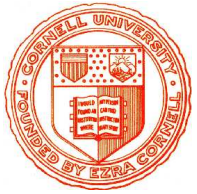
Theoretische Informatik



Einheit 1

Mathematische Methodik

1. Problemlösen
2. Beweistechniken
3. Wichtige Grundbegriffe

Methodik des Problemlösens

- **Klärung der Voraussetzungen**
  - Welche Begriffe sind zum Verständnis des Problems erforderlich?
  - Erstellung eines präzisen Modells: abstrahiere von überflüssigen Details
  - Formulierung des Problems im Modell: was genau ist zu tun?

Methodik des Problemlösens

- **Klärung der Voraussetzungen**
  - Welche Begriffe sind zum Verständnis des Problems erforderlich?
  - Erstellung eines präzisen Modells: abstrahiere von überflüssigen Details
  - Formulierung des Problems im Modell: was genau ist zu tun?
- **Lösungsweg konkretisieren**
  - Welche Einzelschritte benötigt man, um das Problem zu lösen?
  - Welches Gesamtergebnis ergibt sich aus den Einzelschritten?
  - Wie beweist man die Korrektheit des Gesamtergebnisses?

Methodik des Problemlösens

- **Klärung der Voraussetzungen**
  - Welche Begriffe sind zum Verständnis des Problems erforderlich?
  - Erstellung eines präzisen Modells: abstrahiere von überflüssigen Details
  - Formulierung des Problems im Modell: was genau ist zu tun?
- **Lösungsweg konkretisieren**
  - Welche Einzelschritte benötigt man, um das Problem zu lösen?
  - Welches Gesamtergebnis ergibt sich aus den Einzelschritten?
  - Wie beweist man die Korrektheit des Gesamtergebnisses?
- **Lösung zusammenfassen**
  - Kurz und prägnant: Argumente auf das Wesentliche beschränken
  - Umgangssprache durch mathematisch präzise Formulierungen ersetzen

Formale Beweise in der Informatik

- **Testen von Programmen ist unzureichend**
  - Nur hilfreich zur Entdeckung grober Fehler
  - Viele kleine, aber gravierende Fehler fallen durch das Testraster
    - Pentium Bug (1994), Ariane 5 (1996), Mars Polar Lander (1999), ...

Formale Beweise in der Informatik

- **Testen von Programmen ist unzureichend**
  - Nur hilfreich zur Entdeckung grober Fehler
  - Viele kleine, aber gravierende Fehler fallen durch das Testraster
    - Pentium Bug (1994), Ariane 5 (1996), Mars Polar Lander (1999), ...
- **Kritische Programme müssen "bewiesen" werden**
  - Erfolgreicher Beweis zeigt genau, wie das Programm arbeitet
  - Erfolgloser Beweisversuch deutet auf mögliche Fehler im Programm
  - Jeder Informatiker sollte die eigenen Programme beweisen

Formale Beweise in der Informatik

- **Testen von Programmen ist unzureichend**
  - Nur hilfreich zur Entdeckung grober Fehler
  - Viele kleine, aber gravierende Fehler fallen durch das Testraster
    - Pentium Bug (1994), Ariane 5 (1996), Mars Polar Lander (1999), ...
- **Kritische Programme müssen "bewiesen" werden**
  - Erfolgreicher Beweis zeigt genau, wie das Programm arbeitet
  - Erfolgloser Beweisversuch deutet auf mögliche Fehler im Programm
  - Jeder Informatiker sollte die eigenen Programme beweisen
- **Jeder Informatiker muß Beweise verstehen**
  - Deduktive Beweise für sequentielle Verarbeitung
  - Induktionsbeweise für Rekursion / Schleifen
  - Widerlegungsbeweise und Gegenbeispiele für Unmöglichkeitsaussagen

Behauptungen: Ausgangspunkt jeder Beweisführung

- **Wenn–Dann Aussagen:**
  - Eine Konklusion folgt aus aus einer oder mehreren Hypothesen (Annahmen)
  - z.B. "*Wenn* $x \geq 4$, *dann* $2^x \geq x^2$"
  - Auch: H *impliziert* K, *aus* H *folgt* K, K *wenn* H, $H \Rightarrow K$
  - Achtung: wenn K gilt, muß H nicht gelten (H muß nicht der Grund sein)

Behauptungen: Ausgangspunkt jeder Beweisführung

- **Wenn–Dann Aussagen:**
  - Eine Konklusion folgt aus aus einer oder mehreren Hypothesen (Annahmen)
  - z.B. "*Wenn* $x \geq 4$, *dann* $2^x \geq x^2$"
  - Auch: H *impliziert* K, *aus* H *folgt* K, K *wenn* H, $H \Rightarrow K$
  - Achtung: wenn K gilt, muß H nicht gelten (H muß nicht der Grund sein)

  Fast alle Behauptungen sind Wenn–Dann Aussagen
  - Hypothesen sind zuweilen implizit oder ergeben sich aus dem Kontext
  - z.B. "$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$" hat implizite Hypothese "θ *ist ein Winkel*"

Behauptungen: Ausgangspunkt jeder Beweisführung

- **Wenn–Dann Aussagen:**
  - Eine Konklusion folgt aus aus einer oder mehreren Hypothesen (Annahmen)
  - z.B. "*Wenn* $x \geq 4$, *dann* $2^x \geq x^2$"
  - Auch: H *impliziert* K, *aus* H *folgt* K, K *wenn* H, $H \Rightarrow K$
  - Achtung: wenn K gilt, muß H nicht gelten (H muß nicht der Grund sein)

  Fast alle Behauptungen sind Wenn–Dann Aussagen
  - Hypothesen sind zuweilen implizit oder ergeben sich aus dem Kontext
  - z.B. "$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$" hat implizite Hypothese "θ *ist ein Winkel*"

- **Genau dann, wenn Aussagen**
  - Zwei Aussagen A und B sind äquivalent ($A \Leftrightarrow B$, $A \equiv B$, A *iff* B (engl.))
  - z.B. "$x^2 = 1$ *genau dann, wenn* $x = 1$"
  - Gleichwertig mit $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$

Beispiel eines deduktiven Beweises

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

Beispiel eines deduktiven Beweises

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

- **Informaler Beweis**
  - Es sei x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen

Beispiel eines deduktiven Beweises

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

- **Informaler Beweis**
  - Es sei x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen
  - Das Quadrat jeder positiven ganzen Zahl ist mindestens 1

Beispiel eines deduktiven Beweises

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

- **Informaler Beweis**
  - Es sei x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen
  - Das Quadrat jeder positiven ganzen Zahl ist mindestens 1
  - Aus der Annahme folgt damit, daß $x \geq 4$ sein muß

Beispiel eines deduktiven Beweises

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

- **Informaler Beweis**
  - Es sei x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen
  - Das Quadrat jeder positiven ganzen Zahl ist mindestens 1
  - Aus der Annahme folgt damit, daß $x \geq 4$ sein muß
  - Wir benutzen den Satz "*Wenn* $x \geq 4$, *dann* $2^x \geq x^2$" Folie ??

