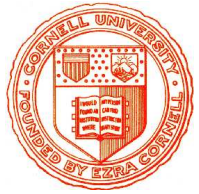
Theoretische Informatik



Einheit 4

Komplexitätstheorie

1. Komplexitätsmaße
2. Komplexität von Algorithmen (obere Schranken)
3. Komplexität von Problemen (untere Schranken)
4. NP-Vollständigkeit

Komplexitätstheorie

– Was kann mit vertretbarem Aufwand gelöst werden? –

- **Berechenbarkeit alleine reicht nicht**
  - Lösungen müssen effizient sein in praktischen Anwendungen
  - Berechenbarkeit/Entscheidbarkeit löst nur die Grundsatzfrage

Komplexitätstheorie

– Was kann mit vertretbarem Aufwand gelöst werden? –

- **Berechenbarkeit alleine reicht nicht**
  - Lösungen müssen effizient sein in praktischen Anwendungen
  - Berechenbarkeit/Entscheidbarkeit löst nur die Grundsatzfrage
- **Komplexität: Analyse benötigter Resourcen**
  - Zeitbedarf des Algorithmus — Time
  - Speicherbedarf des Verfahrens (RAM, Harddisk) — Space
  - Netzzugriffe, Zugriff auf andere Medien

Komplexitätstheorie
– Was kann mit vertretbarem Aufwand gelöst werden? –

- **Berechenbarkeit alleine reicht nicht**
  - Lösungen müssen effizient sein in praktischen Anwendungen
  - Berechenbarkeit/Entscheidbarkeit löst nur die Grundsatzfrage
- **Komplexität: Analyse benötigter Resourcen**
  - Zeitbedarf des Algorithmus — Time
  - Speicherbedarf des Verfahrens (RAM, Harddisk) — Space
  - Netzzugriffe, Zugriff auf andere Medien
- **Meßgröße muß unabhängig sein von**
  - Konkreter Hardware
  - Konkreter Programmiersprache
  - Optimierungsfähigkeiten des Compilers
  - Auswahl der Testdaten

Komplexitätstheorie

– Was kann mit vertretbarem Aufwand gelöst werden? –

- **Berechenbarkeit alleine reicht nicht**
  - Lösungen müssen effizient sein in praktischen Anwendungen
  - Berechenbarkeit/Entscheidbarkeit löst nur die Grundsatzfrage
- **Komplexität: Analyse benötigter Resourcen**
  - Zeitbedarf des Algorithmus — Time
  - Speicherbedarf des Verfahrens (RAM, Harddisk) — Space
  - Netzzugriffe, Zugriff auf andere Medien
- **Meßgröße muß unabhängig sein von**
  - Konkreter Hardware
  - Konkreter Programmiersprache
  - Optimierungsfähigkeiten des Compilers
  - Auswahl der Testdaten

Abstrakte Komplexitätsmaße erforderlich

Fragestellungen der Komplexitätstheorie

- **Asymptotisches Verhalten von Algorithmen**
  - Komplexitätsfunktion: Bedarf abhängig von der Größe der Eingabe
  - Abschätzung der Komplexität großer Probleme

Fragestellungen der Komplexitätstheorie

- **Asymptotisches Verhalten von Algorithmen**
  - Komplexitätsfunktion: Bedarf abhängig von der Größe der Eingabe
  - Abschätzung der Komplexität großer Probleme
- **Analyse konkreter Verfahren**
  - Maximaler Verbrauch im Einzelfall — Worst case

    Wichtig bei sicherheitskritischen Anwendungen
  - Durchschnittlicher Bedarf im Langzeitverhalten — Average case

    Verlangt mathematisch schwierige statistische Analyse

Fragestellungen der Komplexitätstheorie

- **Asymptotisches Verhalten von Algorithmen**
  - Komplexitätsfunktion: Bedarf abhängig von der Größe der Eingabe
  - Abschätzung der Komplexität großer Probleme
- **Analyse konkreter Verfahren**
  - Maximaler Verbrauch im Einzelfall — Worst case
    Wichtig bei sicherheitskritischen Anwendungen
  - Durchschnittlicher Bedarf im Langzeitverhalten — Average case
    Verlangt mathematisch schwierige statistische Analyse
- **Analyse von Problemen**
  - Wie effizient ist die bestmögliche Lösung? — Untere Schranken

Fragestellungen der Komplexitätstheorie

- **Asymptotisches Verhalten von Algorithmen**
  - Komplexitätsfunktion: Bedarf abhängig von der Größe der Eingabe
  - Abschätzung der Komplexität großer Probleme
- **Analyse konkreter Verfahren**
  - Maximaler Verbrauch im Einzelfall — Worst case
    Wichtig bei sicherheitskritischen Anwendungen
  - Durchschnittlicher Bedarf im Langzeitverhalten — Average case
    Verlangt mathematisch schwierige statistische Analyse
- **Analyse von Problemen**
  - Wie effizient ist die bestmögliche Lösung? — Untere Schranken
  - Wieviel kann durch Hardwaresteigerungen erreicht werden?
  - Welche Verbesserung liefert Parallelität bzw. Nichtdeterminismus

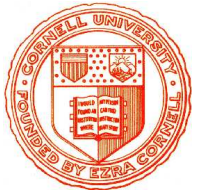
Fragestellungen der Komplexitätstheorie

- **Asymptotisches Verhalten von Algorithmen**
  - Komplexitätsfunktion: Bedarf abhängig von der Größe der Eingabe
  - Abschätzung der Komplexität großer Probleme
- **Analyse konkreter Verfahren**
  - Maximaler Verbrauch im Einzelfall — Worst case
    Wichtig bei sicherheitskritischen Anwendungen
  - Durchschnittlicher Bedarf im Langzeitverhalten — Average case
    Verlangt mathematisch schwierige statistische Analyse
- **Analyse von Problemen**
  - Wie effizient ist die bestmögliche Lösung? — Untere Schranken
  - Wieviel kann durch Hardwaresteigerungen erreicht werden?
  - Welche Verbesserung liefert Parallelität bzw. Nichtdeterminismus
  - Welche Probleme sind gleich schwierig? — Komplexitätsklassen

Fragestellungen der Komplexitätstheorie

- **Asymptotisches Verhalten von Algorithmen**
  - Komplexitätsfunktion: Bedarf abhängig von der Größe der Eingabe
  - Abschätzung der Komplexität großer Probleme
- **Analyse konkreter Verfahren**
  - Maximaler Verbrauch im Einzelfall — Worst case
    Wichtig bei sicherheitskritischen Anwendungen
  - Durchschnittlicher Bedarf im Langzeitverhalten — Average case
    Verlangt mathematisch schwierige statistische Analyse
- **Analyse von Problemen**
  - Wie effizient ist die bestmögliche Lösung? — Untere Schranken
  - Wieviel kann durch Hardwaresteigerungen erreicht werden?
  - Welche Verbesserung liefert Parallelität bzw. Nichtdeterminismus
  - Welche Probleme sind gleich schwierig? — Komplexitätsklassen
  - **Gibt es Probleme, die nicht effizient lösbar sind?**

Theoretische Informatik



Einheit 3.1

Komplexitätsmaße

1. Zeit- und Platzkomplexität
2. Asymptotische Analyse
3. Praktische Konsequenzen

Zeit- und Platzkomplexität

- **Rechenzeit $t_\tau(w)$**
  - Anzahl der Elementaroperationen von τ bis Berechnung terminiert
  - Abhängig von konkreter Eingabe w

Zeit- und Platzkomplexität

- **Rechenzeit $t_\tau(w)$**
  - Anzahl der Elementaroperationen von τ bis Berechnung terminiert
  - Abhängig von konkreter Eingabe w
- **Zeitkomplexität $time_\tau(n) = \max\{t_\tau(w) \mid |w|{=}n\}$**
  - Maximale Rechenzeit relativ zur Größe n der Eingabe (worst-case)

Zeit- und Platzkomplexität

- **Rechenzeit $t_\tau(w)$**
  - Anzahl der Elementaroperationen von τ bis Berechnung terminiert
  - Abhängig von konkreter Eingabe w
- **Zeitkomplexität $time_\tau(n) = \max\{t_\tau(w) \mid |w|=n\}$**
  - Maximale Rechenzeit relativ zur Größe n der Eingabe (worst-case)
- **Speicherbedarf $s_\tau(w)$**
  - Anzahl der Bandzellen, die τ während der Berechnung aufsucht

Zeit- und Platzkomplexität

- **Rechenzeit $t_\tau(w)$**
  - Anzahl der Elementaroperationen von τ bis Berechnung terminiert
  - Abhängig von konkreter Eingabe w
- **Zeitkomplexität $time_\tau(n) = \max\{t_\tau(w) \mid |w|=n\}$**
  - Maximale Rechenzeit relativ zur Größe n der Eingabe (worst-case)
- **Speicherbedarf $s_\tau(w)$**
  - Anzahl der Bandzellen, die τ während der Berechnung aufsucht
- **Platzkomplexität $space_\tau(n) = \max\{s_\tau(w) \mid |w|=n\}$**
  - Maximaler Speicherbedarf relativ zur Größe n der Eingabe (worst-case)

Zeit- und Platzkomplexität

- **Rechenzeit $t_\tau(w)$**
  - Anzahl der Elementaroperationen von τ bis Berechnung terminiert
  - Abhängig von konkreter Eingabe w
- **Zeitkomplexität $time_\tau(n) = \max\{t_\tau(w) \mid |w|{=}n\}$**
  - Maximale Rechenzeit relativ zur Größe n der Eingabe (worst-case)
- **Speicherbedarf $s_\tau(w)$**
  - Anzahl der Bandzellen, die τ während der Berechnung aufsucht
- **Platzkomplexität $space_\tau(n) = \max\{s_\tau(w) \mid |w|{=}n\}$**
  - Maximaler Speicherbedarf relativ zur Größe n der Eingabe (worst-case)

Analoge Maße für andere Berechnungsmodelle einschließlich nichtdeterministischer Maschinen

