Seminar Kategorientheorie

Holger Arnold

20. April 2004

1 Kategorien

Begriffe: Kategorie, Objekt, Morphismus, kommutatives Diagramm, Monoid

Definition 1 (Kategorie) Eine Kategorie $\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}_\mathbf{C}, \mathrm{Mor}_\mathbf{C}, \circ, \mathrm{id})$ ist definiert durch

1. eine Klasse $\mathrm{Obj}_\mathbf{C}$ von Objekten,
2. für je zwei Objekte $A, B \in \mathrm{Obj}_\mathbf{C}$ eine Menge $\mathrm{Mor}_\mathbf{C}(A, B)$ von Morphismen (Pfeilen) von A nach B,
3. für je drei Objekte $A, B, C \in \mathrm{Obj}_\mathbf{C}$ eine Kompositionsoperation $\circ_{(A,B,C)} : \mathrm{Mor}_\mathbf{C}(B, C) \times \mathrm{Mor}_\mathbf{C}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_\mathbf{C}(A, C)$,
4. für jedes Objekt $A \in \mathrm{Obj}_\mathbf{C}$ einen Identitätsmorphismus $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_\mathbf{C}$,

die folgende Bedingungen erfüllen:

Assoziativität Für alle Objekte $A, B, C \in \mathrm{Obj}_\mathbf{C}$ und alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_\mathbf{C}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_\mathbf{C}(B, C)$ und $h \in \mathrm{Mor}_\mathbf{C}(C, D)$ gilt:

$$(h \circ_{(B,C,D)} g) \circ_{(A,B,D)} f = h \circ_{(A,C,D)} (g \circ_{(A,B,C)} f)$$

Neutralität Für alle Objekte $A, B \in \mathrm{Obj}_\mathbf{C}$ und alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_\mathbf{C}(A, B)$ gilt:

$$\mathrm{id}_B \circ_{(A,B,B)} f = f = f \circ_{(A,A,B)} \mathrm{id}_A$$

Für einen Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_\mathbf{C}(A, B)$ heißt das Objekt A Quelle (domain) und das Objekt B Ziel (codomain); man schreibt auch $f : A \longrightarrow B$.

Jede Kategorie entspricht einem Graphen (Diagramm) mit den Objekten der Kategorie als Knoten und den Morphismen als Kanten. Ein Pfad $A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_n} A_n$ in einem solchen Graphen entspricht dem Morphismus f der durch die Komposition $f = f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ gebildet wird. Ein Graph einer Kategorie $\mathbf{C}$ heißt kommutativ, wenn je zwei Pfade mit gleichen Anfangs- und Endknoten gleiche Morphismen in $\mathbf{C}$ bezeichnen.

Aus algebraischer Sicht entspricht eine Kategorie einem Monoid, dessen Elemente die Morphismen der Kategorie sind. Die Komposition von Morphismen entspricht der Verknüpfung von Elementen des Monoids. Weil sich nur solche

Morphismen verknüpfen lassen, deren Objekte zueinander passen, haben wir es mit einem partiellen Monoid zu tun.

Ein sehr wichtiger Punkt ist, dass auf der kategoriellen Ebene keine Informationen über die Struktur der Objekte einer Kategorie verfügbar sind. Das bedeutet, dass die Eigenschaften von Objekten nur über ihre Beziehungen zu anderen Objekten beschrieben werden können.

Beispiel 1 (Kategorie der Mengen und Abbildungen) Die Kategorie **Set** der Mengen und Abbildungen ist folgendermaßen definiert:

1. $\mathrm{Obj}_{\mathbf{Set}}$ ist die Klasse der Mengen.
2. Für je zwei Mengen A und B ist $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Set}}(A, B)$ die Menge der totalen Abbildungen von A nach B.
3. Die Komposition ist die Abbildungskomposition, d.h. für $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ ist $g \circ f : A \longrightarrow C$ definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
4. Die Identitäten sind die identischen Abbildungen.

Assoziativität und Neutralität sind offensichtlich gegeben.

Beispiel 2 (partielle Ordnungen) Jede partielle Ordnung $P = (M, \leq)$ erzeugt eine Kategorie $\mathbf{Cat}(P)$ durch

1. $\mathrm{Obj}_{\mathbf{Cat}(P)} = M$
2. $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Cat}(P)}(x, y) = \begin{cases} \{*\} & \text{wenn } x \leq y \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$

Komposition und Identitäten sind damit bereits eindeutig bestimmt.