Beispiel eines deduktiven Beweises

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

- **Informaler Beweis**
  - Es sei x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen
  - Das Quadrat jeder positiven ganzen Zahl ist mindestens 1
  - Aus der Annahme folgt damit, daß $x \geq 4$ sein muß
  - Wir benutzen den Satz "*Wenn* $x \geq 4$, *dann* $2^x \geq x^2$" und schließen daraus, daß $2^x \geq x^2$ gilt

Folie ??

Beispiel eines deduktiven Beweises

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

- **Informaler Beweis**
  - Es sei x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen
  - Das Quadrat jeder positiven ganzen Zahl ist mindestens 1
  - Aus der Annahme folgt damit, daß $x \geq 4$ sein muß
  - Wir benutzen den Satz "*Wenn* $x \geq 4$, *dann* $2^x \geq x^2$" Folie ??
    und schließen daraus, daß $2^x \geq x^2$ gilt

- **Formaler Beweis**

	Aussage	Begründung
1.	$x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$	Gegeben
2.	$a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 1$	Gegeben
3.	$a^2 \geq 1, b^2 \geq 1, c^2 \geq 1, d^2 \geq 1$	(2) und Gesetze der Arithmetik
4.	$x \geq 4$	(1), (3) und Gesetze der Arithmetik
5.	$2^x \geq x^2$	(4) und Folie ??

Deduktive Beweisführung

Logische Beweisschritte von Annahme zur Konklusion

Deduktive Beweisführung

Logische Beweisschritte von Annahme zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**

Logische Beweisschritte von Annahme zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit (Menge der) Annahmen

Deduktive Beweisführung

Logische Beweisschritte von Annahme zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit (Menge der) Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus (allen) vorhergehenden Aussagen

Logische Beweisschritte von Annahme zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit (Menge der) Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus (allen) vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt

Deduktive Beweisführung

Logische Beweisschritte von Annahme zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit (Menge der) Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus (allen) vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt
- **Zulässige Argumente in Beweisschritten**

Logische Beweisschritte von Annahme zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit (Menge der) Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus (allen) vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt
- **Zulässige Argumente in Beweisschritten**
  - Logischer Schluß: Sind A und $A \Rightarrow B$ bekannt, kann B gefolgert werden

Logische Beweisschritte von Annahme zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit (Menge der) Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus (allen) vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt
- **Zulässige Argumente in Beweisschritten**
  - Logischer Schluß: Sind A und $A \Rightarrow B$ bekannt, kann B gefolgert werden
  - Bekannte mathematische Grundgesetze (z.B. Arithmetik)

Logische Beweisschritte von Annahme zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit (Menge der) Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus (allen) vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt
- **Zulässige Argumente in Beweisschritten**
  - Logischer Schluß: Sind A und $A \Rightarrow B$ bekannt, kann B gefolgert werden
  - Bekannte mathematische Grundgesetze (z.B. Arithmetik)
  - Bereits bewiesene Sätze

Logische Beweisschritte von Annahme zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit (Menge der) Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus (allen) vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt
- **Zulässige Argumente in Beweisschritten**
  - Logischer Schluß: Sind A und $A \Rightarrow B$ bekannt, kann B gefolgert werden
  - Bekannte mathematische Grundgesetze (z.B. Arithmetik)
  - Bereits bewiesene Sätze
  - Auflösung von Definitionen

Logische Beweisschritte von Annahme zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit (Menge der) Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus (allen) vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt
- **Zulässige Argumente in Beweisschritten**
  - Logischer Schluß: Sind A und $A \Rightarrow B$ bekannt, kann B gefolgert werden
  - Bekannte mathematische Grundgesetze (z.B. Arithmetik)
  - Bereits bewiesene Sätze
  - Auflösung von Definitionen
  - Extensionalität von Mengen: $M{=}M'$ genau dann wenn $M{\subseteq}M' \wedge M'{\subseteq}M$

    $M{\subseteq}M'$ genau dann wenn $(\forall x)\, x \in M \Rightarrow x \in M'$

Logische Beweisschritte von Annahme zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit (Menge der) Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus (allen) vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt
- **Zulässige Argumente in Beweisschritten**
  - Logischer Schluß: Sind A und $A \Rightarrow B$ bekannt, kann B gefolgert werden
  - Bekannte mathematische Grundgesetze (z.B. Arithmetik)
  - Bereits bewiesene Sätze
  - Auflösung von Definitionen
  - Extensionalität von Mengen: $M{=}M'$ genau dann wenn $M{\subseteq}M' \wedge M'{\subseteq}M$

    $M{\subseteq}M'$ genau dann wenn $(\forall x)\, x \in M \Rightarrow x \in M'$
  - Gleichheit von Zahlen: $x{=}y$ genau dann wenn weder $x{<}y$ noch $x{>}y$

Beispiel für Auflösung von Definitionen

Wenn S endliche Teilmenge einer Menge U ist und das Komplement von S (bezüglich U) endlich ist, dann ist U endlich

Beispiel für Auflösung von Definitionen

Wenn S endliche Teilmenge einer Menge U ist und das Komplement von S (bezüglich U) endlich ist, dann ist U endlich