Komplexitätsanalyse einer Turing-Maschine

- $\tau_1 = (\{\mathtt{s}_0\}, \{\mathtt{1}\}, \{\mathtt{b}, \mathtt{1}\}, \delta_1, \mathtt{s}_0, \mathtt{b})$ mit $\delta_1 =$

s	a	s'	a'	P
$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{r}$
$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{b}$	$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{h}$

Komplexitätsanalyse einer Turing-Maschine

- $\tau_1 = (\{\mathtt{s}_0\}, \{\mathtt{1}\}, \{\mathtt{b}, \mathtt{1}\}, \delta_1, \mathtt{s}_0, \mathtt{b})$ mit $\delta_1 =$

s	a	s'	a'	P
$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{r}$
$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{b}$	$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{h}$

- **Mathematische Analyse**:

Komplexitätsanalyse einer Turing-Maschine

- $\tau_1 = (\{\mathtt{s}_0\}, \{\mathtt{1}\}, \{\mathtt{b},\mathtt{1}\}, \delta_1, \mathtt{s}_0, \mathtt{b})$ mit $\delta_1 =$

s	a	s'	a'	P
$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{r}$
$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{b}$	$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{h}$

- **Mathematische Analyse**:
  - Anfangskonfiguration: $\alpha(\mathtt{1}^n) = (\mathtt{s}_0, f_n, 0)$, wobei $f_n(j) = \begin{cases} \mathtt{1} & \text{falls } j \in \{0,..,n-1\}, \\ \mathtt{b} & \text{sonst} \end{cases}$

Komplexitätsanalyse einer Turing-Maschine

- $\tau_1 = (\{\mathtt{s}_0\}, \{\mathtt{1}\}, \{\mathtt{b},\mathtt{1}\}, \delta_1, \mathtt{s}_0, \mathtt{b})$ mit $\delta_1 =$

s	a	s'	a'	P
$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{r}$
$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{b}$	$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{h}$

- **Mathematische Analyse**:
  - Anfangskonfiguration: $\alpha(\mathtt{1}^n) = (\mathtt{s}_0, f_n, 0)$, wobei $f_n(j) = \begin{cases} \mathtt{1} & \text{falls } j \in \{0,..,n-1\}, \\ \mathtt{b} & \text{sonst} \end{cases}$
  - Nachfolgekonfigurationen: $\hat{\delta}(\mathtt{s}_0, f_n, j) = \begin{cases} (\mathtt{s}_0, f_n, j+1) & \text{falls } j \in \{0,..,n-1\}, \\ (\mathtt{s}_0, f_{n+1}, n) & \text{falls } j = n \end{cases}$

Komplexitätsanalyse einer Turing-Maschine

- $\tau_1 = (\{\mathtt{s}_0\}, \{\mathtt{1}\}, \{\mathtt{b},\mathtt{1}\}, \delta_1, \mathtt{s}_0, \mathtt{b})$ mit $\delta_1 =$

s	a	s'	a'	P
$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{r}$
$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{b}$	$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{h}$

- **Mathematische Analyse**:
  - Anfangskonfiguration: $\alpha(\mathtt{1}^n) = (\mathtt{s}_0, f_n, 0)$, wobei $f_n(j) = \begin{cases} \mathtt{1} & \text{falls } j \in \{0,..,n-1\}, \\ \mathtt{b} & \text{sonst} \end{cases}$
  - Nachfolgekonfigurationen: $\hat{\delta}(\mathtt{s}_0, f_n, j) = \begin{cases} (\mathtt{s}_0, f_n, j+1) & \text{falls } j \in \{0,..,n-1\}, \\ (\mathtt{s}_0, f_{n+1}, n) & \text{falls } j = n \end{cases}$
  - Terminierung: $\min\{j \mid \hat{\delta}^j(\mathtt{s}_0, f_n, 0) = (\mathtt{s}_0, f_n, j) \wedge \delta(\mathtt{s}_0, f_n(j)) = (\mathtt{s}_0, \mathtt{b}, \mathtt{h})\} = n$

Komplexitätsanalyse einer Turing-Maschine

- $\tau_1 = (\{\mathtt{s}_0\}, \{\mathtt{1}\}, \{\mathtt{b},\mathtt{1}\}, \delta_1, \mathtt{s}_0, \mathtt{b})$ mit $\delta_1 =$

s	a	s'	a'	P
$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{r}$
$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{b}$	$\mathtt{s}_0$	$\mathtt{1}$	$\mathtt{h}$

- **Mathematische Analyse**:
  - Anfangskonfiguration: $\alpha(\mathtt{1}^n) = (\mathtt{s}_0, f_n, 0)$, wobei $f_n(j) = \begin{cases} \mathtt{1} & \text{falls } j \in \{0,..,n-1\}, \\ \mathtt{b} & \text{sonst} \end{cases}$
  - Nachfolgekonfigurationen: $\hat{\delta}(\mathtt{s}_0, f_n, j) = \begin{cases} (\mathtt{s}_0, f_n, j+1) & \text{falls } j \in \{0,..,n-1\}, \\ (\mathtt{s}_0, f_{n+1}, n) & \text{falls } j = n \end{cases}$
  - Terminierung: $\min\{j \mid \hat{\delta}^j(\mathtt{s}_0, f_n, 0) = (\mathtt{s}_0, f_n, j) \wedge \delta(\mathtt{s}_0, f_n(j)) = (\mathtt{s}_0, \mathtt{b}, \mathtt{h})\} = n$

$\Downarrow$

$$\boldsymbol{t_{\tau_1}(1^n) = n{+}1 \quad \text{und} \quad time_{\tau_1}(n) = n{+}1 \quad \text{für alle } n}$$

Vereinfachte Komplexitätsabschätzungen

- **Genaue Betrachtungen sind unpraktikabel**
  - Zu mühsam bei nichttrivialen Algorithmen
  - Zu abhängig von Programmierdetails und Maschinenmodell
  - Welches Maschinenmodell sollte der Standard sein?

Vereinfachte Komplexitätsabschätzungen

- **Genaue Betrachtungen sind unpraktikabel**
  - Zu mühsam bei nichttrivialen Algorithmen
  - Zu abhängig von Programmierdetails und Maschinenmodell
  - Welches Maschinenmodell sollte der Standard sein?
- **Abschätzung der Komplexität**
  - Nur asymptotisches Verhalten auf großen Problemen ist interessant

Vereinfachte Komplexitätsabschätzungen

- **Genaue Betrachtungen sind unpraktikabel**
  - Zu mühsam bei nichttrivialen Algorithmen
  - Zu abhängig von Programmierdetails und Maschinenmodell
  - Welches Maschinenmodell sollte der Standard sein?
- **Abschätzung der Komplexität**
  - Nur asymptotisches Verhalten auf großen Problemen ist interessant

  $\mapsto$ Einheitskostenmodell: Vereinfachte Zählung von Elementaroperationen

Vereinfachte Komplexitätsabschätzungen

- **Genaue Betrachtungen sind unpraktikabel**
  - Zu mühsam bei nichttrivialen Algorithmen
  - Zu abhängig von Programmierdetails und Maschinenmodell
  - Welches Maschinenmodell sollte der Standard sein?
- **Abschätzung der Komplexität**
  - Nur asymptotisches Verhalten auf großen Problemen ist interessant

  $\mapsto$ Einheitskostenmodell: Vereinfachte Zählung von Elementaroperationen

  $\mapsto$ Additive Konstanten werden nicht berücksichtigt

  $\mapsto$ Konstante Faktoren werden nicht berücksichtigt

Vereinfachte Komplexitätsabschätzungen

- **Genaue Betrachtungen sind unpraktikabel**
  - Zu mühsam bei nichttrivialen Algorithmen
  - Zu abhängig von Programmierdetails und Maschinenmodell
  - Welches Maschinenmodell sollte der Standard sein?
- **Abschätzung der Komplexität**
  - Nur asymptotisches Verhalten auf großen Problemen ist interessant

  $\mapsto$ Einheitskostenmodell: Vereinfachte Zählung von Elementaroperationen

  $\mapsto$ Additive Konstanten werden nicht berücksichtigt

  $\mapsto$ Konstante Faktoren werden nicht berücksichtigt

$\Downarrow$

Analyse des wesentlichen Laufzeitverhaltens/Speicherbedarfs

Asymptotische Analyse

- **Asymptotischer Vergleich von Funktionen**
  - f_2 wächst schneller als f_1, falls $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Asymptotische Analyse

- **Asymptotischer Vergleich von Funktionen**
  - f_2 wächst schneller als f_1, falls $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - f_2 wächst asymptotisch schneller als f_1, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \geq n_0$

Asymptotische Analyse

- **Asymptotischer Vergleich von Funktionen**
  - f_2 wächst schneller als f_1, falls $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - f_2 wächst asymptotisch schneller als f_1, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit
    $$f_1(n) \leq f_2(n) \text{ für alle } n \geq n_0$$
- **Ordnung $\mathcal{O}(f)$ einer Funktion**
  - $$\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists n_0, c. \forall n \geq n_0.\ g(n) \leq c * f(n)\}$$
  - Alternativ: $$\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists k, c. \forall n.\ g(n) \leq k + c * f(n)\}$$

Asymptotische Analyse

- **Asymptotischer Vergleich von Funktionen**
  - f_2 wächst schneller als f_1, falls $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - f_2 wächst asymptotisch schneller als f_1, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit
    $$f_1(n) \leq f_2(n) \text{ für alle } n \geq n_0$$
- **Ordnung $\mathcal{O}(f)$ einer Funktion**
  - $$\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists n_0, c. \forall n \geq n_0.\ g(n) \leq c * f(n)\}$$
  - Alternativ: $$\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists k, c. \forall n.\ g(n) \leq k + c * f(n)\}$$
  - **Gängige Schreibweisen**
    - $g = \mathcal{O}(f)$ bedeutet $g \in \mathcal{O}(f)$, $\mathcal{O}(f_1) = \mathcal{O}(f_2)$ bedeutet $\mathcal{O}(f_1) \subseteq \mathcal{O}(f_2)$

Asymptotische Analyse

- **Asymptotischer Vergleich von Funktionen**
  - f_2 wächst schneller als f_1, falls $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - f_2 wächst asymptotisch schneller als f_1, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit
    $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \geq n_0$
- **Ordnung $\mathcal{O}(f)$ einer Funktion**
  - $\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists n_0, c. \forall n \geq n_0.\ g(n) \leq c * f(n)\}$
  - Alternativ: $\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists k, c. \forall n.\ g(n) \leq k + c * f(n)\}$
  - **Gängige Schreibweisen**
    - $g = \mathcal{O}(f)$ bedeutet $g \in \mathcal{O}(f)$, $\mathcal{O}(f_1) = \mathcal{O}(f_2)$ bedeutet $\mathcal{O}(f_1) \subseteq \mathcal{O}(f_2)$
    - $\mathcal{O}(1) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.1)$, $\mathcal{O}(n) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.n)$, $\mathcal{O}(n^2) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.n^2)$, ...

