & \mapsto & \lambda \texttt{S},\texttt{m}.\ \texttt{m} \leq \texttt{|S|} \\ O & \mapsto & \lambda \texttt{S},\texttt{m},\texttt{S'}.\ \texttt{S'} \subseteq \texttt{S} \ \wedge\ \texttt{|S'|=m} \\ \pi & \mapsto & \lambda \texttt{S},\texttt{m},\texttt{S'}.\ \texttt{(S} \setminus \texttt{S'},\texttt{S')} \\ Action & \mapsto & \lambda \texttt{i},\texttt{j},\texttt{S},\texttt{m},\texttt{S'}.\ \texttt{S'} = \texttt{(S} \cup \{\texttt{i}\}\texttt{)-y} \end{array}$$

Synthesestrategie für Lokalsuch-Algorithmen

Start: $\texttt{FUNCTION}\ f_{opt}(x:D):R\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \texttt{RETURNS}\ y$
$\texttt{SUCH THAT}\ O[x,y]\ \wedge\ \forall t:R.\ (O[x,t]\ \Rightarrow\ c[x,y]{\leq}c[x,t])$

1. **Wähle Lokalsuchtheorie $\mathcal{L}$ mit Ausgabetyp R aus Wissensbank**
2. **Beweise** $(D,R,I,O) \ll spec_{\mathcal{L}}$
   - Extrahiere Substitution θ und setze $\mathcal{L}_\theta = (D, R, I, O, \pi_\theta, Action_\theta)$
3. **Generiere Lösungs-Filter FC für $\mathcal{L}_\theta$** *(Feasibility Constraint)*
   - Filter eliminiert Punkte, die keine gültigen Lösungen bzgl. O sind
     - $I[x] \wedge O[x,y] \wedge O[x, Action[i,j,\theta(x),y]] \Rightarrow FC[i,j,x,y]$
   - Vorwärtsinferenz: Vereinfachung der linken Seite ergibt FC
4. **Generiere Optimalitäts-Filter OC für $\mathcal{L}_\theta$** *(Optimality Constraint)*
   - Filter eliminiert kostenungünstigere Punkte
     - $I[x] \wedge O[x,y] \wedge O[x, Action[i,j,\theta(x),y]] \wedge c[x,y]{\leq}c[x, Action[i,j,\theta(x),y]]$
       $\Rightarrow OC[i,j,x,y]$
   - Lokale Optima müssen Bedingung $\forall i,j \in \pi(x,y).\ OC(i,j,x,y)$ erfüllen
5. **Synthetisiere Initiallösung $Init$ für Spezifikation**
   $\texttt{FUNCTION}\ f(x:D):R\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \texttt{RETURNS}\ y\ \texttt{SUCH THAT}\ O[x,y]$

Synthesestrategie für Lokalsuch-Algorithmen

6. Instantiiere Schema für suboptimale Lokalsuch Algorithmen

$$\texttt{FUNCTION } \boldsymbol{f_{opt}}(x{:}D){:}R \texttt{ WHERE } I[x] \texttt{ RETURNS } y$$
$$\texttt{SUCH THAT } O[x,y] \wedge \forall t{:}R.\,(O[x,t] \Rightarrow c[x,y] \leq c[x,t])$$
$$\equiv \boldsymbol{f_{LS}}(x, Init[x])$$

$$\texttt{FUNCTION } \boldsymbol{f}(x{:}D){:}R \texttt{ WHERE } I[x] \texttt{ RETURNS } y \texttt{ SUCH THAT } O[x,y] \equiv Init[x]$$

$$\texttt{FUNCTION } \boldsymbol{f_{ls}}(x,z{:}D{\times}R){:}R \texttt{ WHERE } I[x] \wedge O[x,z] \texttt{ RETURNS } y$$
$$\texttt{SUCH THAT } O[x,y] \wedge \forall t \in N[x,y].\,(O[x,t] \Rightarrow c[x,y] \leq c[x,t])$$
$$\equiv \texttt{if } \forall i,j \in \pi[\theta(x),z].\ FC[i,j,x,z] \wedge O[x, Action[i,j,\theta(x),y]]$$
$$\Rightarrow OC[i,j,x,z] \wedge c[x,z] \leq c[x, Action[i,j,\theta(x),y]] \texttt{ then z}$$
$$\texttt{else } \boldsymbol{f_{LS}}(x, \texttt{arb}(\{\, Action[i,j,\theta(x),y] \mid i,j \in \pi[\theta(x),z].$$
$$\wedge\ FC[i,j,x,z] \wedge O[x, Action[i,j,\theta(x),y]]$$
$$\wedge\ \neg OC[i,j,x,z] \vee c[x,z] > c[x, Action[i,j,\theta(x),y]]\ \}))$$