- **Definitionen**

  S endlich $\equiv$ Es gibt eine ganze Zahl n mit $||S|| = n$

  T Komplement von S $\equiv$ $T \cup S = U$ und $T \cap S = \emptyset$

Beispiel für Auflösung von Definitionen

Wenn S endliche Teilmenge einer Menge U ist und das Komplement von S (bezüglich U) endlich ist, dann ist U endlich

- **Definitionen**

  S endlich $\equiv$ Es gibt eine ganze Zahl n mit $||S|| = n$

  T Komplement von S $\equiv$ $T \cup S = U$ und $T \cap S = \emptyset$

- **Beweis**

	Aussage	Begründung
1.	S endlich	Gegeben
2.	T Komplement von S	Gegeben
3.	T endlich	Gegeben
4.	$\|\|S\|\| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$	Auflösen der Definition in (1)
5.	$\|\|T\|\| = m$ für ein $m \in \mathbb{N}$	Auflösen der Definition in (3)
6.	$T \cup S = U$	Auflösen der Definition in (2)
7.	$T \cap S = \emptyset$	Auflösen der Definition in (2)
8.	$\|\|U\|\| = m + n$ für $n, m \in \mathbb{N}$	(4),(5),(6), (7) und Gesetze der Kardinalität
9.	U endlich	Einsetzen der Definition in (8)

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug. um Details rekonstruieren zu können

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug. um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug. um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Zwischenschritte müssen mit "üblichen" Vorkenntnissen erklärbar sein

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug. um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Zwischenschritte müssen mit "üblichen" Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug. um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Zwischenschritte müssen mit "üblichen" Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details
- Gedankensprünge sind erlaubt, wenn Sie die Materie gut genug verstehen, daß Sie nichts mehr falsch machen können

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug. um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Zwischenschritte müssen mit "üblichen" Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details
- Gedankensprünge sind erlaubt, wenn Sie die Materie gut genug verstehen, daß Sie nichts mehr falsch machen können
  ... es reicht nicht, daß Sie es einmal richtig gemacht haben

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug. um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Zwischenschritte müssen mit "üblichen" Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details
- Gedankensprünge sind erlaubt, wenn Sie die Materie gut genug verstehen, daß Sie nichts mehr falsch machen können
  ... es reicht nicht, daß Sie es einmal richtig gemacht haben

---

- Tip: ausführliche Lösungen entwickeln, bis Sie genug Erfahrung haben.
  Bei Präsentation für andere zentrale Gedanken aus Lösung extrahieren

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug. um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Zwischenschritte müssen mit "üblichen" Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details
- Gedankensprünge sind erlaubt, wenn Sie die Materie gut genug verstehen, daß Sie nichts mehr falsch machen können
  ... es reicht nicht, daß Sie es einmal richtig gemacht haben

---

- Tip: ausführliche Lösungen entwickeln, bis Sie genug Erfahrung haben.
  Bei Präsentation für andere zentrale Gedanken aus Lösung extrahieren
- Test: verstehen Ihre Kommilitonen Ihre Lösung und warum sie funktioniert?

Widerlegungsbeweise I

Zeige, daß eine Aussage A nicht gilt

- **Beweis durch Widerspruch**

Widerlegungsbeweise I

Zeige, daß eine Aussage A nicht gilt

- **Beweis durch Widerspruch**
  - A gilt nicht, wenn aus der Annahme von A ein Widerspruch folgt

Widerlegungsbeweise I

Zeige, daß eine Aussage A nicht gilt

- **Beweis durch Widerspruch**
  - A gilt nicht, wenn aus der Annahme von A ein Widerspruch folgt
  - z.B. *Wenn S endliche Teilmenge einer unendlichen Menge U ist, dann ist das Komplement von S (bezüglich U) unendlich*

Zeige, daß eine Aussage A nicht gilt

- **Beweis durch Widerspruch**
  - A gilt nicht, wenn aus der Annahme von A ein Widerspruch folgt
  - z.B. *Wenn S endliche Teilmenge einer unendlichen Menge U ist, dann ist das Komplement von S (bezüglich U) unendlich*
  - Beweis

	Aussage	Begründung
1.	S endlich	Gegeben
2.	T Komplement von S	Gegeben
3.	U unendlich	Gegeben
4.	T endlich	Annahme
5.	U endlich	(1), (4) mit Satz auf Folie ??
6.	Widerspruch	(3),(5)
7.	T unendlich	Annahme (4) muß falsch sein

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch
  - Beweis: 2 ist eine gerade Zahl, die eine Primzahl ist

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch
  - Beweis: 2 ist eine gerade Zahl, die eine Primzahl ist
- **Beweis durch Kontraposition**
  - Statt *wenn H dann K* zeige *wenn nicht K dann nicht H*
  - Behauptungen sind aussagenlogisch äquivalent

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch
  - Beweis: 2 ist eine gerade Zahl, die eine Primzahl ist
- **Beweis durch Kontraposition**
  - Statt *wenn H dann K* zeige *wenn nicht K dann nicht H*
  - Behauptungen sind aussagenlogisch äquivalent
- **Spezielle Anwendung: Indirekte Beweisführung**
  - Zeige, daß aus *H und nicht K* ein Widerspruch folgt

    Aussagenlogisch äquivalent zu *wenn H dann K*

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch
  - Beweis: 2 ist eine gerade Zahl, die eine Primzahl ist
- **Beweis durch Kontraposition**
  - Statt *wenn H dann K* zeige *wenn nicht K dann nicht H*
  - Behauptungen sind aussagenlogisch äquivalent
- **Spezielle Anwendung: Indirekte Beweisführung**
  - Zeige, daß aus *H und nicht K* ein Widerspruch folgt

    Aussagenlogisch äquivalent zu *wenn H dann K*
  - z.B. *Wenn für eine natürliche Zahl x gilt $x^2>1$, dann ist $x\geq 2$*

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch
  - Beweis: 2 ist eine gerade Zahl, die eine Primzahl ist
- **Beweis durch Kontraposition**
  - Statt *wenn H dann K* zeige *wenn nicht K dann nicht H*
  - Behauptungen sind aussagenlogisch äquivalent
- **Spezielle Anwendung: Indirekte Beweisführung**
  - Zeige, daß aus *H und nicht K* ein Widerspruch folgt