Asymptotische Analyse

- **Asymptotischer Vergleich von Funktionen**
  - f_2 wächst schneller als f_1, falls $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - f_2 wächst asymptotisch schneller als f_1, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \geq n_0$
- **Ordnung $\mathcal{O}(f)$ einer Funktion**
  - $\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists n_0, c. \forall n \geq n_0.\ g(n) \leq c * f(n)\}$
  - Alternativ: $\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists k, c. \forall n.\ g(n) \leq k + c * f(n)\}$
  - **Gängige Schreibweisen**
    - $g = \mathcal{O}(f)$ bedeutet $g \in \mathcal{O}(f)$, $\mathcal{O}(f_1) = \mathcal{O}(f_2)$ bedeutet $\mathcal{O}(f_1) \subseteq \mathcal{O}(f_2)$
    - $\mathcal{O}(1) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.1)$, $\mathcal{O}(n) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.n)$, $\mathcal{O}(n^2) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.n^2)$, ...
- **Ordnung konkreter Funktionen**
  - Konstante Funktion: $g_1(n) = k$ für alle n

Asymptotische Analyse

- **Asymptotischer Vergleich von Funktionen**
  - f_2 wächst schneller als f_1, falls $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - f_2 wächst asymptotisch schneller als f_1, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit
    $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \geq n_0$
- **Ordnung $\mathcal{O}(f)$ einer Funktion**
  - $\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists n_0, c. \forall n \geq n_0.\ g(n) \leq c * f(n)\}$
  - Alternativ: $\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists k, c. \forall n.\ g(n) \leq k + c * f(n)\}$
  - **Gängige Schreibweisen**
    - $g = \mathcal{O}(f)$ bedeutet $g \in \mathcal{O}(f)$, $\mathcal{O}(f_1) = \mathcal{O}(f_2)$ bedeutet $\mathcal{O}(f_1) \subseteq \mathcal{O}(f_2)$
    - $\mathcal{O}(1) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.1)$, $\mathcal{O}(n) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.n)$, $\mathcal{O}(n^2) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.n^2)$, ...
- **Ordnung konkreter Funktionen**
  - Konstante Funktion: $g_1(n) = k$ für alle n $\quad g_1 \in \mathcal{O}(1)$
  - Polynome: $g_2(n) = c_0 + c_1 * n + .. + c_m * n^m$

Asymptotische Analyse

- **Asymptotischer Vergleich von Funktionen**
  - f_2 wächst schneller als f_1, falls $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - f_2 wächst asymptotisch schneller als f_1, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit
    $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \geq n_0$
- **Ordnung $\mathcal{O}(f)$ einer Funktion**
  - $\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists n_0, c. \forall n \geq n_0.\ g(n) \leq c * f(n)\}$
  - Alternativ: $\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists k, c. \forall n.\ g(n) \leq k + c * f(n)\}$
  - **Gängige Schreibweisen**
    - $g = \mathcal{O}(f)$ bedeutet $g \in \mathcal{O}(f)$, $\mathcal{O}(f_1) = \mathcal{O}(f_2)$ bedeutet $\mathcal{O}(f_1) \subseteq \mathcal{O}(f_2)$
    - $\mathcal{O}(1) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.1)$, $\mathcal{O}(n) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.n)$, $\mathcal{O}(n^2) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.n^2)$, ...
- **Ordnung konkreter Funktionen**
  - Konstante Funktion: $g_1(n) = k$ für alle n $\quad g_1 \in \mathcal{O}(1)$
  - Polynome: $g_2(n) = c_0 + c_1 * n + .. + c_m * n^m$ $\quad g_2 \in \mathcal{O}(n^m)$
  - Logarithmenfunktionen: $g_3(n) = log_b n$

Asymptotische Analyse

- **Asymptotischer Vergleich von Funktionen**
  - f_2 wächst schneller als f_1, falls $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - f_2 wächst asymptotisch schneller als f_1, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit
    $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \geq n_0$
- **Ordnung $\mathcal{O}(f)$ einer Funktion**
  - $\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists n_0, c. \forall n \geq n_0.\ g(n) \leq c * f(n)\}$
  - Alternativ: $\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists k, c. \forall n.\ g(n) \leq k + c * f(n)\}$
  - **Gängige Schreibweisen**
    - $g = \mathcal{O}(f)$ bedeutet $g \in \mathcal{O}(f)$, $\mathcal{O}(f_1) = \mathcal{O}(f_2)$ bedeutet $\mathcal{O}(f_1) \subseteq \mathcal{O}(f_2)$
    - $\mathcal{O}(1) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.1)$, $\mathcal{O}(n) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.n)$, $\mathcal{O}(n^2) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.n^2)$, ...
- **Ordnung konkreter Funktionen**
  - Konstante Funktion: $g_1(n) = k$ für alle n — $g_1 \in \mathcal{O}(1)$
  - Polynome: $g_2(n) = c_0 + c_1 * n + .. + c_m * n^m$ — $g_2 \in \mathcal{O}(n^m)$
  - Logarithmenfunktionen: $g_3(n) = log_b n$ — $g_3 \in \mathcal{O}(log_2 n)$
  - Fakultätsfunktion: $g_4(n) = n! = 1 * 2 * .. * n$

Asymptotische Analyse

- **Asymptotischer Vergleich von Funktionen**
  - f_2 wächst schneller als f_1, falls $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - f_2 wächst asymptotisch schneller als f_1, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit
    $f_1(n) \leq f_2(n)$ für alle $n \geq n_0$
- **Ordnung $\mathcal{O}(f)$ einer Funktion**
  - $\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists n_0, c. \forall n \geq n_0.\ g(n) \leq c * f(n)\}$
  - Alternativ: $\mathcal{O}(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists k, c. \forall n.\ g(n) \leq k + c * f(n)\}$
  - **Gängige Schreibweisen**
    - $g = \mathcal{O}(f)$ bedeutet $g \in \mathcal{O}(f)$, $\mathcal{O}(f_1) = \mathcal{O}(f_2)$ bedeutet $\mathcal{O}(f_1) \subseteq \mathcal{O}(f_2)$
    - $\mathcal{O}(1) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.1)$, $\mathcal{O}(n) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.n)$, $\mathcal{O}(n^2) \equiv \mathcal{O}(\lambda n.n^2)$, ...
- **Ordnung konkreter Funktionen**
  - Konstante Funktion: $g_1(n) = k$ für alle n — $g_1 \in \mathcal{O}(1)$
  - Polynome: $g_2(n) = c_0 + c_1 * n + .. + c_m * n^m$ — $g_2 \in \mathcal{O}(n^m)$
  - Logarithmenfunktionen: $g_3(n) = log_b n$ — $g_3 \in \mathcal{O}(log_2 n)$
  - Fakultätsfunktion: $g_4(n) = n! = 1 * 2 * .. * n$ — $g_4 \in \mathcal{O}(n^n)$

- **Asymptotischer Effizienzvergleich**
  - τ_1 ist schneller als τ_2, falls $time_{\tau_1}(n) \leq time_{\tau_2}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - τ_1 ist asymptotisch schneller als τ_2, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $time_{\tau_1}(n) \leq time_{\tau_2}(n)$ für alle $n \geq n_0$

Komplexität von Algorithmen

- **Asymptotischer Effizienzvergleich**
  - τ_1 ist schneller als τ_2, falls $time_{\tau_1}(n) \leq time_{\tau_2}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - τ_1 ist asymptotisch schneller als τ_2, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $time_{\tau_1}(n) \leq time_{\tau_2}(n)$ für alle $n \geq n_0$
- **Komplexität $\mathcal{O}(f)$**
  - τ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$
  - τ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$, falls $space_\tau \in \mathcal{O}(f)$

Komplexität von Algorithmen

- **Asymptotischer Effizienzvergleich**
  - τ_1 ist schneller als τ_2, falls $time_{\tau_1}(n) \leq time_{\tau_2}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - τ_1 ist asymptotisch schneller als τ_2, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $time_{\tau_1}(n) \leq time_{\tau_2}(n)$ für alle $n \geq n_0$
- **Komplexität $\mathcal{O}(f)$**
  - τ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$
  - τ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$, falls $space_\tau \in \mathcal{O}(f)$
- **Komplexitätklassen**
  - τ hat konstante (Zeit-)komplexität, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(1)$
  - τ hat logarithmische Komplexität, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(log_2 n)$
  - τ hat lineare Komplexität, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(n)$
  - τ hat quadratische Komplexität, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(n^2)$
  - τ hat kubische Komplexität, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(n^3)$
  - τ hat **polynomielle** Komplexität, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(n^k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$
  - τ hat **exponentielle** Komplexität, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(2^{n^k})$ für ein $k \in \mathbb{N}$
  - τ hat superexponentielle Komplexität, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(2^{2^{n^k}})$ für ein $k \in \mathbb{N}$

