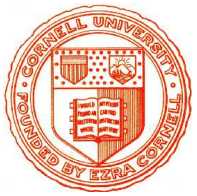
Theoretische Informatik



Einheit 3

Elementare Berechenbarkeitstheorie

1. Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit
2. Universelle Maschinen
3. Beweistechniken für unlösbare Probleme

Berechenbarkeitstheorie

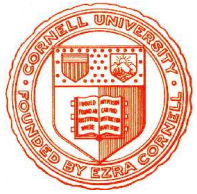
Untersuchung von Fragen der Berechenbarkeit unabhängig vom Modell

- **Was kann überhaupt berechnet werden?**
  - Welche Funktionen sind berechenbar?
  - Welche Programmeigenschaften kann man entscheiden (testen)?
- **Wie kann man Lösungen wiederverwenden?**
  - Verwendung von Abschlußeigenschaften
  - Transformation in ein anderes Problem (Reduktion)
- **Wo liegen die Grenzen?**
  - Terminierung, Korrektheit, Äquivalenz, Optimalität von Programmen
- **Welche Beweistechniken gibt es?**
  - Konstruktion von abstrakten Gegenbeispielen durch Diagonalisierung
  - Problemreduktion
  - Direkte Beweise (Busy Beaver)

Berechenbarkeitstheorie – Vorgehensweise

- **Konzepte modellunabhängig präzisieren**
  - Berechenbare Funktionen
  - (Semi-)entscheidbare und aufzählbare Mengen
- **Grundeigenschaften aus Modellen herleiten**
  - Zusammenhänge zwischen den Konzepten
  - Abschlußeigenschaften
  - Codierung von Programmen als Daten
  - Existenz universeller Funktionen
- **Theorie nur auf dieser Basis weiterführen**
  - Hier: die wichtigsten Unmöglichkeitsaussagen

Theoretische Informatik



Einheit 3.1

Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit

1. Präzisierung der Begriffe
2. Zusammenhänge
3. Abschlußeigenschaften

Berechenbarkeit

- **Berechenbarkeit auf Worten**
  - $f{:}X^*{\to}Y^*$ berechenbar, falls f Turing-berechenbar
- **Berechenbarkeit auf Wort-Tupeln** $f{:}X^*{\times}X^*{\to}Y^*$
  - $f{:}X^*{\times}X^*{\to}Y^*$ berechenbar, falls $f'{:}(X{\cup}\{\#\})^*{\to}Y^*$ mit $f'(v\#w) = f(v,w)$ berechenbar
- **Berechenbarkeit auf Zahlen**
  - $f{:}\mathbb{N}{\to}\mathbb{N}$ berechenbar, falls $f_r{:}X^*{\to}X^*$ mit $f_r(w) = r(f(\mathrm{r}^{-1}(w)))$ berechenbar
  - $r{:}\mathbb{N}{\to}X^*$ bijektive Repräsentation von Zahlen als Worte
- **Berechenbarkeit auf Zahlentupeln und -listen**
  - $f{:}\mathbb{N}^k{\to}\mathbb{N}$ berechenbar, falls $f'{:}\mathbb{N}{\to}\mathbb{N}$ mit $f'\langle x_1, x_2, .., x_k\rangle^k = f(x_1, x_2, .., x_k)$ berechenbar
  - $f{:}\mathbb{N}^*{\to}\mathbb{N}$ berechenbar, falls $f'{:}\mathbb{N}{\to}\mathbb{N}$ mit $f'\langle x_1, x_2, .., x_k\rangle^* = f(x_1x_2...x_k)$ berechenbar
  - $\langle\rangle^k{:}\mathbb{N}^k{\to}\mathbb{N}$, $\langle\rangle^*{:}\mathbb{N}^*{\to}\mathbb{N}$ Standard-Tupelfunktionen

Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit – intuitiv

- **Entscheidbarkeit einer Menge**
  - Wir können eine Maschine konstruieren, die testet, ob ein bestimmtes Element zur Menge gehört oder nicht
- **Semi-Entscheidbarkeit einer Menge**
  - Wir können eine Maschine konstruieren, die testet, ob ein bestimmtes Element zur Menge gehört, aber im Mißerfolgsfall eventuell niemals eine Antwort gibt
- **Aufzählbarkeit einer Menge**
  - Wir können eine Maschine konstruieren, welche die Elemente der Menge schrittweise generiert, also z.B. bei Eingabe der Zahl n (oder einer Codierung) das n-te Element der Menge ausgibt

Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit – präzisiert

- $M \subseteq X^*$ **entscheidbar**
  - $\chi_M : X^* \to \{0,1\}^*$ berechenbar, wobei $\chi_M(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $M \subseteq X^*$ **semi-entscheidbar**
  - $\psi_M : X^* \to \{0,1\}^*$ berechenbar, wobei $\psi_M(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in M, \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$
- $M \subseteq X^*$ **(rekursiv) aufzählbar**
  - $M = \emptyset$ oder es gibt eine totale, berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \to X^*$ mit $M = \text{range}(f) = \{v \in X^* \mid \exists w \in \{1\}^* \; f(w) = v\}$
- **Berechenbarkeit von Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$ analog**