    Aussagenlogisch äquivalent zu *wenn H dann K*
  - z.B. *Wenn für eine natürliche Zahl x gilt $x^2>1$, dann ist $x\geq 2$*
  - Beweis: *Sei $x^2>1$. Wenn $x\geq 2$ nicht gilt, dann ist $x=1$ oder $x=0$.*

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch
  - Beweis: 2 ist eine gerade Zahl, die eine Primzahl ist
- **Beweis durch Kontraposition**
  - Statt *wenn H dann K* zeige *wenn nicht K dann nicht H*
  - Behauptungen sind aussagenlogisch äquivalent
- **Spezielle Anwendung: Indirekte Beweisführung**
  - Zeige, daß aus *H und nicht K* ein Widerspruch folgt

    Aussagenlogisch äquivalent zu *wenn H dann K*
  - z.B. *Wenn für eine natürliche Zahl x gilt $x^2>1$, dann ist $x\geq 2$*
  - Beweis: *Sei $x^2>1$. Wenn $x\geq 2$ nicht gilt, dann ist $x=1$ oder $x=0$.*

    Wegen $1^2=1$ und $0^2=0$ ist $x^2>1$ in beiden Fällen falsch.

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch
  - Beweis: 2 ist eine gerade Zahl, die eine Primzahl ist
- **Beweis durch Kontraposition**
  - Statt *wenn H dann K* zeige *wenn nicht K dann nicht H*
  - Behauptungen sind aussagenlogisch äquivalent
- **Spezielle Anwendung: Indirekte Beweisführung**
  - Zeige, daß aus *H und nicht K* ein Widerspruch folgt

    Aussagenlogisch äquivalent zu *wenn H dann K*
  - z.B. *Wenn für eine natürliche Zahl x gilt $x^2>1$, dann ist $x\geq 2$*
  - Beweis: *Sei $x^2>1$. Wenn $x\geq 2$ nicht gilt, dann ist $x=1$ oder $x=0$.*

    Wegen $1^2=1$ und $0^2=0$ ist $x^2>1$ in beiden Fällen falsch.

    Also muß $x\geq 2$ sein

Gegenbeispielkonstruktion für unendliche Objekte

Gegenbeispielkonstruktion für unendliche Objekte

- **Terminierung von Programmen ist "unentscheidbar"**

  Es gibt kein Programm, das testen kann, ob eine beliebiges Programm bei einer bestimmten Eingabe überhaupt anhält

Gegenbeispielkonstruktion für unendliche Objekte

- **Terminierung von Programmen ist "unentscheidbar"**

  Es gibt kein Programm, das testen kann, ob eine beliebiges Programm bei einer bestimmten Eingabe überhaupt anhält

- **Beweis stützt sich auf wenige Grundannahmen**

Gegenbeispielkonstruktion für unendliche Objekte

- **Terminierung von Programmen ist "unentscheidbar"**

  Es gibt kein Programm, das testen kann, ob eine beliebiges Programm bei einer bestimmten Eingabe überhaupt anhält

- **Beweis stützt sich auf wenige Grundannahmen**

  1. Programme und ihre Daten sind als Zahlen codierbar

Gegenbeispielkonstruktion für unendliche Objekte

- **Terminierung von Programmen ist "unentscheidbar"**

  Es gibt kein Programm, das testen kann, ob eine beliebiges Programm bei einer bestimmten Eingabe überhaupt anhält

- **Beweis stützt sich auf wenige Grundannahmen**

  1. Programme und ihre Daten sind als Zahlen codierbar
  2. Computer sind universelle Maschinen
     - Bei Eingabe von Programm und Daten berechnen sie das Ergebnis
     - Schreibweise: $p_i(j) \mathrel{\hat{=}}$ Anwendung des i-ten Programms auf die Zahl j

Gegenbeispielkonstruktion für unendliche Objekte

- **Terminierung von Programmen ist "unentscheidbar"**

  Es gibt kein Programm, das testen kann, ob eine beliebiges Programm bei einer bestimmten Eingabe überhaupt anhält

- **Beweis stützt sich auf wenige Grundannahmen**

  1. Programme und ihre Daten sind als Zahlen codierbar
  2. Computer sind universelle Maschinen
     - Bei Eingabe von Programm und Daten berechnen sie das Ergebnis
     - Schreibweise: $p_i(j) \mathrel{\hat{=}}$ Anwendung des i-ten Programms auf die Zahl j
  3. Man kann Programme beliebig zu neuen Programmen zusammensetzen

     ... und die Nummer des neuen Programms berechnen

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm zum Test auf Terminierung**

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm zum Test auf Terminierung**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm zum Test auf Terminierung**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	...
p_0	$\times$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	...
p_1	$\perp$	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_2	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	$\times$	...
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\times$	$\perp$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times \mathrel{\hat{=}}$ Terminierung, $\perp \mathrel{\hat{=}}$ hält nicht

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm zum Test auf Terminierung**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)

- **Konstruiere ein neues Programm** `Unsinn` **wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	...
p_0	$\times$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
p_1	$\bot$	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_2	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	$\times$	...
p_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\times$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times \mathrel{\hat{=}}$ Terminierung, $\bot \mathrel{\hat{=}}$ hält nicht

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm zum Test auf Terminierung**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)

- **Konstruiere ein neues Programm** `Unsinn` **wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	...
p_0	$\bot$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
p_1	$\bot$	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_2	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	$\times$	...
p_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\times$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times \mathrel{\hat{=}}$ Terminierung, $\bot \mathrel{\hat{=}}$ hält nicht

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm zum Test auf Terminierung**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)

- **Konstruiere ein neues Programm** `Unsinn` **wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	...
p_0	$\bot$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
p_1	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_2	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	$\times$	...
p_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\times$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times \mathrel{\hat{=}}$ Terminierung, $\bot \mathrel{\hat{=}}$ hält nicht

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm zum Test auf Terminierung**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)

- **Konstruiere ein neues Programm** `Unsinn` **wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	...
p_0	$\bot$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
p_1	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\times$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times \mathrel{\hat{=}}$ Terminierung, $\bot \mathrel{\hat{=}}$ hält nicht

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm zum Test auf Terminierung**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)