  $\vdots$

Komplexität von Algorithmen

- **Asymptotischer Effizienzvergleich**
  - τ_1 ist schneller als τ_2, falls $time_{\tau_1}(n) \leq time_{\tau_2}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - τ_1 ist asymptotisch schneller als τ_2, falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $time_{\tau_1}(n) \leq time_{\tau_2}(n)$ für alle $n \geq n_0$
- **Komplexität $\mathcal{O}(f)$**
  - τ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$
  - τ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$, falls $space_\tau \in \mathcal{O}(f)$
- **Komplexitätklassen**
  - τ hat konstante (Zeit-)komplexität, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(1)$
  - τ hat logarithmische Komplexität, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(log_2 n)$
  - τ hat lineare Komplexität, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(n)$
  - τ hat quadratische Komplexität, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(n^2)$
  - τ hat kubische Komplexität, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(n^3)$
  - τ hat **polynomielle** Komplexität, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(n^k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$
  - τ hat **exponentielle** Komplexität, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(2^{n^k})$ für ein $k \in \mathbb{N}$
  - τ hat superexponentielle Komplexität, falls $time_\tau \in \mathcal{O}(2^{2^{n^k}})$ für ein $k \in \mathbb{N}$

$\vdots$ Analoge Klassen für Platzkomplexität

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns								
n									
n^2									
n^3									
2^n									
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns							
n									
n^2									
n^3									
2^n									
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns					
n									
n^2									
n^3									
2^n									
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	
n									
n^2									
n^3									
2^n									
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n									
n^2									
n^3									
2^n									
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns								
n^2									
n^3									
2^n									
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns			
n^2									
n^3									
2^n									
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2									
n^3									
2^n									
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns								
n^3									
2^n									
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs			
n^3									
2^n									
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3									
2^n									
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n									
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns								
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs							
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs	300ms						
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs	300ms	300s					
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs	300ms	300s	83.3h				
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs	300ms	300s	83.3h	9.5y			
3^n									

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs	300ms	300s	83.3h	9.5y			
3^n	17.8μs								

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs	300ms	300s	83.3h	9.5y			
3^n	17.8μs	1.1s							

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs	300ms	300s	83.3h	9.5y			
3^n	17.8μs	1.1s	17.3h						

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs	300ms	300s	83.3h	9.5y			
3^n	17.8μs	1.1s	17.3h	116y					

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs	300ms	300s	83.3h	9.5y			
3^n	17.8μs	1.1s	17.3h	116y	2.500.000.000y				

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs	300ms	300s	83.3h	9.5y			
3^n	17.8μs	1.1s	17.3h	116y	2.500.000.000y				

Wieviel mehr kann man in der gleichen Zeit berechnen, wenn Computer um den Faktor 1000 schneller sind?

	$\log_2$n	n	n^2	n^3	2^n	3^n
Problemsteigerung						

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs	300ms	300s	83.3h	9.5y			
3^n	17.8μs	1.1s	17.3h	116y	2.500.000.000y				

Wieviel mehr kann man in der gleichen Zeit berechnen, wenn Computer um den Faktor 1000 schneller sind?

	$\log_2$n	n	n^2	n^3	2^n	3^n
Problemsteigerung	10^{300}-fach					

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs	300ms	300s	83.3h	9.5y			
3^n	17.8μs	1.1s	17.3h	116y	2.500.000.000y				

Wieviel mehr kann man in der gleichen Zeit berechnen, wenn Computer um den Faktor 1000 schneller sind?

	$\log_2$n	n	n^2	n^3	2^n	3^n
Problemsteigerung	10^{300}-fach	1000-fach				

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs	300ms	300s	83.3h	9.5y			
3^n	17.8μs	1.1s	17.3h	116y	2.500.000.000y				

Wieviel mehr kann man in der gleichen Zeit berechnen, wenn Computer um den Faktor 1000 schneller sind?

	$\log_2$n	n	n^2	n^3	2^n	3^n
Problemsteigerung	10^{300}-fach	1000-fach	31-fach			

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs	300ms	300s	83.3h	9.5y			
3^n	17.8μs	1.1s	17.3h	116y	2.500.000.000y				

Wieviel mehr kann man in der gleichen Zeit berechnen, wenn Computer um den Faktor 1000 schneller sind?

	$\log_2$n	n	n^2	n^3	2^n	3^n
Problemsteigerung	10^{300}-fach	1000-fach	31-fach	10-fach		

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs	300ms	300s	83.3h	9.5y			
3^n	17.8μs	1.1s	17.3h	116y	2.500.000.000y				

Wieviel mehr kann man in der gleichen Zeit berechnen, wenn Computer um den Faktor 1000 schneller sind?

	$\log_2$n	n	n^2	n^3	2^n	3^n
Problemsteigerung	10^{300}-fach	1000-fach	31-fach	10-fach	plus 10	

Wie schnell wächst Rechenzeit mit der Grösse der Eingabe?

Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor									
Größe n	10	20	30	40	50	60	...	1000	1.000.000
Wachstum									
$\log_2 n$	1ns	2ns		3ns				10ns	100ns
n	3ns	6ns	9ns	12ns	15ns	18ns		300ns	300μs
n^2	30ns	120ns	270ns	480ns	750ns	1.1μs		300μs	300s
n^3	300ns	2.4μs	8.1μs	19.2μs	37.5μs	64μs		300ms	9.5y
2^n	300ns	300μs	300ms	300s	83.3h	9.5y			
3^n	17.8μs	1.1s	17.3h	116y	2.500.000.000y				

Wieviel mehr kann man in der gleichen Zeit berechnen, wenn Computer um den Faktor 1000 schneller sind?

	$\log_2$n	n	n^2	n^3	2^n	3^n
Problemsteigerung	10^{300}-fach	1000-fach	31-fach	10-fach	plus 10	plus 6

Komplexitätklassen – Praktische Auswirkungen

- **Große Probleme benötigen polynomielle Lösungen**
  - Exponentielle Algorithmen sind für die Praxis unakzeptabel
  - Auch innerhalb der polynomiellen Komplexität gibt es große Unterschiede

Komplexitätklassen – Praktische Auswirkungen

- **Große Probleme benötigen polynomielle Lösungen**
  - Exponentielle Algorithmen sind für die Praxis unakzeptabel
  - Auch innerhalb der polynomiellen Komplexität gibt es große Unterschiede
- **Bessere Hardware ist selten eine Lösung**
  - Wenn Algorithmen schlecht sind, nützt die beste Hardware wenig
  - Es lohnt sich, in die Verbesserung von Algorithmen zu investieren

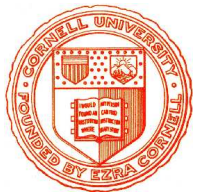
Komplexitätklassen – Praktische Auswirkungen

- **Große Probleme benötigen polynomielle Lösungen**
  - Exponentielle Algorithmen sind für die Praxis unakzeptabel
  - Auch innerhalb der polynomiellen Komplexität gibt es große Unterschiede
- **Bessere Hardware ist selten eine Lösung**
  - Wenn Algorithmen schlecht sind, nützt die beste Hardware wenig
  - Es lohnt sich, in die Verbesserung von Algorithmen zu investieren
- **Es gibt noch ungeklärte Fragen**
  - Kann Parallelismus signifikante Effizienzsteigerung bewirken?
    - z.B. von exponentieller auf polynomielle Zeit?

Komplexitätklassen – Praktische Auswirkungen

- **Große Probleme benötigen polynomielle Lösungen**
  - Exponentielle Algorithmen sind für die Praxis unakzeptabel
  - Auch innerhalb der polynomiellen Komplexität gibt es große Unterschiede
- **Bessere Hardware ist selten eine Lösung**
  - Wenn Algorithmen schlecht sind, nützt die beste Hardware wenig
  - Es lohnt sich, in die Verbesserung von Algorithmen zu investieren
- **Es gibt noch ungeklärte Fragen**
  - Kann Parallelismus signifikante Effizienzsteigerung bewirken?
    - z.B. von exponentieller auf polynomielle Zeit?
  - Was ist der Zusammenhang zwischen Platzbedarf und Laufzeitverhalten
    - Bisher nur grobe Abschätzungen bekannt

Theoretische Informatik



Einheit 3.2

Abschätzung der Komplexität von Algorithmen

1. Suchverfahren

2. Sortieralgorithmen

Obere Schranken für die Laufzeit

Obere Schranken für die Laufzeit

- **Analyse auf Ebene der Algorithmen**
  - Algorithmische Elementaroperationen gelten als ein Schritt
  - Meist konstanter Expansionsfaktor bei Übersetzung in Maschinensprache
  - `+`, `-`, `*`,`/`,... Einzelschritte, wenn Zahlengröße beschränkt (z.B. 64-bit)

Obere Schranken für die Laufzeit

- **Analyse auf Ebene der Algorithmen**
  - Algorithmische Elementaroperationen gelten als ein Schritt
  - Meist konstanter Expansionsfaktor bei Übersetzung in Maschinensprache
  - `+`, `-`, `*`,`/`,... Einzelschritte, wenn Zahlengröße beschränkt (z.B. 64-bit)
  - Höherer Aufwand bei beliebig großen Zahlen

Analyse konkreter Algorithmen

Obere Schranken für die Laufzeit

- **Analyse auf Ebene der Algorithmen**
  - Algorithmische Elementaroperationen gelten als ein Schritt
  - Meist konstanter Expansionsfaktor bei Übersetzung in Maschinensprache
  - `+`, `-`, `*`,`/`,... Einzelschritte, wenn Zahlengröße beschränkt (z.B. 64-bit)
  - Höherer Aufwand bei beliebig großen Zahlen
- **Analyse abstrakter sequentieller Algorithmen**
  - Asymptotische Komplexität ist unabhängig von Programmiersprache