Aufzählbarkeit – Anmerkungen

- **Jede endliche Menge ist aufzählbar**
  - $M = \{x_0, ..., x_n\}$ ist Wertebereich von f mit $f(n) = \begin{cases} x_i & \text{falls } i \leq n, \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - f ist primitiv rekursiv, also berechenbar
- **Aufzählungen sind nicht notwendigerweise injektiv**
  - Die Funktion g mit $g(n) = \begin{cases} n{+}1 & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ n & \text{sonst} \end{cases}$
    zählt alle ungeraden Zahlen genau zweimal auf
- **Jede Menge hat verschiedene Aufzählungen**
  - Die Funktion h mit $h(n) = 2n{+}1$
    zählt alle ungeraden Zahlen genau einmal auf
- **Es gibt viele äquivalente Charakterisierungen**
  - Aufzählbar — semi-entscheidbar
  - Werte- oder Haltebereich einer (evtl. partiellen) berechenbaren Funktion

Charakterisierungen von Aufzählbarkeit

Für $M \subseteq \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. **M ist aufzählbar**
2. **$M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$**
   - $\text{range}(f) = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, f nicht notwendigerweise total
3. **M ist semi-entscheidbar**
4. **$M = \text{domain}(f)$ für ein berechenbares $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$**
   - $\text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$

Aussage gilt analog für $M \subseteq X^*$, $M \subseteq \mathbb{N}^k$, ...

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  - Falls $M=\emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_\perp)$, wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ✓
  - Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f ✓
- **M=range(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ M semi-entscheidbar**
  - Es sei M=range(f) für ein berechenbares f
  - Es ist $\psi_M(w) = \begin{cases} 1 & \exists x, i.\ f(x) \text{ hält nach } i \text{ Schritten mit } f(x) = w, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$
  - Damit ist ψ_M berechenbar und M semi-entscheidbar ✓
- **M semi-entscheidbar $\Rightarrow$ M=domain(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M semi-entscheidbar.
  - Dann ist ψ_M berechenbar und $M = \{i \in \mathbb{N} \mid \psi_M(i) = 1\} = \text{domain}(\psi_M)$ ✓

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss (II)

- **M=domain(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ M aufzählbar**
  - Es sei $M = \text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$ für ein berechenbares f
  - Falls $M = \emptyset$, dann ist M per Definition aufzählbar ✓
  - Andernfalls gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq \perp$ und eine TM τ mit $f = h_\tau$
  - Wir konstruieren eine Turingmaschine τ' mit $M = \text{range}(h_{\tau'})$

    Bei Eingabe einer (Repräsentation der) Zahl n arbeite τ' wie folgt
    1. Berechne i, j so daß $n = \langle i, j \rangle$
    2. Simuliere die Berechnung von τ bei Eingabe i für (maximal) j Schritte
       (Erzeuge Anfangskonfiguration, simuliere $\hat{\delta}_\tau$ auf separatem Band)
    3. Falls τ in j Schritten anhält, gebe i aus. Andernfalls gebe n_0 aus
  - τ' hält auf jeder Eingabe, also ist $h_{\tau'}$ total
  - $M \subseteq \text{range}(h_{\tau'})$: Sei $i \in M$. Dann gibt es ein j so daß τ nach j Schritten hält.
    Damit $h_{\tau'}(\langle i, j \rangle) = i$, also $i \in \text{range}(h_{\tau'})$
  - $M \supseteq \text{range}(h_{\tau'})$: Sei $i \in \text{range}(h_{\tau'})$. Falls $i = n_0$ dann $i \in M$ nach Voraussetzung.
    Andernfalls gibt es ein j so daß τ nach j Schritten hält.
    Also $i \in \text{domain}(h_\tau) = M$. ✓

Beispiele entscheidbarer / aufzählbarer Mengen

Sei f:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ total berechenbar, g:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar

- **graph(f) $= \{(i,j) \mid f(i) = j\}$ ist entscheidbar**
  - Bei Eingabe (i,j) berechne $f(i)$ (hält immer) und vergleiche mit j
- **range(f) $= \{j \mid \exists i \in \mathbb{N} f(i) = j\}$ ist aufzählbar**
  - Charakterisierung #2
- **range(g) $= \{j \mid \exists i \in \mathbb{N} g(i) = j\}$ ist aufzählbar**
  - Charakterisierung #2
- **graph(g) $= \{(i,j) \mid g(i) = j\}$ ist aufzählbar**
  - Bei Eingabe (i,j) berechne $g(i)$ (hält nicht immer) und vergleiche
- **domain(g) $= \{i \mid g(i)$ hält$\}$ ist aufzählbar**
  - Charakterisierung #4

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

$M \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbar $\Leftrightarrow$ M und $\overline{M}$ aufzählbar

$\Rightarrow$ Es sei M entscheidbar. Dann ist $\chi_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar.

Es ist $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=1, \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$ und $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=0, \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind ψ_M und $\psi_{\overline{M}}$ berechenbar, also M und $\overline{M}$ aufzählbar ✓

$\Leftarrow$ Seien M und $\overline{M}$ aufzählbar.

Falls $M=\emptyset$ oder $\overline{M}=\emptyset$, so ist M trivialerweise entscheidbar ✓

Andernfalls $M=\text{range}(f)$ und $\overline{M}=\text{range}(g)$ wobei f, g total berechenbar.