Lösungs- und Optimalitätstests notwendig für Korrektheit

Algorithmus testet nur Parameter, welche die Filter FC und OC passieren

Effiziente Abarbeitung nutzt andthen/orelse Semantik von $\wedge$ und $\vee$

7. Generiere Bedingungen für Exaktheit *(Global Optimality Constraint)*

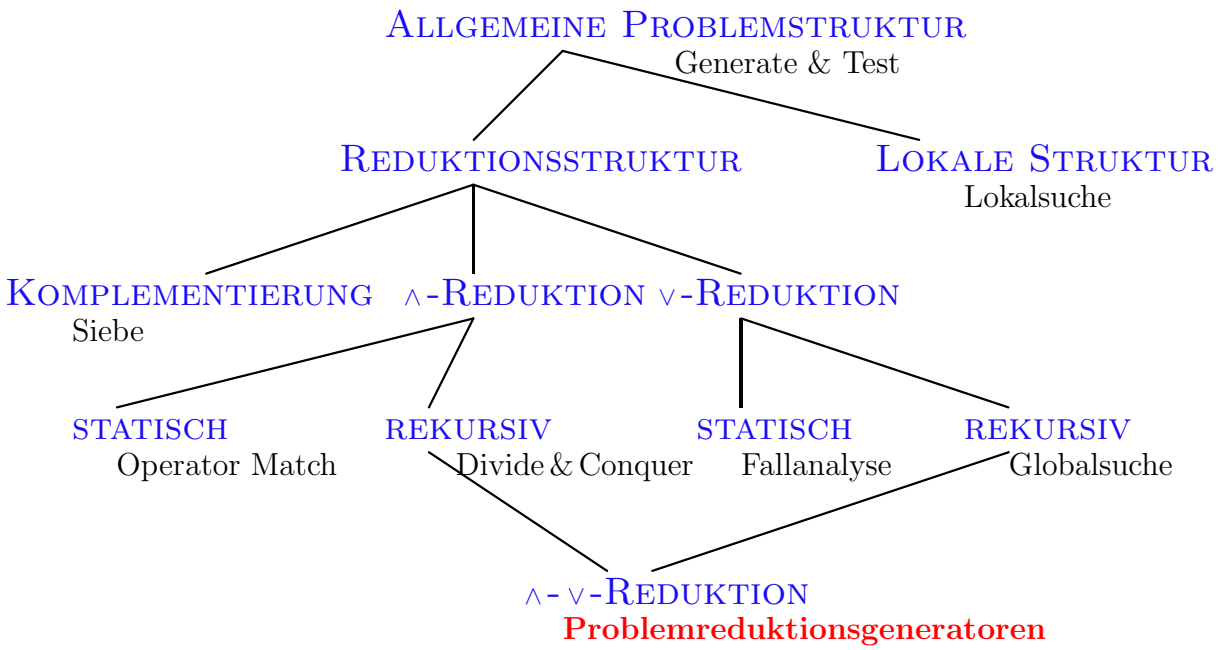
– Zusätzlicher (optionaler) Filter eliminiert suboptimale Lösungen

· $I[x] \wedge O[x,y] \wedge O[x, Action[i,j,\theta(x),y]] \wedge c[x,y] \leq c[x, Action[i,j,\theta(x),y]]$
$\wedge \forall t{:}R.\, O[x,t] \Rightarrow c[x,y] \leq c[x,t] \Rightarrow GOC[x,y]$