Obere Schranken für die Laufzeit

- **Analyse auf Ebene der Algorithmen**
  - Algorithmische Elementaroperationen gelten als ein Schritt
  - Meist konstanter Expansionsfaktor bei Übersetzung in Maschinensprache
  - `+`, `-`, `*`,`/`,... Einzelschritte, wenn Zahlengröße beschränkt (z.B. 64-bit)
  - Höherer Aufwand bei beliebig großen Zahlen
- **Analyse abstrakter sequentieller Algorithmen**
  - Asymptotische Komplexität ist unabhängig von Programmiersprache
  - Parallele/nichtdeterministische Maschinen haben evtl. bessere Laufzeit

Sequentielle Suche

Teste, ob eine Zahl x in einer Liste L vorkommt

Sequentielle Suche

Teste, ob eine Zahl x in einer Liste L vorkommt

- **Durchsuche Liste L von links nach rechts**

```
function search_seq(x,L) ≡
   found := false;
   for i = 1 to length(L) do
      if L[i]=x then found:=true
   od;
   return found;
```

Sequentielle Suche

Teste, ob eine Zahl x in einer Liste L vorkommt

- **Durchsuche Liste L von links nach rechts**

```
function search_seq(x,L) ≡
   found := false;
   for i = 1 to length(L) do
      if L[i]=x then found:=true
   od;
   return found;
```

Verfahren ist anwendbar auf beliebige Listen

Sequentielle Suche

Teste, ob eine Zahl x in einer Liste L vorkommt

- **Durchsuche Liste L von links nach rechts**

```
function search_seq(x,L) ≡
   found := false;
   for i = 1 to length(L) do
      if L[i]=x then found:=true
   od;
   return found;
```

  Verfahren ist anwendbar auf beliebige Listen

- **Laufzeitanalyse**
  - Eine Operation für Initialisierung `found:=false`

Sequentielle Suche

Teste, ob eine Zahl x in einer Liste L vorkommt

- **Durchsuche Liste L von links nach rechts**

```
function search_seq(x,L) ≡
   found := false;
   for i = 1 to length(L) do
      if L[i]=x then found:=true
   od;
   return found;
```

  Verfahren ist anwendbar auf beliebige Listen

- **Laufzeitanalyse**
  - Eine Operation für Initialisierung `found:=false`
  - Je 2 Operationen pro Element von L in der `for`-Schleife

Sequentielle Suche

Teste, ob eine Zahl x in einer Liste L vorkommt

- **Durchsuche Liste L von links nach rechts**

```
function search_seq(x,L) ≡
   found := false;
   for i = 1 to length(L) do
      if L[i]=x then found:=true
   od;
   return found;
```

  Verfahren ist anwendbar auf beliebige Listen

- **Laufzeitanalyse**
  - Eine Operation für Initialisierung `found:=false`
  - Je 2 Operationen pro Element von L in der `for`-Schleife
  - Eine Operation für Ausgabe des Ergebnisses

Sequentielle Suche

Teste, ob eine Zahl x in einer Liste L vorkommt

- **Durchsuche Liste L von links nach rechts**

```
function search_seq(x,L) ≡
   found := false;
   for i = 1 to length(L) do
      if L[i]=x then found:=true
   od;
   return found;
```

  Verfahren ist anwendbar auf beliebige Listen

- **Laufzeitanalyse**
  - Eine Operation für Initialisierung `found:=false`
  - Je 2 Operationen pro Element von L in der `for`-Schleife
  - Eine Operation für Ausgabe des Ergebnisses
  - Insgesamt $2n+2$ Schritte, wenn n die Größe der Liste L ist

Sequentielle Suche

Teste, ob eine Zahl x in einer Liste L vorkommt

- **Durchsuche Liste L von links nach rechts**

```
function search_seq(x,L) ≡
   found := false;
   for i = 1 to length(L) do
      if L[i]=x then found:=true
   od;
   return found;
```

  Verfahren ist anwendbar auf beliebige Listen

- **Laufzeitanalyse**
  - Eine Operation für Initialisierung `found:=false`
  - Je 2 Operationen pro Element von L in der `for`-Schleife
  - Eine Operation für Ausgabe des Ergebnisses
  - Insgesamt $2n+2$ Schritte, wenn n die Größe der Liste L ist

  $\mapsto$ **Sequentielle Suche ist in $\mathcal{O}(n)$**

Binäre Suche

Nur anwendbar, wenn Liste L geordnet ist

Binäre Suche

Nur anwendbar, wenn Liste L geordnet ist

- **Teste mittleres Element; suche dann rechts oder links**

```
function search_bin(x,L) ≡
   function search_bound(x,L,left,right) ≡
      if left>right then return false
         else
            mid := (left+right) div 2;
            if x<L[mid] then search_bound(x,L,left,mid-1)
               elseif x>L[mid] then search_bound(x,L,mid+1,right)
               else return true
            fi;
   return search_bound(x,L,1,length(L))
```

Binäre Suche

Nur anwendbar, wenn Liste L geordnet ist

- **Teste mittleres Element; suche dann rechts oder links**

```
function search_bin(x,L) ≡
   function search_bound(x,L,left,right) ≡
      if left>right then return false
         else
            mid := (left+right) div 2;
            if x<L[mid] then search_bound(x,L,left,mid-1)
               elseif x>L[mid] then search_bound(x,L,mid+1,right)
               else return true
            fi;
   return search_bound(x,L,1,length(L))
```

- **Grobe Laufzeitanalyse**
  - Konstante Anzahl von Operationen pro Aufruf von $\texttt{search}_{bound}$
  - Wie oft wird $\texttt{search}_{bound}$ aufgerufen?

Binäre Suche – Analyse

```
function search_bin(x,L) ≡
   function search_bound(x,L,left,right) ≡
      if left>right then return false
         else
            mid := (left+right) div 2;
            if x<L[mid] then search_bound(x,L,left,mid-1)
               elseif x>L[mid] then search_bound(x,L,mid+1,right)
               else return true
            fi;
   return search_bound(x,L,1,length(L))
```

Binäre Suche – Analyse

```
function search_bin(x,L) ≡
   function search_bound(x,L,left,right) ≡
      if left>right then return false
         else
            mid := (left+right) div 2;
            if x<L[mid] then search_bound(x,L,left,mid-1)
               elseif x>L[mid] then search_bound(x,L,mid+1,right)
               else return true
            fi;
   return search_bound(x,L,1,length(L))
```

Abstand von `left` und `right` halbiert sich pro Aufruf (mit Abrundung)

Anzahl von Operationen pro Aufruf von $\texttt{search}_{bound}$ ist eine Konstante k

Binäre Suche – Analyse

```
function search_bin(x,L) ≡
   function search_bound(x,L,left,right) ≡
      if left>right then return false
         else
            mid := (left+right) div 2;
            if x<L[mid] then search_bound(x,L,left,mid-1)
               elseif x>L[mid] then search_bound(x,L,mid+1,right)
               else return true
            fi;
   return search_bound(x,L,1,length(L))
```

Abstand von `left` und `right` halbiert sich pro Aufruf (mit Abrundung)

Anzahl von Operationen pro Aufruf von $\texttt{search}_{bound}$ ist eine Konstante k

Abstand zu Beginn ist $n-1$ (n ist die Größe der Liste L)

$\texttt{search}_{bound}$ terminiert bei Erfolg oder wenn Abstand Null ist

Binäre Suche – Analyse

```
function search_bin(x,L) ≡
   function search_bound(x,L,left,right) ≡
      if left>right then return false
         else
            mid := (left+right) div 2;
            if x<L[mid] then search_bound(x,L,left,mid-1)
               elseif x>L[mid] then search_bound(x,L,mid+1,right)
               else return true
            fi;
   return search_bound(x,L,1,length(L))
```

Abstand von `left` und `right` halbiert sich pro Aufruf (mit Abrundung)

Anzahl von Operationen pro Aufruf von $\texttt{search}_{bound}$ ist eine Konstante k

Abstand zu Beginn ist $n-1$ (n ist die Größe der Liste L)

$\texttt{search}_{bound}$ terminiert bei Erfolg oder wenn Abstand Null ist

Lösung der Gleichung $time(n) = k+time(\lfloor n/2 \rfloor)$ ist $time(n) = k * \log_2 n$

Binäre Suche – Analyse

```
function search_bin(x,L) ≡
   function search_bound(x,L,left,right) ≡
      if left>right then return false
         else
            mid := (left+right) div 2;
            if x<L[mid] then search_bound(x,L,left,mid-1)
               elseif x>L[mid] then search_bound(x,L,mid+1,right)
               else return true
            fi;
   return search_bound(x,L,1,length(L))
```

Abstand von `left` und `right` halbiert sich pro Aufruf (mit Abrundung)

Anzahl von Operationen pro Aufruf von $\texttt{search}_{bound}$ ist eine Konstante k

Abstand zu Beginn ist $n-1$ (n ist die Größe der Liste L)

$\texttt{search}_{bound}$ terminiert bei Erfolg oder wenn Abstand Null ist

Lösung der Gleichung $time(n) = k+time(\lfloor n/2 \rfloor)$ ist $time(n) = k * \log_2 n$

$$\Downarrow$$

Binäre Suche ist in $\mathcal{O}(\log_2 n)$

Sortierverfahren

- **Ordne Elemente in aufsteigender Reihenfolge**
  - Geordnete Listen unterstützen effizienten Zugriff auf Elemente
  - Eine der häufigsten Operationen in der Programmierung

Sortierverfahren

- **Ordne Elemente in aufsteigender Reihenfolge**
  - Geordnete Listen unterstützen effizienten Zugriff auf Elemente
  - Eine der häufigsten Operationen in der Programmierung
- **Viele Verfahren bekannt**

Sortierverfahren

- **Ordne Elemente in aufsteigender Reihenfolge**
  - Geordnete Listen unterstützen effizienten Zugriff auf Elemente
  - Eine der häufigsten Operationen in der Programmierung
- **Viele Verfahren bekannt**
  - **Insertion Sort**: Einfügen des Listenanfangs in geordnete Teilliste