- **Konstruiere ein neues Programm** `Unsinn` **wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	...
p_0	$\bot$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
p_1	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times \mathrel{\hat{=}}$ Terminierung, $\bot \mathrel{\hat{=}}$ hält nicht

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm zum Test auf Terminierung**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	...
p_0	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	...
p_1	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times \mathrel{\hat{=}}$ Terminierung, $\perp \mathrel{\hat{=}}$ hält nicht

- **Konstruiere ein neues Programm** `Unsinn` **wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

- `Unsinn` **ist ein Programm**

  Also muß `Unsinn` **eine Nummer** k **haben**

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm zum Test auf Terminierung**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	...
p_0	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	...
p_1	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times \mathrel{\hat{=}}$ Terminierung, $\perp \mathrel{\hat{=}}$ hält nicht

- **Konstruiere ein neues Programm** `Unsinn` **wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

- `Unsinn` **ist ein Programm**

  Also muß `Unsinn` **eine Nummer** k **haben**

- **Was macht** p_k=`Unsinn` **auf seiner eigenen Nummer?**

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm zum Test auf Terminierung**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)

- **Konstruiere ein neues Programm `Unsinn` wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	...
p_0	$\bot$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
p_1	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\not\times$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times \mathrel{\hat{=}}$ Terminierung, $\bot \mathrel{\hat{=}}$ hält nicht

- `Unsinn` **ist ein Programm**

  Also muß `Unsinn` eine Nummer k haben

- **Was macht p_k=`Unsinn` auf seiner eigenen Nummer?**
  - Wenn $p_k(k)$ hält, dann `Term`(k,k)=1, also hält `Unsinn`(k) nicht an ???

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm zum Test auf Terminierung**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	...
p_0	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	...
p_1	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\not\times$	$\perp$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times \mathrel{\hat{=}}$ Terminierung, $\perp \mathrel{\hat{=}}$ hält nicht

- **Konstruiere ein neues Programm** `Unsinn` **wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

- `Unsinn` **ist ein Programm**

  Also muß `Unsinn` **eine Nummer** k **haben**

- **Was macht** p_k=`Unsinn` **auf seiner eigenen Nummer?**
  - Wenn $p_k(k)$ hält, dann `Term`(k,k)=1, also hält `Unsinn`(k) nicht an ???
  - Wenn $p_k(k)$ nicht hält, dann `Term`(k,k)=0, also hält `Unsinn`(k) an ???

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm zum Test auf Terminierung**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	...
p_0	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	...
p_1	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times \mathrel{\hat{=}}$ Terminierung, $\perp \mathrel{\hat{=}}$ hält nicht

- **Konstruiere ein neues Programm** `Unsinn` **wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

- `Unsinn` **ist ein Programm**

  Also muß `Unsinn` **eine Nummer** k **haben**

- **Was macht** p_k=`Unsinn` **auf seiner eigenen Nummer?**
  - Wenn $p_k(k)$ hält, dann `Term`(k,k)=1, also hält `Unsinn`(k) nicht an ???
  - Wenn $p_k(k)$ nicht hält, dann `Term`(k,k)=0, also hält `Unsinn`(k) an ???

- **Dies ist ein Widerspruch,**

  Also kann es den Test auf Terminierung nicht geben

Induktive Beweise I

Beweise eine Aussage A für alle natürlichen Zahlen

Induktive Beweise I

Beweise eine Aussage A für alle natürlichen Zahlen

- **Standardinduktion**
  - Gilt A für i und folgt A für n+1, wenn A für n gilt dann gilt A für alle $n \geq i$

Induktive Beweise I

Beweise eine Aussage A für alle natürlichen Zahlen

- **Standardinduktion**
  - Gilt A für i und folgt A für n+1, wenn A für n gilt dann gilt A für alle $n \geq i$
  - z.B. *Wenn* $x \geq 4$, *dann* $2^x \geq x^2$

Induktive Beweise I

Beweise eine Aussage A für alle natürlichen Zahlen

- **Standardinduktion**
  - Gilt A für i und folgt A für n+1, wenn A für n gilt dann gilt A für alle $n \geq i$
  - z.B. *Wenn* $x \geq 4$, *dann* $2^x \geq x^2$

    Induktionsanfang x=4: Es ist $2^x = 16 \geq 16 = x^2$

Induktive Beweise I

Beweise eine Aussage A für alle natürlichen Zahlen

- **Standardinduktion**
  - Gilt A für i und folgt A für n+1, wenn A für n gilt dann gilt A für alle $n \geq i$
  - z.B. *Wenn* $x \geq 4$, *dann* $2^x \geq x^2$

    Induktionsanfang x=4: Es ist $2^x = 16 \geq 16 = x^2$

    Induktionsschritt: Es gelte $2^n \geq n^2$ für ein beliebiges $n \geq 4$

Beweise eine Aussage A für alle natürlichen Zahlen

- **Standardinduktion**
  - Gilt A für i und folgt A für n+1, wenn A für n gilt dann gilt A für alle $n \geq i$
  - z.B. *Wenn* $x \geq 4$, *dann* $2^x \geq x^2$

    Induktionsanfang x=4: Es ist $2^x = 16 \geq 16 = x^2$

    Induktionsschritt: Es gelte $2^n \geq n^2$ für ein beliebiges $n \geq 4$

    Dann ist $2^{n+1} = 2 * 2^n \geq 2n^2$ aufgrund der Induktionsannahme

    und $(n+1)^2 = n^2+2n+1 = n(n+2+1/n) \leq n(n+n) = 2n^2$ wegen $n \geq 4$

Beweise eine Aussage A für alle natürlichen Zahlen

- **Standardinduktion**
  - Gilt A für i und folgt A für n+1, wenn A für n gilt dann gilt A für alle $n \geq i$
  - z.B. *Wenn* $x \geq 4$, *dann* $2^x \geq x^2$