Wir konstruieren eine Turingmaschine τ mit $\chi_M = h_\tau$

– Bei Eingabe von n berechne $j = \min\{i \mid f(i)=n \vee g(i)=n\}$

– Falls $f(j)=n$, gebe 1 aus, ansonsten 0

τ hält für jedes n, da $n \in \text{range}(f)$ oder $n \in \text{range}(g)$ $(n \in M \ / \ n \notin M)$

Für $n \in M$ gilt $f(j)=n$ für ein j, also $h_\tau(n)=1$, ansonsten $h_\tau(n)=0$ ✓

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**
  - Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel folgt später)
- **Ist M endlich, so ist M entscheidbar und aufzählbar**
  - Für $M = \{x_1, ..., x_n\}$ ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n{=}x_1 \vee \ldots \vee n{=}x_n \,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - χ_M ist berechenbar, also ist M entscheidbar ✓
- **$M \subseteq \mathbb{N}$ aufzählbar $\Leftrightarrow$ es gibt ein entscheidbares $M' \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n,y) \in M'\}$**

  $\Rightarrow$: Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ aufzählbar
  - Falls $M{=}\emptyset$, so ist $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n,y) \in \emptyset\}$ ✓
  - Andernfalls ist $M{=}\text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f und $\text{range}(f) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n,y) \in \text{graph}(f)\}$ ✓

  $\Leftarrow$: Es sei $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ (n,y) \in M'\}$ für ein entscheidbares M'
  - Dann ist $\psi_M(y) = \text{sign}\,(\min\{n \in \mathbb{N} \mid (n,y) \in M'\}{+}1)$
    $= \text{sign}\,(\min\{n \in \mathbb{N} \mid \chi_{M'}(n,y){=}1\}){+}1$ ✓

Abschlusseigenschaften

Sei M, $M' \subseteq X^*$, f berechenbar und total, g berechenbar

- **Sind M, M' aufzählbar, dann auch**

  $M \cup M'$, $M \cap M'$, $M \circ M'$, M^*, $g(M)$, $g^{-1}(M)$

  Vereinigung, Durchschnitt, Konkatenation, Konkatenationsabschluß, Urbild

  Abschluß unter Komplement oder Differenz gilt nicht

- **Sind M, M' entscheidbar, dann auch**

  $M \cup M'$, $M \cap M'$, $M \setminus M'$, $\overline{M}$, $M \circ M'$, M^*, $f^{-1}(M)$

  Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, Komplement, Konkatenation, -abschluß, Urbild

Aussage gilt analog für Teilmengen von $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k$, ...

$$\overline{M} = \{w \in X^* \mid w \notin M\} \qquad M \circ M' = \{wv \mid w \in M \wedge v \in M'\} \qquad M^* = \{w_1..w_n \mid w_i \in M\}$$
$$f^{-1}(M) = \{w \in X^* \mid f(w) \in M\} \qquad f(M) = \{f(w) \mid w \in M\}$$

Beweis der Abschlusseigenschaften

- Es seien M, M' aufzählbar mit Funktionen f und f'

  $\boldsymbol{M \cup M'}$: Für $h(w) = \begin{cases} f(v) & \text{falls } w{=}0v, \\ f'(v) & \text{falls } w{=}1v \end{cases}$ ist $\text{range}(h) = M \cup M'$

  $\boldsymbol{M \cap M'}$: $\psi_{M \cap M'}(w) = \psi_M(w) * \psi_{M'}(w)$

  $\boldsymbol{M \circ M'}$: Für $h(w\#v) = f(w) \circ f'(v)$ ist $\text{range}(h) = M \circ M'$

  $\boldsymbol{M^*}$: Für $h(w_1\# \ldots \#w_n) = f(w_1) \circ \ldots \circ f(w_n)$ ist $\text{range}(h) = M^*$

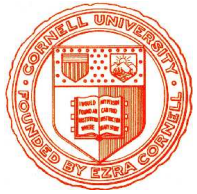
  $\boldsymbol{g(M)}$: Für $h(w) = g(f(w))$ ist $\text{range}(h) = g(M)$

  $\boldsymbol{g^{-1}(M)}$: $\psi_{g^{-1}(M)}(w) = \psi_M(g(w))$

- Entscheidbare Mengen sind abgeschlossen unter $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\bar{}$, $\circ$, *, f^{-1}

  Beweis in Übungen

Theoretische Informatik



Einheit 3.2

Universelle Maschinen

1. Standardnumerierung berechenbarer Funktionen
2. Universelle Funktion
3. Grundeigenschaften berechenbarer Funktionen

Noch Offene Fragen

- **Gibt es unentscheidbare Mengen?**
  - Unentscheidbar aber aufzählbar?
  - Nicht aufzählbar'?
- **Gibt es unberechenbare Funktionen?**
- **Wie beweist man Unlösbarkeit?**
  - Kardinalitätsargument: es gibt mehr Funktionen als Programme
  - Konkretes Gegenbeispiel konstruieren
- **Was benötigt man für diese Argumente?**
  - Präzisierung der Grundannahmen zur Berechenbarkeit
  - Nachweis, daß diese Grundannahmen erfüllt sind

Grundannahmen über Berechnungen

- **Programme und Daten sind als Zahlen codierbar**
  - Programme und Daten werden als Worte dargestellt
  - Worte, die Programme darstellen, können durchnumeriert werden
  - φ_i: Berechnete Funktion des Programms i $(\varphi_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N})$
  - Φ_i: Rechenzeitfunktion zum Programm i $(\text{domain}(\Phi_i) = \text{domain}(\varphi_i))$
- **Computer sind universelle Maschinen**
  - Bei Eingabe beliebiger Programme und Daten berechnen sie das Ergebnis
  - Die Funktion $u : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $u(i, n) = \varphi_i(n)$ ist berechenbar
- **Man kann Programme effektiv zusammensetzen**
  - Die Nummer des entstehenden Programms kann berechnet werden
  - Es gibt eine berechenbare totale Funktion h mit $\varphi_{h(i,j)} = \varphi_i \circ \varphi_j$
- **Rechenzeit ist entscheidbar**
  - Man kann für beliebige $i, n, t \in \mathbb{N}$ testen ob $\Phi_i(n) = t$ ist oder nicht