Beispiel 3 (Kategorie der aussagenlogischen Formeln) In der Kategorie $\mathbf{Form}(P)$ sind die Objekte aussagenlogische Formeln über der Menge der Aussagensymbole P. Für zwei Objekte $\varphi, \psi \in \mathrm{Obj}_{\mathbf{Form}(P)}$ gibt es genau dann einen Morphismus von φ nach ψ, wenn ψ aus φ folgt.

Beispiel 4 (Kategorie der Algebren und Homomorphismen) Die Kategorie $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ zu einer gegebenen Signatur Σ besteht aus allen Σ-Algebren als Objekten und allen Σ-Homomorphismen als Morphismen. Komposition und Identitäten sind komponentenweise definiert.

Beispiel 5 (Kategorie der Graphen und Graphhomomorphismen) Die Kategorie **Graph** besteht aus allen Graphen als Objekten und allen Graphhomomorphismen als Morphismen. Komposition und Identitäten sind wieder komponentenweise definiert. Für eine passende Signatur GRAPH stimmt diese Kategorie mit der Kategorie $\mathbf{Alg}(\mathrm{GRAPH})$ überein.

Beispiel 6 (Pfadgraph) Für einen Graphen $G = (E, V, s, t)$ ist die von G erzeugte Kategorie $\mathbf{Cat}(G)$ der Pfadgraph von G. Die Objekte von $\mathbf{Cat}(G)$ sind die Knoten von G; die Morphismen von $\mathbf{Cat}(G)$ sind die Pfade von G, d.h. Wörter von zueinander passenden Kanten. Die Komposition ist die Verkettung von Pfaden und die Identitäten sind die leeren Pfade.

2 Konstruktion von Kategorien

Begriffe: Unterkategorie, Produktkategorie, duale Kategorie, Pfeilkategorie, Kommakategorie

Definition 2 (Unterkategorie) Eine Kategorie $\mathbf{C}$ heißt Unterkategorie einer Kategorie $\mathbf{D}$, wenn gilt:

1. $\mathrm{Obj}_{\mathbf{C}} \subseteq \mathrm{Obj}_{\mathbf{D}}$,
2. $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A, B) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(A, B)$
3. $f \circ^{\mathbf{C}} g = f \circ^{\mathbf{D}} g$
4. $\mathrm{id}_A^{\mathbf{C}} = \mathrm{id}_A^{\mathbf{D}}$

$\mathbf{C}$ heißt volle Unterkategorie von $\mathbf{D}$, wenn $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(A, B)$ für alle $A, B \in \mathrm{Obj}_{\mathbf{C}}$ gilt.

Beispiel 7 (Kategorie der endlichen Mengen) Die Kategorie **FinSet** der endlichen Mengen und Abbildungen zwischen endlichen Mengen ist eine volle Unterkategorie von **Set**.

Definition 3 (Produktkategorie) Die Produktkategorie $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ zweier Kategorien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ besteht aus den kartesischen Produkten der Objekte und Morphismen von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$; Komposition und Identität sind komponentenweise definiert:

1. $\mathrm{Obj}_{\mathbf{A}\times\mathbf{B}} = \mathrm{Obj}_{\mathbf{A}} \times \mathrm{Obj}_{\mathbf{B}}$
2. $\mathrm{Mor}_{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}((A, B), (A', B')) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(A, A') \times \mathrm{Mor}_{\mathbf{B}}(B, B')$
3. $(f_2, g_2) \circ^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}} (f_1, g_1) = (f_2 \circ^{\mathbf{A}} f_1, g_2 \circ^{\mathbf{B}} g_1)$
4. $\mathrm{id}_{(A,B)}^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}} = (\mathrm{id}_A^{\mathbf{A}}, \mathrm{id}_B^{\mathbf{B}})$

Definition 4 (duale Kategorie) Zu einer Kategorie $\mathbf{C}$ ist die duale Kategorie $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ definiert durch

1. $\mathrm{Obj}_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} = \mathrm{Obj}_{\mathbf{C}}$
2. $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(B, A)$
3. $f \circ^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} g = g \circ^{\mathbf{C}} f$
4. $\mathrm{id}_A^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} = \mathrm{id}_A^{\mathbf{C}}$

Die Kategorie $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ enthält also genau die umgekehrtem Morphismen der Kategorie $\mathbf{C}$. Zu jeder kategoriellen Konstruktion K in einer Kategorie $\mathbf{C}$ lässt sich die duale Konstruktion K^{op} bilden, indem K in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ ausgeführt wird. Gilt eine logische Aussage für alle Kategorien, folgt daraus auch die Gültigkeit der dualen Aussage für alle Kategorien.