    Induktionsanfang x=4: Es ist $2^x = 16 \geq 16 = x^2$

    Induktionsschritt: Es gelte $2^n \geq n^2$ für ein beliebiges $n \geq 4$

    Dann ist $2^{n+1} = 2 * 2^n \geq 2n^2$ aufgrund der Induktionsannahme

    und $(n+1)^2 = n^2+2n+1 = n(n+2+1/n) \leq n(n+n) = 2n^2$ wegen $n \geq 4$

    also gilt $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

Induktive Beweise I

Beweise eine Aussage A für alle natürlichen Zahlen

- **Standardinduktion**
  - Gilt A für i und folgt A für n+1, wenn A für n gilt dann gilt A für alle $n \geq i$
  - z.B. *Wenn* $x \geq 4$, *dann* $2^x \geq x^2$

    Induktionsanfang x=4: Es ist $2^x = 16 \geq 16 = x^2$

    Induktionsschritt: Es gelte $2^n \geq n^2$ für ein beliebiges $n \geq 4$

    Dann ist $2^{n+1} = 2 * 2^n \geq 2n^2$ aufgrund der Induktionsannahme

    und $(n+1)^2 = n^2+2n+1 = n(n+2+1/n) \leq n(n+n) = 2n^2$ wegen $n \geq 4$

    also gilt $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

- **Vollständige Induktion**
  - Folgt A für n, wenn A für alle $j < n$ mit $j \geq i$ gilt dann gilt A für alle $n \geq i$
  - Mächtiger, da man nicht den unmittelbaren Vorgänger benutzen muß

Strukturelle Induktion

Zeige A für alle Elemente einer rekursiven Datenstruktur

Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

Strukturelle Induktion

Zeige A für alle Elemente einer rekursiven Datenstruktur

Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

– z.B. *Die Summe einer Liste L von positiven ganzen Zahlen ist mindestens so groß wie ihre Länge*

Strukturelle Induktion

Zeige A für alle Elemente einer rekursiven Datenstruktur

Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

– z.B. *Die Summe einer Liste L von positiven ganzen Zahlen ist mindestens so groß wie ihre Länge*

Induktionsanfang L ist leer: Die Summe und die Länge von L ist 0

Strukturelle Induktion

Zeige A für alle Elemente einer rekursiven Datenstruktur

Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

– z.B. *Die Summe einer Liste L von positiven ganzen Zahlen ist mindestens so groß wie ihre Länge*

Induktionsanfang L ist leer: Die Summe und die Länge von L ist 0

Induktionsschritt: Es gelte $sum(L) \geq |L|$

Strukturelle Induktion

Zeige A für alle Elemente einer rekursiven Datenstruktur

Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

– z.B. *Die Summe einer Liste L von positiven ganzen Zahlen ist mindestens so groß wie ihre Länge*

Induktionsanfang L ist leer: Die Summe und die Länge von L ist 0

Induktionsschritt: Es gelte $sum(L) \geq |L|$

Betrachte die Liste $L \circ x$, die durch Anhängen von x and L entsteht

Dann gilt $sum(L \circ x) = sum(L) + x \geq sum(L) + 1 \geq |L| + 1 = |L \circ x|$

Strukturelle Induktion

Zeige A für alle Elemente einer rekursiven Datenstruktur

Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

– z.B. *Die Summe einer Liste L von positiven ganzen Zahlen ist mindestens so groß wie ihre Länge*

Induktionsanfang L ist leer: Die Summe und die Länge von L ist 0

Induktionsschritt: Es gelte $sum(L) \geq |L|$

Betrachte die Liste $L \circ x$, die durch Anhängen von x and L entsteht

Dann gilt $sum(L \circ x) = sum(L) + x \geq sum(L) + 1 \geq |L| + 1 = |L \circ x|$

Häufig eingesetzt für Analyse von

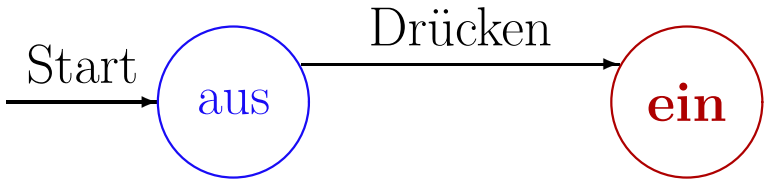
- **Baumstrukturen** (Suchen, Sortieren, ...)
- **Syntaktische Strukturen** (Formeln, Programmiersprachen, ...)

⋮

Gegenseitige Induktion

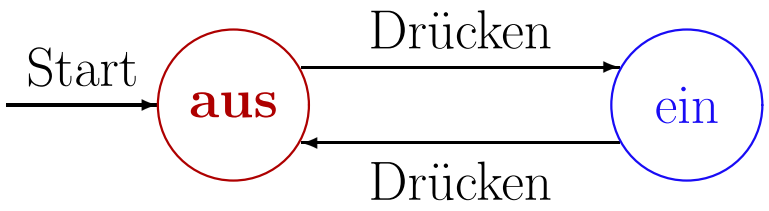
Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



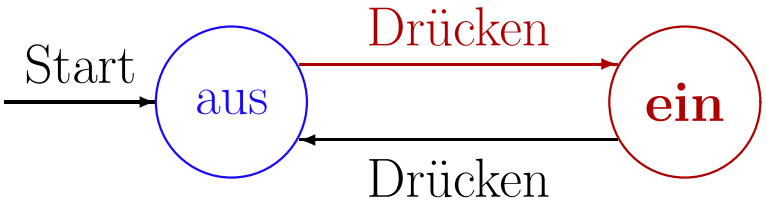
Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



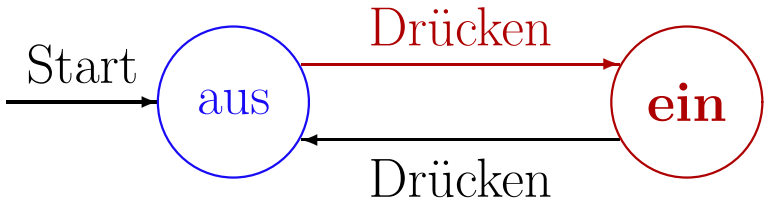
Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