Numerierung von Turingmaschinen

- **Codierung aller Alphabete in einem Alphabet** $\hat{\Gamma}$
- **Codiere Zustandsüberführungsfunktion** δ **als Wort in** $\hat{\Gamma}^*$
- **Codiere Komponenten der Turingmaschine** τ **als Wort in** $\hat{\Gamma}^*$
- **Numeriere Worte über** $X = \{x_1, .., x_n\}$ **gemäß der lexikographischen Ordnung**

  $$\epsilon < x_1 < \ldots < x_n < x_1x_1 < x_1x_2 < \ldots < x_nx_n < x_1x_1x_1 < \ldots$$

- **Numeriere Worte, die Turingmaschinen codieren**
  - Benutze Numerierung aller Worte
  - Man kann testen, ob ein Wort $w \in \hat{\Gamma}^*$ ein Turingprogramm beschreibt
  - $\boldsymbol{\tau_i}$: Turingmaschine τ mit $w_\tau = \nu(n_\tau(i))$ "die i-te Turingmaschine"
  - **Gödelnummer** der Turingmaschine τ: Zahl i mit $\tau = \tau_i$

Numerierung berechenbarer Funktionen

- **Berechenbare Funktionen auf Worten**
  - $\hat{\varphi}_i \equiv h_{\tau_i}$: "die von der i-ten Turingmaschine berechnete Funktion"
  - $\boldsymbol{t_i}$: Schrittzahlfunktion der Turingmaschine τ_i

$$t_i(w) = \begin{cases} m & \text{falls Berechnung von } \tau_i(w) \text{ in } m \text{ Schritten terminiert,} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Berechenbare Funktionen auf Zahlen**
  - $\boldsymbol{\varphi_i} \equiv r^{-1} \circ \hat{\varphi}_i \circ r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ "die i-te berechenbare Funktion"

    $r{:}\mathbb{N} \to X^*$ bijektive Repräsentation von Zahlen als Worte
  - $\boldsymbol{\Phi_i} \equiv t_i \circ r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ "Schrittzahlfunktion von φ_i"

- **Eigenschaften von $\boldsymbol{\varphi}$ und $\boldsymbol{\Phi}$**
  - φ is surjektiv, aber nicht bijektiv
  - $\text{domain}(\Phi_i) = \text{domain}(\varphi_i)$ (Φ_i terminiert auf den gleichen Eingaben wie φ_i)
  - $\{(i, n, t) \mid \Phi_i(n) = t\}$ ist entscheidbar "Rechenzeit ist entscheidbar"

Die Numerierung berechenbarer Funktionen ist nur surjektiv

Universelle Turingmaschinen

Kann man alle Turingprogramme auf einer einzigen Maschine ausführen?

- **Universelle Maschinen**
  - τ_u ist universell, wenn $h_{\tau_u}(w_\tau, v) = h_\tau(v)$ für jede TM τ und jedes $v \in X^*$
  - Insbesondere $h_{\tau_u}(r(i), v) = h_{\tau_i}(v)$ für alle i,v (r:$\mathbb{N}\to X^*$ Zahlendarstellung)
- **Universelle Funktionen**
  - u:$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ist universell, wenn $u(i,n) = \varphi_i(n)$ für alle $i, n \in \mathbb{N}$
- **Gibt es universelle Maschinen?**
  - Die Numerierung n_τ ist berechenbar
  - Turingprogramme lassen sich simulieren
  - Baue universelle Maschine mit $\nu \circ n_\tau$ und Einzelschrittsimulation

  Details z.B. in Hopcroft, Motwani, Ullman, Seite 387–389

Das Übersetzungslemma

Turingmaschinen sind effektiv kombinierbar

- **Kombiniere τ_1 und τ_2 zu τ mit $h_\tau = h_{\tau_1} \circ h_{\tau_2}$**
  - Umbenennung der Zustände von τ_2
  - Springe vom "Endzustand" von τ_1 zum Anfangszustand von τ_2
  - Programm w_τ kann aus w_{τ_1} und w_{τ_2} berechnet werden
  - Gödelnummer k von τ kann aus denen für τ_1 und τ_2 berechnet werden
- **Kombiniere φ_i und φ_j zu φ_k mit $\varphi_k = \varphi_i \circ \varphi_j$**
  - Index k kann aus i und j berechnet werden
  - Es gibt eine berechenbare totale Funktion h mit $\varphi_{h(i,j)} = \varphi_i \circ \varphi_j$
- **Allgemeinste Version: SMN Theorem**
  - Es gibt eine berechenbare totale Funktion s mit $\varphi_{s\langle m,n\rangle}(i) = \varphi_m\langle n, i\rangle$

Technisches Resultat mit wenig eigener Bedeutung

Zusammenfassung: Kernaxiome der Berechenbareitstheorie

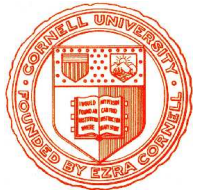
- **Berechenbare Funktionen sind effektiv numerierbar**
  - $\varphi_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$: berechnete Funktion des Programms i
  - Φ_i: Rechenzeitfunktion zum Programm i
  - **domain(Φ_i) = domain(φ_i)**
- **Die Menge $\{(i, n, t) \mid \Phi_i(n) = t\}$ ist entscheidbar**
- **Die universelle Funktion ist berechenbar**
  - $u : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $u(i, n) = \varphi_i(n)$ ist berechenbar
- **Programme sind effektiv kombinierbar**
  - Es gibt eine berechenbare totale Funktion h mit $\varphi_{h(i,j)} = \varphi_i \circ \varphi_j$
  - Es gibt eine berechenbare totale Funktion s mit $\varphi_{s\langle m,n\rangle}(i) = \varphi_m\langle n, i\rangle$