Definition 5 (Pfeilkategorie) Die Pfeilkategorie $\mathbf{C}^{\rightarrow}$ zu einer Kategorie $\mathbf{C}$ ist definiert durch

1. $\mathrm{Obj}_{\mathbf{C}^{\rightarrow}} = \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}$
2. $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}^{\rightarrow}}(f : A \longrightarrow B, g : C \longrightarrow D) = \{(h,k) \,|\, h \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,C), k \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(B,D), g \circ h = k \circ f\}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "k"] & D \end{tikzcd}$$

3. $(h',k') \circ^{\mathbf{C}^{\rightarrow}} (h,k) = (h' \circ^{\mathbf{C}} h, k' \circ^{\mathbf{C}} k)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d] & C \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ B \arrow[r, "k"] & D \arrow[r, "k'"] & F \end{tikzcd}$$

4. $\mathrm{id}_f^{\mathbf{C}^{\rightarrow}} = (\mathrm{id}_A^{\mathbf{C}}, \mathrm{id}_B^{\mathbf{C}})$ für alle $f : A \longrightarrow B \in \mathrm{Obj}_{\mathbf{C}^{\rightarrow}}$

Definition 6 (Kommakategorie) Für eine Kategorie $\mathbf{C}$ und ein Objekt $X \in \mathrm{Obj}_{\mathbf{C}}$ ist die Kategorie $\mathbf{C} \downarrow X$ („$\mathbf{C}$ über X“) definiert durch

1. $\mathrm{Obj}_{\mathbf{C}\downarrow X} = \{f : A \to X \,|\, A \in \mathrm{Obj}_{\mathbf{C}}, f \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,X)\}$
2. $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}\downarrow X}(f : A \to X, g : B \to X) = \{h \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,B) \,|\, f = g \circ h\}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

3. $k \circ^{\mathbf{C}\downarrow X} h = k \circ^{\mathbf{C}} h$
4. $\mathrm{id}_f^{\mathbf{C}\downarrow X} = \mathrm{id}_f^{\mathbf{C}}$

Für eine Kategorie $\mathbf{C}$ und ein Objekt $X \in \mathrm{Obj}_{\mathbf{C}}$ ist die Kategorie $\mathbf{C} \uparrow X$ („$\mathbf{C}$ unter X“) definiert durch

1. $\mathrm{Obj}_{\mathbf{C}\uparrow X} = \{f : X \to A \,|\, A \in \mathrm{Obj}_{\mathbf{C}}, f \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X,A)\}$
2. $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}\uparrow X}(f : X \to A, g : X \to B) = \{h \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,B) \,|\, g = h \circ f\}$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[rr, "h"] & & B \end{tikzcd}$$

3. $k \circ^{\mathbf{C}\downarrow X} h = k \circ^{\mathbf{C}} h$

4. $\mathrm{id}_f^{\mathbf{C}\downarrow X} = \mathrm{id}_f^{\mathbf{C}}$

Kommakategorien sind äquivalent zu Pfeilkategorien, in denen nur Morphismen von einem gegebenen Quellobjekt oder zu einem gegebenen Zielobjekt betrachtet werden. Es gilt: $\mathbf{C} \uparrow X = (\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \downarrow X)^{\mathrm{op}}$.

Beispiel 8 (Kategorie der reellen Funktionen) Die Kategorie $\mathbf{Set} \downarrow \mathbb{R}$ hat alle reellwertigen Funktionen als Objekte. Ein Morphismus von $f : A \to \mathbb{R}$ nach $g : B \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion $k : A \to B$ mit $f = g \circ k$.

3 Isomorphie, Mono- und Epimorphismen

Begriffe: Isomorphismus, Isomorphie, Monomorphismus, Epimorphismus

Definition 7 (Isomorphismus) Ein Morphismus $i : A \to B$ einer Kategorie $\mathbf{C}$ ist genau dann ein Isomorphismus in $\mathbf{C}$, wenn ein Morphismus j existiert, für den gilt:

$$j \circ i = \mathrm{id}_A \text{ und } i \circ j = \mathrm{id}_B.$$

Zwei Objekte $A, B \in \mathrm{Obj}_{\mathbf{C}}$ sind isomorph, $A \cong B$, wenn ein Isomorphismus $i : A \to B$ in $\mathbf{C}$ existiert.