Gegenseitige Induktion

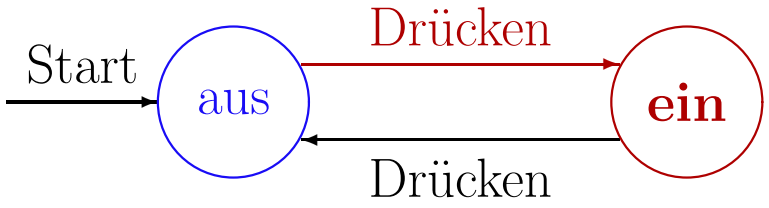
Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



Zeige: Automat ist ein Wechselschalter

Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



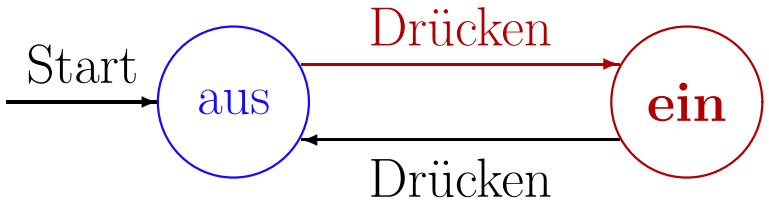
Zeige: Automat ist ein Wechselschalter

– $S_1(n)$: Ist n gerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken ausgeschaltet

– $S_2(n)$: Ist n ungerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken eingeschaltet

Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



Zeige: Automat ist ein Wechselschalter

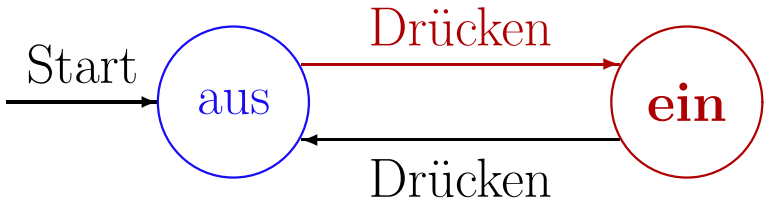
– $S_1(n)$: Ist n gerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken ausgeschaltet

– $S_2(n)$: Ist n ungerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken eingeschaltet

Induktionsanfang $n{=}0$: n ist gerade also gilt $S_2(0)$
der Automat ist ausgeschaltet, also gilt $S_1(0)$

Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



Zeige: Automat ist ein Wechselschalter

– $S_1(n)$: Ist n gerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken ausgeschaltet

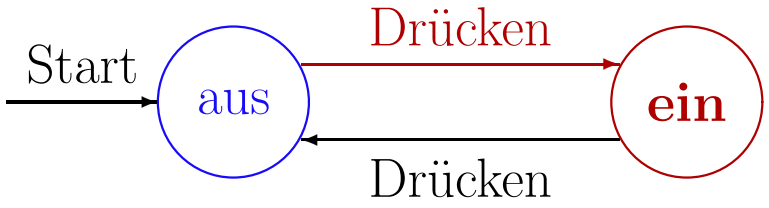
– $S_2(n)$: Ist n ungerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken eingeschaltet

Induktionsanfang $n{=}0$: n ist gerade also gilt $S_2(0)$
der Automat ist ausgeschaltet, also gilt $S_1(0)$

Induktionsschritt: Es gelte $S_1(n)$ und $S_2(n)$. Betrachte $n{+}1$

Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



Zeige: Automat ist ein Wechselschalter

– $S_1(n)$: Ist n gerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken ausgeschaltet

– $S_2(n)$: Ist n ungerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken eingeschaltet

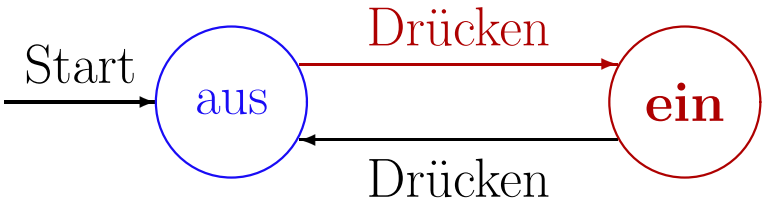
Induktionsanfang $n{=}0$: n ist gerade also gilt $S_2(0)$
der Automat ist ausgeschaltet, also gilt $S_1(0)$

Induktionsschritt: Es gelte $S_1(n)$ und $S_2(n)$. Betrachte $n{+}1$

– Falls $n{+}1$ ungerade, dann gilt $S_1(n{+}1)$ und n ist gerade.
Wegen $S_1(n)$ war der Automat "aus" und wechselt auf "ein". Es gilt $S_2(n)$

Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



Zeige: Automat ist ein Wechselschalter

– $S_1(n)$: Ist n gerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken ausgeschaltet

– $S_2(n)$: Ist n ungerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken eingeschaltet

Induktionsanfang $n{=}0$: n ist gerade also gilt $S_2(0)$
der Automat ist ausgeschaltet, also gilt $S_1(0)$

Induktionsschritt: Es gelte $S_1(n)$ und $S_2(n)$. Betrachte $n{+}1$

– Falls $n{+}1$ ungerade, dann gilt $S_1(n{+}1)$ und n ist gerade.
Wegen $S_1(n)$ war der Automat "aus" und wechselt auf "ein". Es gilt $S_2(n)$

– Falls $n{+}1$ gerade, dann gilt $S_2(n{+}1)$ und n ist ungerade.
Wegen $S_2(n)$ war der Automat "ein" und wechselt auf "aus". Es gilt $S_1(n)$

Mathematisches Vokabular I: Worte und Sprachen

– **Alphabet Σ**: endliche Menge von Symbolen,
  z.B. $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Sigma = \{0, .., 9\}$, $\Sigma = \{A, .., Z, a, .., z, \ , ?, !, ..\}$

– **Worte**: endliche Folge w von Symbolen eines Alphabets
  Auch Zeichenreihen oder Strings genannt

Mathematisches Vokabular I: Worte und Sprachen

- **Alphabet Σ**: endliche Menge von Symbolen,
  z.B. $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Sigma = \{0, .., 9\}$, $\Sigma = \{A, .., Z, a, .., z, \ , ?, !, ..\}$
- **Worte**: endliche Folge w von Symbolen eines Alphabets
  Auch Zeichenreihen oder Strings genannt
- ϵ: Leeres Wort (ohne jedes Symbol)
- wv: Konkatenation (Aneinanderhängung) der Worte w und v
- u^i: i-fache Konkatenation des Wortes (oder Symbols) u
- $|w|$: Länge des Wortes w (Anzahl der Symbole)
- $v \sqsubseteq w$: v Präfix von w, wenn $w = v\,u$ für ein Wort u