Alles weitere folgt aus diesen Axiomen

Wichtige entscheidbare und aufzählbare Mengen

- $\{(i,n,t) \mid \Phi_i(n) = t\}$ **ist entscheidbar**
  - Kernaxiom der Berechenbarkeitstheorie
- $\{(i,n,y) \mid \varphi_i(n) = y\}$ **ist aufzählbar**
  - Graph der universellen Funktion
- $H = \{(i,n) \mid \varphi_i(n) \neq \perp\}$ **ist aufzählbar**
  - Haltebereich der universellen Funktion
- $S = \{i \mid \varphi_i(i) \neq \perp\}$ **ist aufzählbar**
  - Haltebereich von $\lambda i.u(i,i)$

Theoretische Informatik



Einheit 3.3

Beweistechniken für unlösbare Probleme

1. Diagonalisierung
2. Monotonieargumente
3. Problemreduktion
4. Der Satz von Rice

Grenzen der Berechenbarkeit

Wie beweist man die Unlösbarkeit eines Problems?

- **Diagonalisierung**
  - Zeige, daß eine Funktion von jeder berechenbaren Funktion an mindestens einer Stelle abweicht, also selbst nicht berechenbar sein kann
- **Wachstums- und Monotonieargumente**
  - Zeige, daß eine Funktion stärker wächst als jede berechenbare Funktion
- **Reduktionsmethode und Abschlußeigenschaften**
  - Zeige, daß Lösung des Problems zu einer Lösung eines bekanntermaßen unlösbaren Problems führen würde
- **Anwendung allgemeiner theoretischer Resultate**
  - Unlösbarkeit folgt direkt aus bekannten Sätzen

Diagonalisierung

- **Ziel**
  - Zeige, daß eine unendliche Menge M eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit, Abzählbarkeit
- **Methodik**
  - Wir nehmen an, M habe die Eigenschaft P
  - Konstruiere ein Element x, das von allen Elementen von M verschieden ist
  - Zeige, daß $x \in M$ aufgrund der Annahme gelten muß
  - Aus dem Widerspruch folgt, daß die Annahme nicht gelten kann
- **Konstruktion des neuen Elementes**

  Cantor'sches Diagonalverfahren:
  - Trage alle Elemente von M als Zeilen einer Tabelle auf
  - Konstruiere x auf Diagonale mit Abweichung an jedem Punkt
  - Also kann x nicht als Zeile vorkommen

Diagonalbeweise I: Überabzählbarkeit von $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

- **Die Menge $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ "überabzählbar" unendlich**
  - Die Menge aller Funktionen über $\mathbb{N}$ kann nicht durchnumeriert werden
    - **Annahme**: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ist abzählbar
    - Dann können alle Funktionen über $\mathbb{N}$ in eine Tabelle eingetragen werden

	0	1	2	3	4	...
f_0	$f_0(0)+1$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	$f_0(4)$	...
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)+1$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	$f_1(4)$	...
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)+1$	$f_2(3)$	$f_2(4)$	...
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)+1$	$f_3(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

    - Definiere eine neue Funktion $f{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $f(x) = f_x(x)+1$
    - f ist offensichtlich total, kann aber in der Tabelle nicht vorkommen
    - Ansonsten wäre $f{=}f_i$ für ein i und $f_i(i) = f(i) = f_i(i)+1$ ✓

Existenz unberechenbarer Funktionen

- **Abstraktes Argument: es gibt zu viele Funktionen**
  - Die Menge der berechenbaren Funktionen in $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ist abzählbar
  - Die Menge $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ is nicht abzählbar
  - Es gibt mehr Funktionen als es berechenbare Funktionen geben kann
  - Es gibt nichtberechenbare Funktionen auf $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ✓
- **Konkretes Argument: Angabe eines Beispiels**
  - Das Halteproblem $H = \{(i,n) \mid \varphi_i(n)\neq\perp\}$ ist unentscheidbar (Beweis folgt)
  - Die charakteristische Funktion $\chi_H{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ist nicht berechenbar ✓
  - Weitere konkrete Beispiele folgen

Diagonalbeweise II: Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Annahme: $H = \{(i,n) \mid \varphi_i(n) \neq \perp\}$ ist entscheidbar

– Dann ist $\chi_H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar, wobei $\chi_H(i,n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \varphi_i(n) \text{ hält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

– Definiere eine neue Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(n) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } \varphi_n(n) \text{ nicht hält} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	1	2	3	4	...
φ_0	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	...
φ_1	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Dann ist f berechenbar, denn $f(n) = \mu_z[\chi_H(n,n) = 0]$

– Also gibt es ein i mit $f = \varphi_i$

– Aber für dieses i gilt: $\varphi_i(i)$ hält $\Leftrightarrow$ $f(i)$ hält $\Leftrightarrow$ $\varphi_i(i)$ hält nicht

– Dies ist ein Widerspruch, also ist die Annahme "H entscheidbar" falsch ✓

Terminierung von Programmen ist nicht testbar

Diagonalbeweise III: Total berechenbare Funktionen sind nicht aufzählbar

Annahme: $\mathcal{R}_\varphi = \{i \mid \varphi_i \text{ total}\}$ ist aufzählbar