Beispiel 9 (Kategorie der Mengen) Zwei Objekte A und B in $\mathbf{Set}$ sind genau dann isomorph, wenn eine bijektive Abbildung $i : A \to B$ existiert.

Definition 8 (Monomorphismus) Ein Morphismus $f : A \to B$ einer Kategorie $\mathbf{C}$ ist ein Monomorphismus in $\mathbf{C}$, falls für alle Morphismen $g, h : C \to A$ in $\mathbf{C}$ gilt:

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Definition 9 (Epimorphismus) Ein Morphismus $f : A \to B$ einer Kategorie $\mathbf{C}$ ist ein Epimorphismus in $\mathbf{C}$, falls für alle Morphismen $g, h : B \to C$ in $\mathbf{C}$ gilt:

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

Monomorphismen und Epimorphismen sind duale Konstruktionen, d.h. $f : A \to B$ ist genau dann ein Monomorphismus in $\mathbf{C}$, wenn $f : B \to A$ ein Epimorphismus in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ ist. Analog ist $f : A \to B$ genau dann ein Isomorphismus in $\mathbf{C}$, wenn $f : B \to A$ ein Isomorphismus in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ ist.

Die Komposition $g \circ f$ ist ein Monomorphismus (Epimorphismus), wenn f und g Monomorphismen (Epimorphismen) sind. Wenn $f \circ g$ ein Monomorphismus (Epimorphismus) ist, dann ist f ein Monomorphismus (g ein Epimorphismus). Jeder Isomorphismus ist ein Mono- und ein Epimorphismus.

Beispiel 10 (injektive und surjektive Abbildungen) In der Kategorie $\mathbf{Set}$ sind die Monomorphismen genau die injektiven Abbildungen und die Epimorphismen genau die surjektiven Abbildungen. Die Isomorphismen in $\mathbf{Set}$ sind genau die injektiven und surjektiven Abbildungen.

Beispiel 11 (partielle Ordnungen) In der von der partiellen Ordnung P erzeugten Kategorie $\mathbf{Cat}(P)$ ist jeder Morphismus sowohl ein Monomorphismus als auch ein Epimorphismus. Die Isomorphismen in $\mathbf{Cat}(P)$ sind genau die Identitäten. Es gibt also Morphismen, die sowohl Mono- als auch Epimorphismen, aber keine Isomorphismen sind.

4 Initiale und terminale Objekte

Begriffe: initiales Objekt, terminales Objekt, universelle Konstruktion

Definition 10 (initiales Objekt) Ein Objekt $\mathbf{0} \in \mathrm{Obj}_{\mathbf{C}}$ ist ein initiales Objekt in $\mathbf{C}$, wenn es von $\mathbf{0}$ zu jedem Objekt $X \in \mathrm{Obj}_{\mathbf{C}}$ genau einen Morphismus in $\mathbf{C}$ gibt.

Definition 11 (terminales Objekt) Ein Objekt $\mathbf{1} \in \mathrm{Obj}_{\mathbf{C}}$ ist ein terminales Objekt in $\mathbf{C}$, wenn es von jedem Objekt $X \in \mathrm{Obj}_{\mathbf{C}}$ zu $\mathbf{1}$ genau einen Morphismus in $\mathbf{C}$ gibt.

Initiale und terminale Objekte einer Kategorie sind eindeutig bis auf Isomorphie. Die Definitionen von initialem und terminalem Objekt sind Beispiele für universelle Konstruktionen, in denen die Eigenschaften einer Struktur in einer Kategorie durch ihre Beziehung zu allen anderen Strukturen der Kategorie beschrieben werden.

Beispiel 12 (Kategorie der Mengen) In **Set** ist jede einelementige Menge ein terminales Objekt, denn von jeder Menge X in eine Menge $\{*\}$ gibt es nur die Abbildung $f : X \to \{*\}$ mit $f(x) = *$ für alle $x \in X$. Die leere Menge ist das einzige initiale Objekt. Die einzige Abbildung von $\emptyset$ in eine Menge X ist die leere Abbildung.

Beispiel 13 (Kategorie der aussagenlogischen Formeln) In der Kategorie $\mathbf{Form}(P)$ ist $\perp$ initial und $\top$ terminal.