Sortierverfahren

- **Ordne Elemente in aufsteigender Reihenfolge**
  - Geordnete Listen unterstützen effizienten Zugriff auf Elemente
  - Eine der häufigsten Operationen in der Programmierung
- **Viele Verfahren bekannt**
  - **Insertion Sort**: Einfügen des Listenanfangs in geordnete Teilliste
  - **Selection Sort**: Auswahl des jeweils kleinsten Elements als Listenanfang

Sortierverfahren

- **Ordne Elemente in aufsteigender Reihenfolge**
  - Geordnete Listen unterstützen effizienten Zugriff auf Elemente
  - Eine der häufigsten Operationen in der Programmierung
- **Viele Verfahren bekannt**
  - **Insertion Sort**: Einfügen des Listenanfangs in geordnete Teilliste
  - **Selection Sort**: Auswahl des jeweils kleinsten Elements als Listenanfang
  - **Bubblesort**: Austauschen benachbarter Elemente

Sortierverfahren

- **Ordne Elemente in aufsteigender Reihenfolge**
  - Geordnete Listen unterstützen effizienten Zugriff auf Elemente
  - Eine der häufigsten Operationen in der Programmierung
- **Viele Verfahren bekannt**
  - **Insertion Sort**: Einfügen des Listenanfangs in geordnete Teilliste
  - **Selection Sort**: Auswahl des jeweils kleinsten Elements als Listenanfang
  - **Bubblesort**: Austauschen benachbarter Elemente
  - **Quicksort**: Aufteilung nach Größe, Sortieren der entstehenden Teillisten

Sortierverfahren

- **Ordne Elemente in aufsteigender Reihenfolge**
  - Geordnete Listen unterstützen effizienten Zugriff auf Elemente
  - Eine der häufigsten Operationen in der Programmierung
- **Viele Verfahren bekannt**
  - **Insertion Sort**: Einfügen des Listenanfangs in geordnete Teilliste
  - **Selection Sort**: Auswahl des jeweils kleinsten Elements als Listenanfang
  - **Bubblesort**: Austauschen benachbarter Elemente
  - **Quicksort**: Aufteilung nach Größe, Sortieren der entstehenden Teillisten
  - **Mergesort**: Aufteilen in Teillisten, Sortieren und Mischen der Teillisten

Sortierverfahren

- **Ordne Elemente in aufsteigender Reihenfolge**
  - Geordnete Listen unterstützen effizienten Zugriff auf Elemente
  - Eine der häufigsten Operationen in der Programmierung
- **Viele Verfahren bekannt**
  - **Insertion Sort**: Einfügen des Listenanfangs in geordnete Teilliste
  - **Selection Sort**: Auswahl des jeweils kleinsten Elements als Listenanfang
  - **Bubblesort**: Austauschen benachbarter Elemente
  - **Quicksort**: Aufteilung nach Größe, Sortieren der entstehenden Teillisten
  - **Mergesort**: Aufteilen in Teillisten, Sortieren und Mischen der Teillisten
  - **Mergesort (II)**: Identifizieren und Mischen geordneter Teillisten

Sortierverfahren

- **Ordne Elemente in aufsteigender Reihenfolge**
  - Geordnete Listen unterstützen effizienten Zugriff auf Elemente
  - Eine der häufigsten Operationen in der Programmierung
- **Viele Verfahren bekannt**
  - **Insertion Sort**: Einfügen des Listenanfangs in geordnete Teilliste
  - **Selection Sort**: Auswahl des jeweils kleinsten Elements als Listenanfang
  - **Bubblesort**: Austauschen benachbarter Elemente
  - **Quicksort**: Aufteilung nach Größe, Sortieren der entstehenden Teillisten
  - **Mergesort**: Aufteilen in Teillisten, Sortieren und Mischen der Teillisten
  - **Mergesort (II)**: Identifizieren und Mischen geordneter Teillisten

Auswahl des 'besten' Verfahrens hängt von Größe des Problems ab

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

9	7	8	2	1	5	6

Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

9	7	8	2	1	5	6

Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

7	9	8	2	1	5	6

Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

7	8	9	2	1	5	6

Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

7	8	2	9	1	5	6

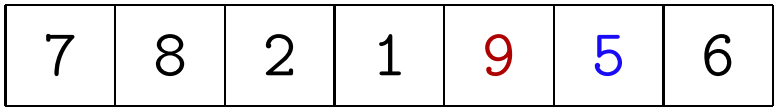
Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**



Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

7	8	2	1	5	9	6

Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

7	8	2	1	5	6	9

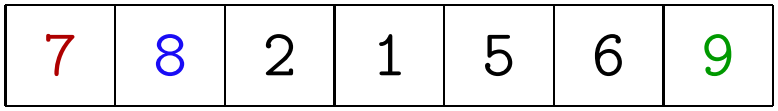
Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**



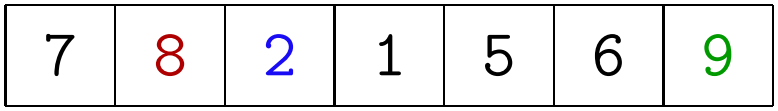
Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**



Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

7	2	8	1	5	6	9

Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

7	2	1	8	5	6	9

Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

7	2	1	5	8	6	9

Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

7	2	1	5	6	8	9

Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

7	2	1	5	6	8	9

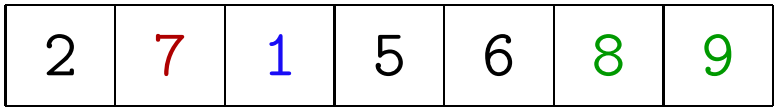
Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**



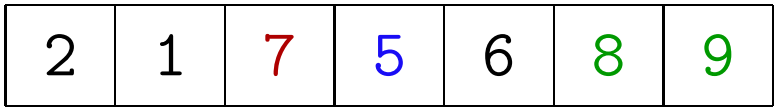
Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**



Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

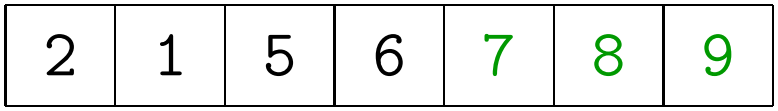
Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**



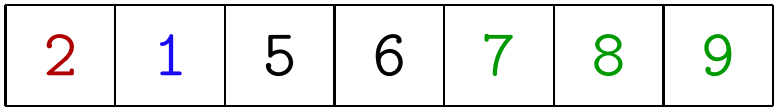
Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**



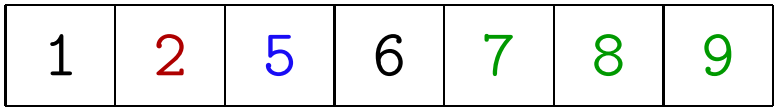
Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**



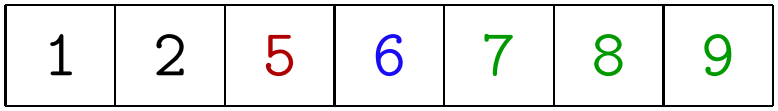
Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**



Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort

Fortlaufender Vergleich benachbarter Elemente
Austausch bei falscher Reihenfolge

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Beispiel einer Sortierung mit Bubblesort**

√

Elemente steigen wie Blasen auf, bis sie auf größere treffen

Bubblesort - Laufzeitanalyse

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

Bubblesort - Laufzeitanalyse

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Feste Anzahl von Operationen im Schleifenrumpf**
  - Vergleich benachbarter Elemente
  - ggf. Austauch unter Verwendung einer Hilfsvariablen

Bubblesort - Laufzeitanalyse

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Feste Anzahl von Operationen im Schleifenrumpf**
  - Vergleich benachbarter Elemente
  - ggf. Austauch unter Verwendung einer Hilfsvariablen
- **Anzahl Schleifen abhängig von Listengröße n**

Bubblesort - Laufzeitanalyse

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Feste Anzahl von Operationen im Schleifenrumpf**
  - Vergleich benachbarter Elemente
  - ggf. Austauch unter Verwendung einer Hilfsvariablen
- **Anzahl Schleifen abhängig von Listengröße n**
  - Innere Schleife wird jeweils genau `upper`-mal durchlaufen

Bubblesort - Laufzeitanalyse

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Feste Anzahl von Operationen im Schleifenrumpf**
  - Vergleich benachbarter Elemente
  - ggf. Austauch unter Verwendung einer Hilfsvariablen
- **Anzahl Schleifen abhängig von Listengröße n**
  - Innere Schleife wird jeweils genau `upper`-mal durchlaufen
  - Insgesamt n-1 + n-2 + ... + 2 + 1 = $n^*(n\text{-}1)/2$ Durchläufe

Bubblesort - Laufzeitanalyse

```
function bubblesort(L) ≡
   for upper = length(L)-1 downto 1 do
      for j = 1 to upper do
         if L[j]>L[j+1] then
            aux := L[j];
            L[j] := L[j+1];
            L[j+1] := aux
         fi
      od
   od
```

- **Feste Anzahl von Operationen im Schleifenrumpf**
  - Vergleich benachbarter Elemente
  - ggf. Austauch unter Verwendung einer Hilfsvariablen
- **Anzahl Schleifen abhängig von Listengröße n**
  - Innere Schleife wird jeweils genau `upper`-mal durchlaufen
  - Insgesamt n-1 + n-2 + ... + 2 + 1 = $n^*(n\text{-}1)/2$ Durchläufe

$\Downarrow$

Bubblesort ist in $\mathcal{O}(n^2)$

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

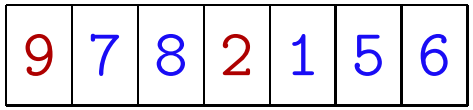
Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**



Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6
7						

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6
7	8					

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6
7	8	9				

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6
7	8	9	1			

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6
7	8	9	1	2		

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6
7	8	9	1	2	5	

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6
7	8	9	1	2	5	6

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6
7	8	9	1	2	5	6

  – Länge der Läufe wächst – Anzahl halbiert sich

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6
7	8	9	1	2	5	6

  – Länge der Läufe wächst – Anzahl halbiert sich

- **Wiederhole bis Folge geordnet**

7	8	9	1	2	5	6

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6
7	8	9	1	2	5	6

  – Länge der Läufe wächst – Anzahl halbiert sich

- **Wiederhole bis Folge geordnet**

7	8	9	1	2	5	6
1						

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6
7	8	9	1	2	5	6

  – Länge der Läufe wächst – Anzahl halbiert sich

- **Wiederhole bis Folge geordnet**

7	8	9	1	2	5	6
1	2					

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6
7	8	9	1	2	5	6

  – Länge der Läufe wächst – Anzahl halbiert sich

- **Wiederhole bis Folge geordnet**

7	8	9	1	2	5	6
1	2	5				

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6
7	8	9	1	2	5	6

  – Länge der Läufe wächst – Anzahl halbiert sich

- **Wiederhole bis Folge geordnet**

7	8	9	1	2	5	6
1	2	5	6			

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6
7	8	9	1	2	5	6

  – Länge der Läufe wächst – Anzahl halbiert sich

- **Wiederhole bis Folge geordnet**

7	8	9	1	2	5	6
1	2	5	6	7		

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6
7	8	9	1	2	5	6

  – Länge der Läufe wächst – Anzahl halbiert sich

- **Wiederhole bis Folge geordnet**

7	8	9	1	2	5	6
1	2	5	6	7	8	

Sortieren schneller als $\mathcal{O}(n^2)$

- **Identifiziere Läufe, d.h. geordnete Teilfolgen**

9	7	8	2	1	5	6

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

9	7	8	2	1	5	6
7	8	9	1	2	5	6

  – Länge der Läufe wächst – Anzahl halbiert sich

- **Wiederhole bis Folge geordnet**

7	8	9	1	2	5	6
1	2	5	6	7	8	9

  – Liste ist eine einzige (komplett) geordnete Teilfolge $\surd$

Analyse des Verfahrens

- **Abstrakte Skizze reicht für Laufzeitanalyse**

Analyse des Verfahrens

- **Abstrakte Skizze reicht für Laufzeitanalyse**
- **Verschmelzen ist in $\mathcal{O}(n)$**
  - Folge wird jeweils komplett durchlaufen

Analyse des Verfahrens

- **Abstrakte Skizze reicht für Laufzeitanalyse**
- **Verschmelzen ist in $\mathcal{O}(n)$**
  - Folge wird jeweils komplett durchlaufen
- **Verschmelzen halbiert Anzahl der Läufe**
  - Je zwei Läufe werden zu einem gemischt

Analyse des Verfahrens

- **Abstrakte Skizze reicht für Laufzeitanalyse**
- **Verschmelzen ist in $\mathcal{O}(n)$**
  - Folge wird jeweils komplett durchlaufen
- **Verschmelzen halbiert Anzahl der Läufe**
  - Je zwei Läufe werden zu einem gemischt
  - Nach maximal $\log_2 n$ Verschmelzungen bleibt ein einziger Lauf übrig

    d.h. die Liste ist sortiert

Analyse des Verfahrens

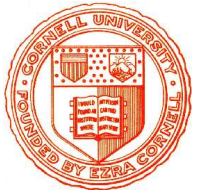
- **Abstrakte Skizze reicht für Laufzeitanalyse**
- **Verschmelzen ist in $\mathcal{O}(n)$**
  - Folge wird jeweils komplett durchlaufen
- **Verschmelzen halbiert Anzahl der Läufe**
  - Je zwei Läufe werden zu einem gemischt
  - Nach maximal $\log_2 n$ Verschmelzungen bleibt ein einziger Lauf übrig

    d.h. die Liste ist sortiert

$\Downarrow$

Sortieren durch Verschmelzen ist in $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$

Theoretische Informatik



Einheit 3.3

Komplexität von Problemen

1. Untere Schranken für Komplexität
2. Nichtdeterministische Komplexität
3. Komplexitätsklassen

Komplexität von Problemen

- **Probleme haben unterschiedlich gute Lösungen**
  - Suchen: Lineare Suche $\mathcal{O}(n)$ — Binärsuche $\mathcal{O}(\log_2 n)$
  - Sortieren: Bubblesort $\mathcal{O}(n^2)$ — Mergesort $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$

Komplexität von Problemen

- **Probleme haben unterschiedlich gute Lösungen**
  - Suchen: Lineare Suche $\mathcal{O}(n)$ — Binärsuche $\mathcal{O}(\log_2 n)$
  - Sortieren: Bubblesort $\mathcal{O}(n^2)$ — Mergesort $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$
- **Wie effizient kann ein Problem gelöst werden?**
  - Gibt es untere Schranken für die Komplexität von Lösungen

Komplexität von Problemen

- **Probleme haben unterschiedlich gute Lösungen**
  - Suchen: Lineare Suche $\mathcal{O}(n)$ — Binärsuche $\mathcal{O}(\log_2 n)$
  - Sortieren: Bubblesort $\mathcal{O}(n^2)$ — Mergesort $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$
- **Wie effizient kann ein Problem gelöst werden?**
  - Gibt es untere Schranken für die Komplexität von Lösungen
- **Wann ist eine Lösung gut genug?**
  - Ist ein Lösungsalgorithmus optimal bezüglich Zeit-/Platzbedarf?

Komplexität von Problemen

- **Probleme haben unterschiedlich gute Lösungen**
  - Suchen: Lineare Suche $\mathcal{O}(n)$ — Binärsuche $\mathcal{O}(\log_2 n)$
  - Sortieren: Bubblesort $\mathcal{O}(n^2)$ — Mergesort $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$
- **Wie effizient kann ein Problem gelöst werden?**
  - Gibt es untere Schranken für die Komplexität von Lösungen
- **Wann ist eine Lösung gut genug?**
  - Ist ein Lösungsalgorithmus optimal bezüglich Zeit-/Platzbedarf?
- **Nachweis aufwendig**
  - Man muß über alle möglichen Algorithmen argumentieren

Komplexität von Sortierverfahren

Schneller als $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$?

Komplexität von Sortierverfahren

Schneller als $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$?

- **Sortierverfahren müssen Elemente vergleichen**
  - Sonst kann die Anordnung der Elemente nicht garantiert werden

Komplexität von Sortierverfahren

Schneller als $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$?

- **Sortierverfahren müssen Elemente vergleichen**
  - Sonst kann die Anordnung der Elemente nicht garantiert werden
  - Wieviel Vergleiche werden benötigt um $a_1..a_n$ zu ordnen?
  - Bestimme Anzahl der Vergleiche für den ungünstigsten Fall

Komplexität von Sortierverfahren

Schneller als $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$?

- **Sortierverfahren müssen Elemente vergleichen**
  - Sonst kann die Anordnung der Elemente nicht garantiert werden
  - Wieviel Vergleiche werden benötigt um $a_1..a_n$ zu ordnen?
  - Bestimme Anzahl der Vergleiche für den ungünstigsten Fall

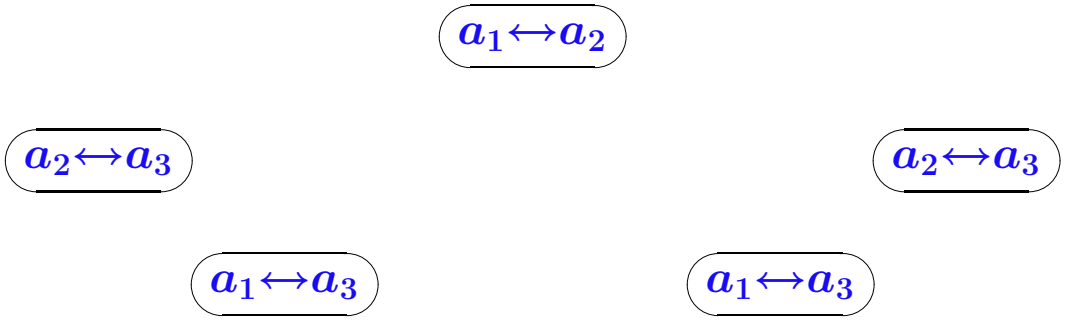
- **Betrachte Entscheidungsbaum von Algorithmen**

Komplexität von Sortierverfahren

Schneller als $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$?

- **Sortierverfahren müssen Elemente vergleichen**
  - Sonst kann die Anordnung der Elemente nicht garantiert werden
  - Wieviel Vergleiche werden benötigt um $a_1..a_n$ zu ordnen?
  - Bestimme Anzahl der Vergleiche für den ungünstigsten Fall

- **Betrachte Entscheidungsbaum von Algorithmen**

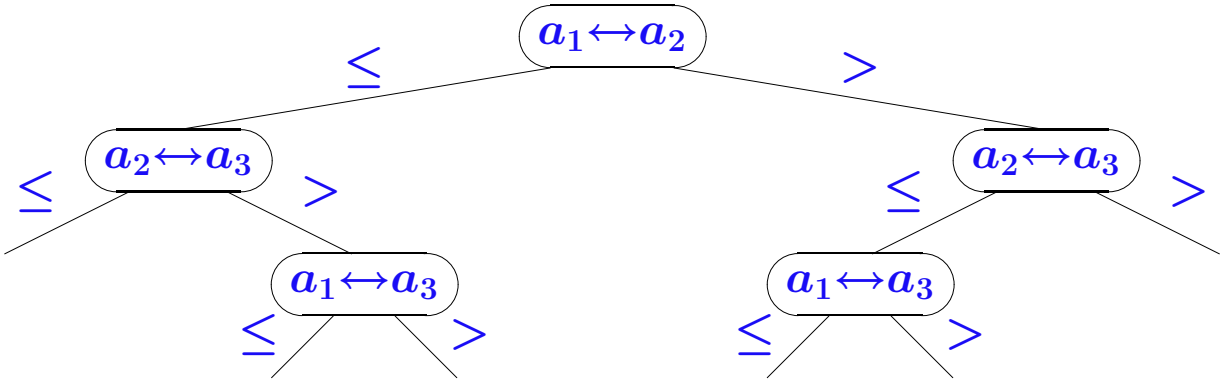


  - Innere Knoten entsprechen den durchgeführten Vergleichen

Schneller als $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$?