Lokalsuche: Anwendungsbeispiele

- **Minimal Spanning Tree**
  - Gegeben: Graph mit gewichteten Kanten (Zugriffszeiten, Abstände,...)
  - Gesucht: Baum, auf dem alle Knoten mit minimalen Kosten erreichbar
  - Initialwert: Erzeuge spannenden Baum
  - Perturbation: Ergänze neue Kante, entferne eine andere
  - Feasibility Constraint: Entfernte Kante muß redundant sein
  - Optimality Constraint: Hinzugefügte Kante ist teurer als bisheriger Weg
- **Lineare Programmierung**
  - Minimiere lineare Funktion $f(x_1, ..x_n)=\Sigma c_i x_i$ unter Restriktionen $A_j[x_1, ..x_n]$
    Standard Darstellung: Minimiere $c \star x$ unter $A \star x=b \ \wedge \ \forall i \leq n.x_i \geq 0$
  - Initiallösung: Setze $x_{m+1}, ..x_n := 0$ und löse $A_{1..m} \star x_{1..m}$ mit $\forall i \leq m.x_i > 0$
    durch Gauß-Verfahren
  - Perturbation: Setze ein $\texttt{x}_i\texttt{:=0}$, wähle neues $\texttt{x}_j \neq \texttt{0}$
  - Feasibility Constraint: Alte + neue x-Komponenten nach Lösung positiv
  - Optimality Constraint: Relative Kosten steigen durch Veränderung

Problemreduktionsgeneratoren



- **∨-∧-Reduktion von Problemen**
  - Problem besitzt mehrere Lösungen
  - Gesamtlösung ist Summe unabhängiger Einzellösungen (∨-Reduktion)
  - Einzellösungen aus Teillösungen zusammengesetzt (∧-Reduktion)
  - Verallgemeinert Dynamisches Programmieren, Spielbaumsuche, ...
- **Synthese ähnlich zu Divide & Conquer Techniken**

Problemreduktionsgeneratoren: Grundidee

- **Verallgemeinertes Divide & Conquer Schema**
  - Unabhängige Divide & Conquer Algorithmen für jede Einzellösung
    - Dekompositionen und Kompositionen verschieden
    - Teilprobleme können einander überlappen
    - Basisfall primitiver Eingaben wird einfaches Divide & Conquer
  - Lösung durch Vereinigung aller Einzellösungen berechnen
- **Allgemeines Algorithmenschema**

  $\texttt{FUNCTION}\ f(x{:}D)\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \texttt{RETURNS}\ \{y{:}R \mid O[x,y]\}$
  $\equiv \bigcup_{i,k}(Compose_i \circ (f_{i_1} \times .. \times f_{i_k}) \circ Decompose_i)(x)$
- **4 zentrale Komponenten der Algorithmentheorie**
  - $Decompose_i$: $D \to D_{i_1} \times .. \times D_{i_k}$ Aufspalten der Eingabe in Teilprobleme
  - Hilfsfunktionen f_{i_j}: $D_{i_j} \to R_{i_j}$ evtl. rekursiver Aufruf von f
  - $Compose_i$: $R_{i_1} \times .. \times R_{i_k} \to R$ Zusammensetzen der Teillösungen
  - Wohlfundierte Ordnung $\succ$ für Terminierungsgarantiee
  - **Erweitertes Strong Problem Reduction Principle**

Problemreduktionsgeneratoren: Korrektheit

$\texttt{FUNCTION}\ f(x{:}D)\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \texttt{RETURNS}\ \{y{:}R \mid O[x,y]\}$

$\equiv \bigcup_{i,k}(Compose_i \circ (f_{i_1} \times .. \times f_{i_k}) \circ Decompose_i)\,(x)$

ist korrekt, wenn 5 Axiome erfüllt sind

---

1. O **rekursiv zerlegbar in** O_{D_i}, $O_{i_1} \times .. \times O_{i_k}$ **und** O_{C_i} *(SPRP)*

   $O[x,z] \Leftrightarrow \exists i{:}\mathbb{N}, \bar{y}_i{:}D_{i_1} \times .. D_{i_k}, \bar{w}_i{:}R_{i_1} \times .. R_{i_k}.\ O_{D_i}[x,\bar{y}_i] \wedge O_{i_1,..i_k}[\bar{y}_i,\bar{w}_i] \wedge O_{C_i}[\bar{w}_i,z]$