Beispiel 14 (Kategorie der Graphen) In **Graph** ist jeder Graph mit genau einem Knoten und einer Kante ein terminales Objekt. Der leere Graph ist das einzige initiale Objekt.

5 Produkte und Coprodukte

Begriffe: binäres Produkt, Morphismenprodukt, binäres Coprodukt, Morphismencoprodukt, Produkt, kartesische Kategorie

Definition 12 (binäres Produkt) Seien $\mathbf{C}$ eine Kategorie und A und B zwei Objekte aus $\mathbf{C}$. Ein binäres Produkt $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ von A und B ist definiert durch

1. ein Produktobjekt $A \times B$,
2. zwei Morphismen $\pi_1 : A \times B \to A$ und $\pi_2 : A \times B \to B$, die Projektionen,

die folgende universelle Eigenschaft erfüllen: für jedes Objekt X und je zwei Morphismen $f : X \to A$ und $g : X \to B$ aus $\mathbf{C}$ gibt es in $\mathbf{C}$ einen eindeutig bestimmten Morphismus $\langle f, g\rangle : X \to A \times B$ mit $f = \pi_1 \circ \langle f, g\rangle$ und $g = \pi_2 \circ \langle f, g\rangle$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f, g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \end{tikzcd}$$

In einer Kategorie muss nicht für jedes Paar von Objekten ein Produkt existieren. Ebenso kann ein Paar von Objekten mehr als ein Produkt besitzen. Allerdings sind alle Produkte zu einem Paar von Objekten einer Kategorie isomorph. Umgekehrt ist auch jedes zu einem Produkt zweier Objekte isomorphe Objekt ein Produkt dieser Objekte.

Beispiel 15 (Kategorie der Mengen) In der Kategorie **Set** ist das Produktobjekt zweier Objekte A und B das kartesische Produkt $A \times B$ der Mengen A und B.

Beispiel 16 (partielle Ordnungen) Für eine partielle Ordnung $P = (M, \leq)$ und zwei Objekte $x, y \in M$ ist ein Produkt in $\mathbf{Cat}(P)$ ein Infimum von x und y in P.

Beispiel 17 (Kategorie der aussagenlogischen Formeln) Das Produkt zweier Objekte φ und ψ aus $\mathbf{Form}(P)$ ist die Konjunktion von φ und ψ.

Kommutativität und Assoziativität von Produkten Seien A, B und C Objekte einer Kategorie $\mathbf{C}$. Dann gilt:

1. Wenn $(A \times B, \pi_1^{A,B}, \pi_2^{A,B})$ und $(B \times A, \pi_1^{B,A}, \pi_2^{B,A})$ Produkte in $\mathbf{C}$ sind, dann sind $A \times B$ und $B \times A$ isomorph.

2. Wenn $(A\times B, \pi_1^{A,B}, \pi_1^{A,B})$, $(B\times C, \pi_1^{B,C}, \pi_2^{B,C})$, $((A\times B)\times C, \pi_1^{A\times B,C}, \pi_2^{A\times B,C})$ und $(A \times (B \times C), \pi_1^{A,B\times C}, \pi_2^{A,B\times C})$ Produkte in $\mathbf{C}$ sind, dann sind $A \times (B \times C)$ und $(A \times B) \times C$ isomorph.

Definition 13 (Produkte von Morphismen) Seien $(A\times B, \pi_A, \pi_B)$ und $(C\times D, \pi_C, \pi_D)$ Produkte von A und B bzw. von C und D in der Kategorie $\mathbf{C}$ und seien $f : A \to C$ und $g : B \to D$ Morphismen in $\mathbf{C}$. Dann ist der Produktmorphismus $f \times g : A \times B \to C \times D$ definiert durch $f \times g = \langle f \circ \pi_A, g \circ \pi_B\rangle$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, dashed, "f \times g"] & B \arrow[d, "g"] \\ C & C \times D \arrow[l, "\pi_C"'] \arrow[r, "\pi_D"] & D \end{tikzcd}$$

Definition 14 (binäres Coprodukt) Seien **C** eine Kategorie und A und B zwei Objekte aus **C**. Ein binäres Coprodukt $(A + B, \iota_1, \iota_2)$ von A und B ist definiert durch

1. ein Coproduktobjekt $A + B$,
2. zwei Morphismen $\iota_1 : A + B \to A$ und $\iota_2 : A + B \to B$, die Injektionen,

die folgende universelle Eigenschaft erfüllen: für jedes Objekt X und je zwei Morphismen $f : A \to X$ und $g : B \to X$ aus **C** gibt es in **C** einen eindeutig bestimmten Morphismus $[f, g] : X \to A+B$ mit $f = [f, g] \circ \iota_1$ und $g = [f, g] \circ \iota_2$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "f"'] & A+B \arrow[d, dashed, "{[f,g]}"] & B \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, "g"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Coprodukt $A + B$ und Produkt $A \times B$ sind duale Konstruktionen.