- Dann gibt es eine berechenbare totale Funktion f mit $\text{range}(f) = \mathcal{R}_\varphi$
- Dann lassen sich alle Funktionen aus $\mathcal{R}$ wie folgt in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
$\varphi_{f(0)}$	$\varphi_{f(0)}(0)+1$	$\varphi_{f(0)}(1)$	$\varphi_{f(0)}(2)$	$\varphi_{f(0)}(3)$	$\varphi_{f(0)}(4)$	...
$\varphi_{f(1)}$	$\varphi_{f(1)}(0)$	$\varphi_{f(1)}(1)+1$	$\varphi_{f(1)}(2)$	$\varphi_{f(1)}(3)$	$\varphi_{f(1)}(4)$	...
$\varphi_{f(2)}$	$\varphi_{f(2)}(0)$	$\varphi_{f(2)}(1)$	$\varphi_{f(2)}(2)+1$	$\varphi_{f(2)}(3)$	$\varphi_{f(2)}(4)$	...
$\varphi_{f(3)}$	$\varphi_{f(3)}(0)$	$\varphi_{f(3)}(1)$	$\varphi_{f(3)}(2)$	$\varphi_{f(3)}(3)+1$	$\varphi_{f(3)}(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

- Definiere eine neue Funktion $h{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $h(n) = \varphi_{f(n)}(n)+1$
- h ist offensichtlich total und berechenbar, denn $h(n) = u(f(n), n)+1$
- Also gibt es ein $i \in \mathcal{R}_\varphi$ mit $h = \varphi_i$ und damit ein $j \in \mathbb{N}$ mit $i{=}f(j)$
- Für dieses j gilt $\varphi_{f(j)}(j) = h(j) = \varphi_{f(j)}(j)+1$ ✓

Andere unlösbare Probleme mit Diagonalbeweisen

- **Selbstanwendbarkeitsproblem:**
  - $S = \{i \mid \varphi_i(i) \neq \perp\}$ unentscheidbar, aber aufzählbar
- **Entscheidungsproblem:**
  - $E = \{(i,j) \mid \varphi_i(j) = 1\}$ unentscheidbar, aber aufzählbar
- **Monotone Funktionen:**
  - $MON = \{i \mid \forall k.\ \varphi_i(k) < \varphi_i(k+1)\}$ nicht aufzählbar
- **Entscheidungsfunktionen:**
  - $EF = \{i \mid \forall j.\ \varphi_i(j) \in \{0,1\}\}$ nicht aufzählbar

Monotoniearguments

- **Ziel**
  - Zeige, daß eine Funktion f eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. primitiv rekursiv, berechenbar, maximale Komplexität (Rechenzeit)
- **Methodik**
  - Zeige daß f stärker wächst als jede Funktion mit Eigenschaft P
    - Induktive Analyse des Wachstumsverhaltens von f
    - Analyse des maximalen Wachstums von Funktionen mit Eigenschaft P
  - f kann also nicht selbst Eigenschaft P besitzen
- **Beispiele**
  - Die Ackermann Funktion ist nicht primitiv-rekursiv
  - Die Busy-Beaver Funktion ist nicht berechenbar — folgt
  - Komplexitätsanalysen

Das Busy-Beaver Problem

Biber stauen Bäche, indem sie Holzstücke in den Bach tragen. Fleißige Biber tragen mehr Holzstücke zusammen als faule. Größere Biber können mehr leisten als kleine.

Die Busy-Beaver Funktion liefert die Länge der längsten ununterbrochenen Staumauer, die ein Biber zusammentragen kann, ohne daß schon eine Teilmauer vorhanden war.

- **Beschreibe Biber durch Turingmaschinen**
  - Holzstücke werden durch das Symbol | beschrieben
  - $\tau = (\{1..n\}, \{|\}, \{|, b\}, \delta, 1, b)$ heißt Busy-Beaver TM der Größe n
  - $\mathrm{BBT}(n)$ sei die Menge aller Busy-Beaver Turingmaschinen der Größe n
- **Beschreibe Produktivität von Bibern**
  - $\mathrm{Produktivität}(\tau) = \begin{cases} n & \text{wenn } h_\tau(\epsilon) = |^n \\ 0 & \text{wenn } \tau \text{ bei Eingabe } \epsilon \text{ nicht hält} \end{cases}$
- **Beschreibe maximal mögliche Leistung von Bibern**
  - $BB(n) = \max\{\mathrm{Produktivität}(\tau) \mid \tau \in \mathrm{BBT}(n)\}$

Ist die Busy-Beaver Funktion berechenbar?

Busy-Beaver Problem: Intuitive Analyse

- **Beispiel einer BBT(2) Maschine**

$\delta =$

s	a	s'	a'	P
1	|	2	|	r
1	b	2	|	l
2	|	2	|	h
2	b	1	|	l

Arbeitsweise:

$b1b$
$\mapsto |2b$
$\mapsto b1||$
$\mapsto b2b||$
$\mapsto b1b|||$
$\mapsto |2|||$
stop

  - Produktivität ist 3 (4, wenn man alle Holzstücke zählt)

- **$BB(n)$ bekannt für kleine n:**

n	1	2	3	4	5	6	...
	1	4	6	13	$\geq$4098	$\geq 6.4{*}10^{462}$	

- **Vollständige Analyse nicht möglich**
  - $|\mathrm{BBT}(n)|$ ist $(|S|*|\Gamma|*|\{r,l\}|)^{(|S|*|\Gamma|-1)} * (|S|*|\Gamma|*|\{h\}|) * (|S|*|\Gamma|) = (4n)^{2n}$
    $|\mathrm{BBT}(1)|$=16, $|\mathrm{BBT}(2)|$=4096, $|\mathrm{BBT}(3)|$=2985984, ...
  - Anzahl möglicher Bandkonfigurationen einer TM ist unbegrenzt