   $O_{i_1,..i_k}[y_{i_1},..y_{i_k},w_{i_1},..w_{i_k}] \equiv O_{i_1}(y_{i_1},w_{i_1}) \wedge .. \wedge O_{i_k}(y_{i_k},w_{i_k})$

2. **Dekompositionen erfüllen** O_{D_i} **und 'verkleinern' Problem**

   $\texttt{FUNCTION}\ f_{d_i}(x{:}D)\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \texttt{RETURNS}\ \{\bar{y}_i{:}D_{i_1} \times .. D_{i_k} \mid O_{D_i}[x,\bar{y}_i] \wedge x \succ \bar{y}_i \wedge I_{i_1,..i_k}[\bar{y}_i]\}$

   $x \succ \bar{y}_i \equiv x \succ y_{i_j}$ für alle j mit $D_{i_j}{=}D$

3. **Hilfsfunktionen** f_{i_j} **erfüllen** O_{i_j}

   $\texttt{FUNCTION}\ f_{i_j}(y_{i_j}{:}D_{i_j})\ \texttt{WHERE}\ I_{i_j}[y_{i_j}]\ \texttt{RETURNS}\ \{w_{i_j}{:}R_{i_j} \mid O_{i_j}[y_{i_j},w_{i_j}]\}$

4. **Kompositionen erfüllen** O_{C_i}

   $\texttt{FUNCTION}\ f_{c_i}(\bar{w}_i{:}R_{i_1} \times .. \times R_{i_k})\ \texttt{WHERE}\ \texttt{true}\ \texttt{RETURNS}\ \{z_i{:}R \mid O_{C_i}[\bar{w}_i,z_i]\}$

5. **Verkleinerungsrelation** $\succ$ **ist wohlfundierte Ordnung auf** D

Synthese von Problemreduktionsgeneratoren

- **Aufspaltung des Reduktionsprizips in 2 Axiome**
  - **Starke Korrektheit** bzgl. Komposition und Dekomposition

$$\forall i{:}\mathbb{N}, x{:}D, \bar{y}_i{:}D_{i_1}\times..D_{i_k}, \bar{w}_i{:}R_{i_1}\times..R_{i_k}, z{:}R. \qquad (1)$$
$$I[x]\wedge I_{i_1,..i_k}[\bar{y}_i]\wedge O_{i_1,..i_k}[\bar{y}_i,\bar{w}_i]\wedge O_{C_i}[\bar{w}_i,z] \;\Rightarrow\; (O_{D_i}[x,\bar{y}_i]\Leftrightarrow O[x,z])$$

$$\forall i{:}\mathbb{N}, x{:}D, \bar{y}_i{:}D_{i_1}\times..D_{i_k}, \bar{w}_i{:}R_{i_1}\times..R_{i_k}, z{:}R. \qquad (2)$$
$$I[x]\wedge I_{i_1,..i_k}[\bar{y}_i]\wedge O_{D_i}[x,\bar{y}_i]\wedge O_{i_1,..i_k}[\bar{y}_i,\bar{w}_i] \;\Rightarrow\; (O_{C_i}[\bar{w}_i,z]\Leftrightarrow O[x,z])$$

  - **Vollständigkeit** bzgl. Komposition

$$\forall i{:}\mathbb{N}, x{:}D, \bar{w}_i{:}R_{i_1}\times..R_{i_k}, z{:}R.$$
$$I[x]\wedge O[x,z]\wedge O_{C_i}[\bar{w}_i,z] \;\Rightarrow\; \exists\bar{y}_i{:}D_{i_1}\times..D_{i_k}.\,(I_{i_1,..i_k}[\bar{y}_i]\wedge O_{i_1,..i_k}[\bar{y}_i,\bar{w}_i])$$

- **Strategie analog zu Divide & Conquer Verfahren**
  1. Wähle $Decompose_i$ aus Wissensbank
  2. Konstruiere Hilfsfunktionen f_{i_j} (id oder rekursiver Aufruf von f)
  3. Konstruiere Dekompositionen $Compose_i$ mit Korrektheitsaxiom 1
  4. Wähle $\succ$ aus der Wissensbank und verifiziere $Decompose_i$
  5. Verifiziere Vollständigkeitsaxiom
  6. Instantiiere Algorithmenschema