Mathematisches Vokabular I: Worte und Sprachen

- **Alphabet Σ**: endliche Menge von Symbolen,
  z.B. $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Sigma = \{0, .., 9\}$, $\Sigma = \{A, .., Z, a, .., z, \ , ?, !, ..\}$
- **Worte**: endliche Folge w von Symbolen eines Alphabets
  Auch Zeichenreihen oder Strings genannt
- ϵ: Leeres Wort (ohne jedes Symbol)
- wv: Konkatenation (Aneinanderhängung) der Worte w und v
- u^i: i-fache Konkatenation des Wortes (oder Symbols) u
- $|w|$: Länge des Wortes w (Anzahl der Symbole)
- $v \sqsubseteq w$: v Präfix von w, wenn $w = v\,u$ für ein Wort u
- Σ^k: Menge der Worte der Länge k mit Symbolen aus Σ
- Σ^*: Menge aller Worte über Σ
- Σ^+: Menge aller nichtleeren Worte über Σ

Mathematisches Vokabular I: Worte und Sprachen

- **Alphabet Σ**: endliche Menge von Symbolen,
  z.B. $\Sigma = \{0,1\}$, $\Sigma = \{0,..,9\}$, $\Sigma = \{A,..,Z,a,..,z,\ ,?,!,..\}$
- **Worte**: endliche Folge w von Symbolen eines Alphabets
  Auch Zeichenreihen oder Strings genannt
- ϵ: Leeres Wort (ohne jedes Symbol)
- wv: Konkatenation (Aneinanderhängung) der Worte w und v
- u^i: i-fache Konkatenation des Wortes (oder Symbols) u
- $|w|$: Länge des Wortes w (Anzahl der Symbole)
- $v \sqsubseteq w$: v Präfix von w, wenn $w = v\,u$ für ein Wort u
- Σ^k: Menge der Worte der Länge k mit Symbolen aus Σ
- Σ^*: Menge aller Worte über Σ
- Σ^+: Menge aller nichtleeren Worte über Σ
- **Sprache L**: Beliebige Menge von Worten über einem Alphabet Σ
  Üblicherweise in abstrakter Mengennotation gegeben
  z.B. $\{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \text{ ist gerade}\}$ $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- **Problem P**: Menge von Worten über einem Alphabet Σ
  Das "Problem" ist, Zugehörigkeit zur Menge P zu testen

Mathematisches Vokabular II: Funktionen

- **Funktion $f : S \to S'$**: Abbildung zwischen den Grundmengen S und S' nicht unbedingt auf allen Elementen von S definiert
- **Domain von f**: $domain(f) = \{x \in S \mid f(x) \text{ definiert}\}$ (Definitionsbereich)
- **Range von f**: $range(f) = \{y \in S' \mid \exists x \in S \; f(x) = y\}$ (Wertebereich)
- **f total**: $domain(f) = S$ (andernfalls ist **f partiell**)

Mathematisches Vokabular II: Funktionen

- **Funktion $f : S \to S'$**: Abbildung zwischen den Grundmengen S und S' nicht unbedingt auf allen Elementen von S definiert
- **Domain von f**: $domain(f) = \{x \in S \mid f(x) \text{ definiert}\}$ (Definitionsbereich)
- **Range von f**: $range(f) = \{y \in S' \mid \exists x \in S\ f(x) = y\}$ (Wertebereich)
- **f total**: $domain(f) = S$ (andernfalls ist **f partiell**)
- **f injektiv**: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- **f surjektiv**: $range(f) = S'$
- **f bijektiv**: f injektiv und surjektiv
- **Umkehrfunktion $f^{-1}: S' \to S$**: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ (f injektiv!)
- **Urbild $f^{-1}(L)$**: Die Menge $\{x \in S \mid f(x) \in L\}$

Mathematisches Vokabular II: Funktionen

- **Funktion $f : S \to S'$**: Abbildung zwischen den Grundmengen S und S' nicht unbedingt auf allen Elementen von S definiert
- **Domain von f**: $\mathit{domain}(f) = \{x \in S \mid f(x) \text{ definiert}\}$ (Definitionsbereich)
- **Range von f**: $\mathit{range}(f) = \{y \in S' \mid \exists x \in S\ f(x) = y\}$ (Wertebereich)
- **f total**: $\mathit{domain}(f) = S$ (andernfalls ist **f partiell**)
- **f injektiv**: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- **f surjektiv**: $\mathit{range}(f) = S'$
- **f bijektiv**: f injektiv und surjektiv
- **Umkehrfunktion $f^{-1}: S' \to S$**: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ (f injektiv!)
- **Urbild $f^{-1}(L)$**: Die Menge $\{x \in S \mid f(x) \in L\}$
- **Charakteristische Funktion χ_L von $L \subseteq S$**: $\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- **Partiell-charakteristische Funktion ψ_L**: $\psi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Mathematisches Vokabular II: Funktionen

- **Funktion $f : S \to S'$**: Abbildung zwischen den Grundmengen S und S' nicht unbedingt auf allen Elementen von S definiert
- **Domain von f**: $domain(f) = \{x \in S \mid f(x) \text{ definiert}\}$ (Definitionsbereich)
- **Range von f**: $range(f) = \{y \in S' \mid \exists x \in S\ f(x) = y\}$ (Wertebereich)
- **f total**: $domain(f) = S$ (andernfalls ist **f partiell**)
- **f injektiv**: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- **f surjektiv**: $range(f) = S'$
- **f bijektiv**: f injektiv und surjektiv
- **Umkehrfunktion $f^{-1}: S' \to S$**: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ (f injektiv!)
- **Urbild $f^{-1}(L)$**: Die Menge $\{x \in S \mid f(x) \in L\}$
- **Charakteristische Funktion χ_L von $L \subseteq S$**: $\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- **Partiell-charakteristische Funktion ψ_L**: $\psi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Mehr Vokabular wird bei Bedarf vorgestellt