Das Busy-Beaver Problem ist unlösbar

- **BB ist streng monoton: $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$**
  - Für alle n gilt $\mathrm{BB}(n{+}1)>\mathrm{BB}(n)$
    - Schreibe in Zustand 1 ein | und beginne mit der BB(n)-Maschine
  - $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$ folgt nun durch Induktion über $i-j$
- **Für alle n gilt: $\mathrm{BB}(n{+}8)\geq 2n$**
  - Mit n Zuständen kann man n Striche generieren
  - Mit 8 Zuständen kann man Striche verdoppeln (vgl τ_4 aus Kapitel 6.1)
- **BB berechenbar $\Rightarrow \mathrm{BB}(n{+}2k)\geq \mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n))$ für ein k**
  - Wähle $k :=$ Anzahl der Zustände der TM über $\Gamma=\{|, b\}$, die BB berechnet
  - Mit n Zuständen generiere n Striche
  - Mit k Zuständen berechne jetzt $\mathrm{BB}(n)$
  - Mit weiteren k Zuständen berechne $\mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n))$
- **BB kann nicht berechenbar sein**
  - Sonst gibt es ein k, so daß für alle n: $\mathrm{BB}(n{+}8{+}2k) \geq \mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n{+}8)) \geq \mathrm{BB}(2n)$
  - Für $n{=}2k{+}9$ widerspräche $\mathrm{BB}(4k{+}17) \geq \mathrm{BB}(4k{+}18)$ der Monotonie ✓

Problemreduktion

- **Ziel: Wiederverwendung bekannter Ergebnisse**
  - Zur Lösung eines Problems P bzw. zum Nachweis seiner Unlösbarkeit
  - Unlösbar $\hat{=}$ unentscheidbar, nicht aufzählbar, nicht in Zeit t lösbar, ...
- **Methodik zum Nachweis der Unlösbarkeit**
  - Transformiere P in ein anderes Problem P', das als unlösbar bekannt ist
  - Zeige, daß jede Lösung für P in eine Lösung für P' transformiert würde
  - P kann also nicht lösbar sein
- **Methodik zur Konstruktion einer Lösung**
  - Transformiere ein anderes Problem P', das als lösbar bekannt ist, in P
  - Zeige, wie eine Lösung für P' in eine Lösung für P transformiert wird
- **Hilfsmittel: Reduzierbarkeit $P' \leq P$**
  - $P' \leq P$, falls $P' = f^{-1}(P) = \{x \mid f(x) \in P\}$ für ein total-berechenbares f
  - "P' ist reduzierbar auf P" (Begriff gilt für Teilmengen von Zahlen, Worten, ...)

Beweisführung durch Reduktion

- **$P' \leq P$ bedeutet "P' ist leichter als P"**
  - Ist P lösbar, dann kann P' wie folgt gelöst werden
    - Bei Eingabe x bestimme $f(x)$ (f ist die Reduktionsfunktion)
    - Löse $f(x)$ mit der Lösungsmethode für P
    - Es gilt $x \in P' \Leftrightarrow f(x) \in P$, also überträgt sich das Ergebnis
- **Aus $P' \leq P$ und P entscheidbar folgt P' entscheidbar**
  - Übertragung von Entscheidbarkeit: $\chi_{P'}(x) = \chi_{f^{-1}(P)}(x) = \chi_P(f(x))$
- **Aus $P' \leq P$ und P aufzählbar folgt P' aufzählbar**
  - Übertragung von Aufzählbarkeit: $\psi_{P'}(x) = \psi_{f^{-1}(P)}(x) = \psi_P(f(x))$

Beispiele von Problemreduktion

- $\boldsymbol{S = \{i \mid \varphi_i(i) \neq \perp\} \;\leq\; H = \{(i,n) \mid \varphi_i(n) \neq \perp\}}$

  "Das Selbstanwendbarkeitsproblem ist leichter als das Halteproblem"

  – Es gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$.

  – Wähle $f(i) := (i,i)$. Dann ist f total-berechenbar und $S = f^{-1}(H)$

  – Man kann auch H auf S reduzieren (aufwendig)

- $\boldsymbol{\overline{H} = \{(i,n) \mid \varphi_i(n) = \perp\} \;\leq\; PROG_z = \{i \mid \varphi_i = z\}}$

  – Es gilt $(i,n) \in \overline{H} \;\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{N}.\Phi_i(n) \neq t$.

  – Da $\Phi = \{(i,n,t) \mid \Phi_i(n) = t\}$ entscheidbar ist, gibt es ein j mit

  $$\varphi_j(i,n,t) = \chi_\Phi(i,n,t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,n,t) \in \Phi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  – Nach dem SMN Theorem gibt es eine total-berechenbare Funktion f mit $\varphi_{f(i,n)}(t) = \varphi_j(i,n,t)$

  – Es folgt $(i,n) \in \overline{H} \;\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{N}.\Phi_i(n) \neq t \;\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{N}.\varphi_{f(i,n)}(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi_{f(i,n)} = z$

  $\Leftrightarrow\; f(i,n) \in PROG_z$

  also $\overline{H} = f^{-1}(PROG_z)$

Problemreduktion mit Abschlusseigenschaften

- **Ziel: Wiederverwendung bekannter Ergebnisse**
  - Zur Lösung eines Problems P bzw. zum Nachweis seiner Unlösbarkeit
- **Methodik**
  - Zeige, daß Lösung für P ein unlösbares Problem P' lösen würde
  - Zeige, wie Lösung eines bekannten Problems P' zur Lösung von P' führt
- **Hilfsmittel: Abschlußeigenschaften**
  - M, M' entscheidbar, dann auch $M \cup M'$, $M \cap M'$, $M \setminus M'$, $\overline{M}$, $f^{-1}(M)$
  - M, M' aufzählbar, dann auch $M \cup M'$, $M \cap M'$, $g(M)$, $g^{-1}(M)$
  - M entscheidbar $\Leftrightarrow$ M und $\overline{M}$ aufzählbar
  - Reduzierbarkeit ist ein besonders mächtiger Spezialfall
- **Umkehrung der Abschlußeigenschaften**
  - M nicht entscheidbar $\Rightarrow$ $\overline{M}$ nicht entscheidbar
  - M aufzählbar, nicht entscheidbar $\Rightarrow$ $\overline{M}$ weder aufzählbar noch entscheidbar
  - M entscheidbar, $M \cup M'$ nicht entscheidbar $\Rightarrow$ M' nicht entscheidbar
  - M entscheidbar, $M \setminus M'$ nicht entscheidbar $\Rightarrow$ M' nicht entscheidbar