Beispiel 18 (Kategorie der Mengen) In der Kategorie **Set** ist das Coproduktobjekt zweier Objekte A und B die disjunktive Vereinigung $A + B$ der Mengen A und B.

Beispiel 19 (partielle Ordnungen) Für eine partielle Ordnung $P = (M, \leq)$ und zwei Objekte $x, y \in M$ ist ein Coprodukt in $\mathbf{Cat}(P)$ ein Supremum von x und y in P. Existiert in $\mathbf{Cat}(P)$ für jedes Paar von Objekten ein Produkt und ein Coprodukt, dann bildet P einen Verband.

Beispiel 20 (Kategorie der aussagenlogischen Formeln) Das Coprodukt zweier Objekte φ und ψ aus $\mathbf{Form}(P)$ ist die Disjunktion von φ und ψ.

Definition 15 (Coprodukte von Morphismen) Seien $(A + B, \iota_A, \iota_B)$ und $(C + D, \iota_C, \iota_D)$ Coprodukte von A und B bzw. von C und D in der Kategorie **C** und seien $f : A \to C$ und $g : B \to D$ Morphismen in **C**. Dann ist der Coproduktmorphismus $f + g : A + B \to C + D$ definiert durch $f + g = [\iota_C \circ f, \iota_D \circ g]$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[d, "f"'] & A+B \arrow[d, dashed, "f+g"] & B \arrow[l, "\iota_B"'] \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "\iota_C"] & C+D & D \arrow[l, "\iota_D"']
\end{tikzcd}$$

Definition 16 (Produkt) Seien **C** eine Kategorie und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten aus **C** zu einer beliebigen Indexmenge I. Ein Produkt $(\Pi_{i \in I} A_i, (\pi_i)_{i \in I})$ von $(A_i)_{i \in I}$ in **C** ist definiert durch:

1. ein Produktobjekt $\Pi_{i \in I} A_i$,

2. eine Familie von Morphismen $(\pi_j)_{j \in I} : \Pi_{i \in I} A_i \to A_j$, die Projektionen,

die folgende universelle Eigenschaft erfüllen: für jedes Objekt X und jede Familie von Morphismen $(f_j : X \to A_j)_{j \in I}$ aus $\mathbf{C}$ gibt es in $\mathbf{C}$ einen eindeutig bestimmten Morphismus $\langle f_j \rangle_{j \in I} : X \to \Pi_{i \in I} A_i$ mit $f_j = \pi_j \circ \langle f_i \rangle_{i \in I}$ für alle $j \in I$.

Alle Produkte zu einer Familie von Objekten einer Kategorie sind isomorph. In einer Kategorie gibt es genau dann für jede endliche Familie von Objekten ein Produkt, wenn es in der Kategorie für jedes Paar von Objekten ein binäres Produkt gibt und die Kategorie ein terminales Objekt besitzt. Jedes endliche Produkt lässt sich folgendermaßen iterativ konstruieren: Wenn $(P, (\pi'_i)_{i \in \{1,\ldots,n-1\}})$ ein Produkt von $(A_i)_{i \in \{1,\ldots,n-1\}}$ ist, dann ist $P \times A_n$ ein Produkt von $(A_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ mit den Projektionen

$$\begin{aligned} \pi_k &= \pi'_k \circ \pi_1^{P,A_n} : P \times A_n \to A_k \text{ für } k = 1, \ldots, n-1 \\ \pi_n &= \pi_2^{P,A_n} : P \times A_n \to A_n, \end{aligned}$$

für ein beliebiges binäres Produkt $(P \times A_n, \pi_1^{P,A_n}, \pi_2^{P,A_n})$.

Definition 17 (kartesische Kategorie) Eine Kategorie $\mathbf{C}$ heißt kartesisch, wenn für jede endliche Familie von Objekten ein Produkt in $\mathbf{C}$ existiert.