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

Resultate aus Abschlusseigenschaften

- **$\{(i,n) \mid \varphi_i(n){=}\perp\}$ ist nicht aufzählbar**
  - $\{(i,n) \mid \varphi_i(n){=}\perp\}$ ist das Komplement von $H = \{(i,n) \mid \varphi_i(n){\neq}\perp\}$
  - H ist aufzählbar aber unentscheidbar, also kann $\overline{H}$ nicht aufzählbar sein
- **$\{i \mid \varphi_i(i){=}\perp\}$ ist nicht aufzählbar**
  - $\{i \mid \varphi_i(i){=}\perp\}$ ist das Komplement von $S = \{i \mid \varphi_i(i){\neq}\perp\}$
  - S ist aufzählbar aber unentscheidbar, also kann $\overline{S}$ nicht aufzählbar sein
- **$PROG_z = \{i \mid \varphi_i = z\}$ ist nicht aufzählbar**
  - Es gilt $\overline{H} \leq PROG_z$ und $\overline{H}$ ist nicht aufzählbar
- **$PF_\varphi = \{i \mid \varphi_i$ partiell$\}$ ist unentscheidbar**
  - PF_φ ist das Komplement von $\mathcal{R}_\varphi = \{i \mid \varphi_i$ total$\}$
  - $\mathcal{R}_\varphi$ ist nicht aufzählbar, also kann $PF_\varphi = \overline{\mathcal{R}_\varphi}$ nicht entscheidbar sein

Welche Verifikationsprobleme sind entscheidbar?

- **Halteproblem**
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es bei bestimmten Eingaben hält oder nicht?
  - Bereits als unentscheidbar nachgewiesen
- **Korrektheitsproblem**
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es eine bestimmte Funktion berechnet oder nicht?
  - Für die Nullfunktion bereits als unentscheidbar nachgewiesen
  - Gilt ähnliches für andere Funktionen?
- **Spezifikationsproblem**
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es eine gegebene Spezfikation erfüllt oder nicht?
- **Äquivalenzproblem**
  - Kann man entscheiden, ob zwei beliebige Programme die gleiche Funktion berechnen oder nicht?

Gibt es eine allgemeine Antwort?

Der Satz von Rice

Keine nichttriviale extensionale Eigenschaft berechenbarer Funktionen ist entscheidbar

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{T}_\mu$ ist $\mathcal{L}_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ nicht entscheidbar

Beweis durch Reduktion auf $S = \{i \mid \varphi_i(i) \neq \perp\}$

– Betrachte $g \equiv \lambda x.\perp$

– Falls $g \notin P$, so wähle $h \in P$ beliebig und definiere

$$h'(i,x) = \begin{cases} h(x) & \text{falls } \varphi_i(i) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist h' berechenbar und nach dem SMN Theorem gibt es ein total-berechenbares f mit $h'(i,x) = \varphi_{f(i)}(x)$

– Es folgt: $i \in S \Rightarrow \forall x.\, h'(i,x) = \varphi_{f(i)}(x) = h(x) \Rightarrow \varphi_{f(i)} = h \in P \Rightarrow f(i) \in \mathcal{L}_P$

$i \notin S \Rightarrow \forall x.\, h'(i,x) = \varphi_{f(i)}(x) = \perp \Rightarrow \varphi_{f(i)} = g \notin P \Rightarrow f(i) \notin \mathcal{L}_P$

– Insgesamt $i \in S \Leftrightarrow f(i) \in \mathcal{L}_P$, also $S \leq \mathcal{L}_P$

– Da S unentscheidbar ist, muß dies auch für $\mathcal{L}_P$ gelten ✓

– Falls $g \in S$ wähle ein beliebiges $h \notin S$ und zeige so $S \leq \overline{P}$ ✓

Anwendungen des Satzes von Rice

- $\boldsymbol{MON = \{i \mid \forall k.\ \varphi_i(k) < \varphi_i(k+1)\}}$
  - Monotone Funktionen sind unentscheidbar
- $\boldsymbol{EF = \{i \mid \forall j.\ \varphi_i(j) \in \{0,1\}\}}$
  - Entscheidungsfunktionen sind unentscheidbar
- $\boldsymbol{PROG_{spec} = \{i \mid \varphi_i \text{ erfüllt Spezifikation } spec\}}$
  - Allgemeines Spezifikationsproblem ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{PROG_f = \{i \mid \varphi_i = f\}}$
  - Korrektheitsproblem ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{EQ = \{(i,j) \mid \varphi_i = \varphi_j\}}$
  - Äquivalenzproblem ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{RG = \{(i,j) \mid j \in \text{range}(\varphi_i)\}}$
  - Bildbereiche sind unentscheidbar

Keine Programmeigenschaft kann getestet werden
Beweise müssen von Hand geführt werden
Rechnerunterstützung nur in Spezialfällen möglich