- **Sortierverfahren müssen Elemente vergleichen**
  - Sonst kann die Anordnung der Elemente nicht garantiert werden
  - Wieviel Vergleiche werden benötigt um $a_1..a_n$ zu ordnen?
  - Bestimme Anzahl der Vergleiche für den ungünstigsten Fall

- **Betrachte Entscheidungsbaum von Algorithmen**

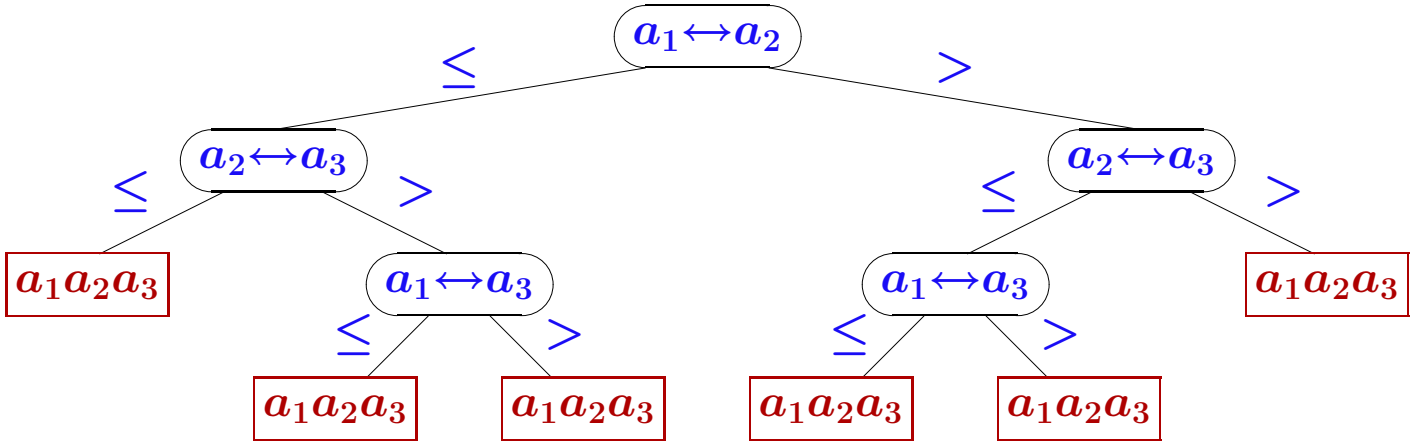


  - Innere Knoten entsprechen den durchgeführten Vergleichen
  - Kanten markiert mit Vergleichergebnis ($\leq$,$>$)

Schneller als $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$?

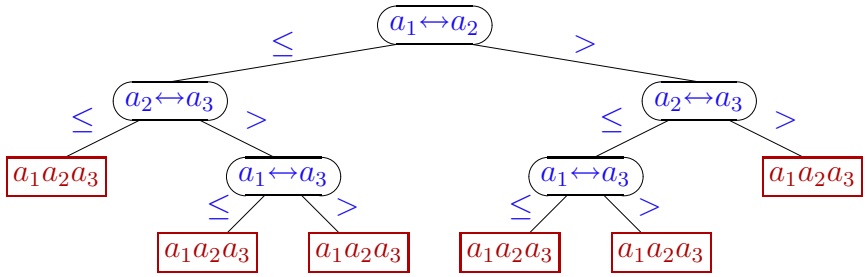
- **Sortierverfahren müssen Elemente vergleichen**
  - Sonst kann die Anordnung der Elemente nicht garantiert werden
  - Wieviel Vergleiche werden benötigt um $a_1..a_n$ zu ordnen?
  - Bestimme Anzahl der Vergleiche für den ungünstigsten Fall

- **Betrachte Entscheidungsbaum von Algorithmen**



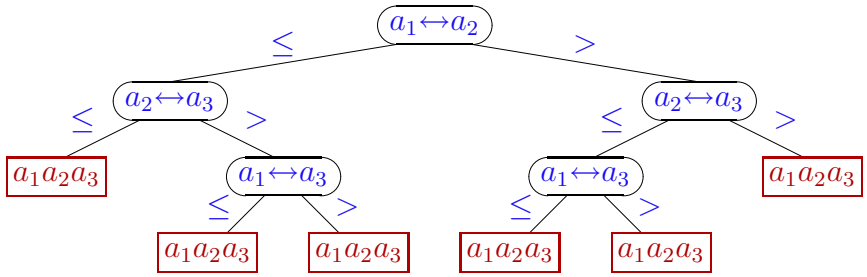
  - Innere Knoten entsprechen den durchgeführten Vergleichen
  - Kanten markiert mit Vergleichergebnis ($\leq$,$>$)
  - Blätter sind resultierende Anordnung der Elemente

Komplexität von Sortierverfahren (II)



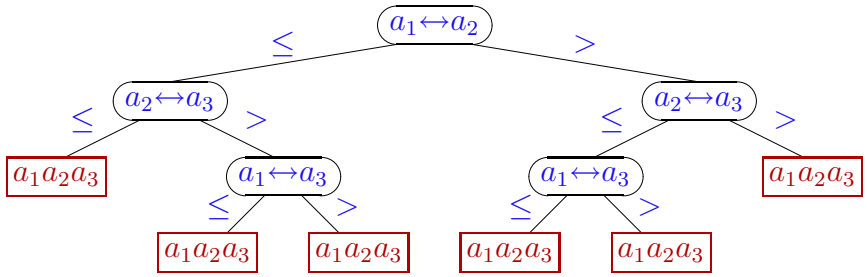
- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum

Komplexität von Sortierverfahren (II)



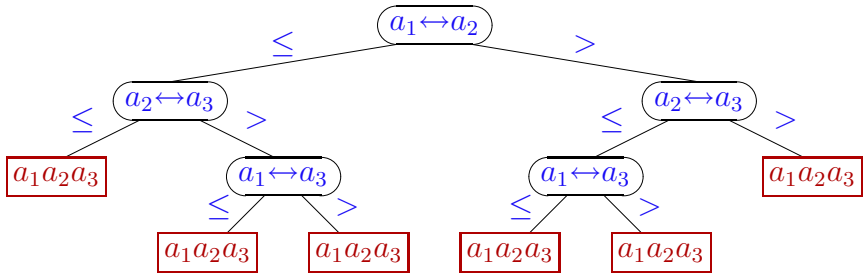
- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes

Komplexität von Sortierverfahren (II)



- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

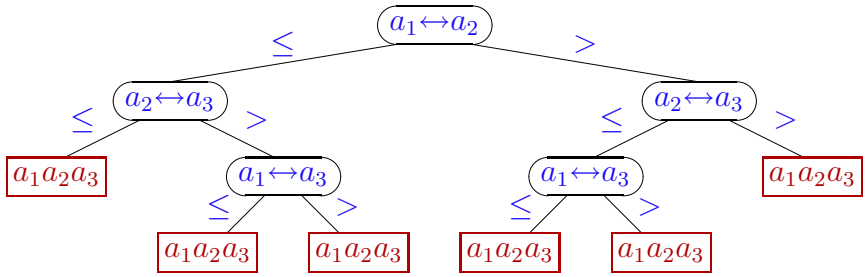
Komplexität von Sortierverfahren (II)



- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

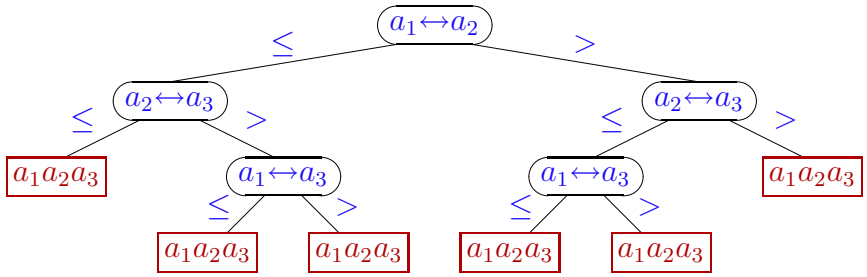
Komplexität von Sortierverfahren (II)



- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen
- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**

Komplexität von Sortierverfahren (II)

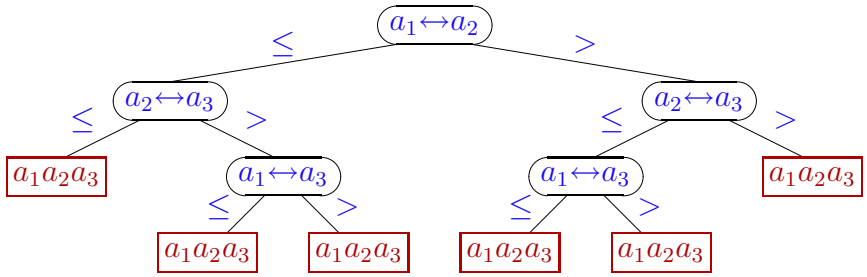


- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1..a_n$ hat $n!$ Blätter

Komplexität von Sortierverfahren (II)

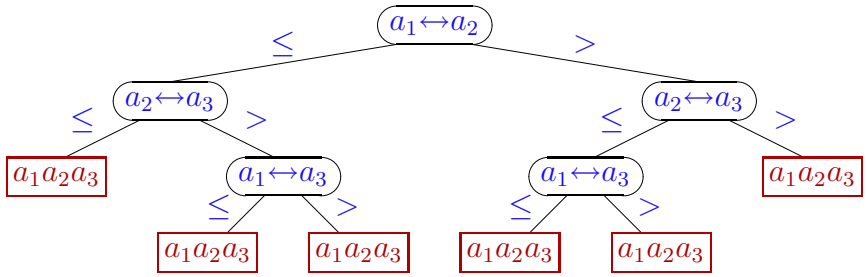


- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1..a_n$ hat $n!$ Blätter
  - Ein binärer Baum der Tiefe k hat maximal 2^k Blätter

Komplexität von Sortierverfahren (II)

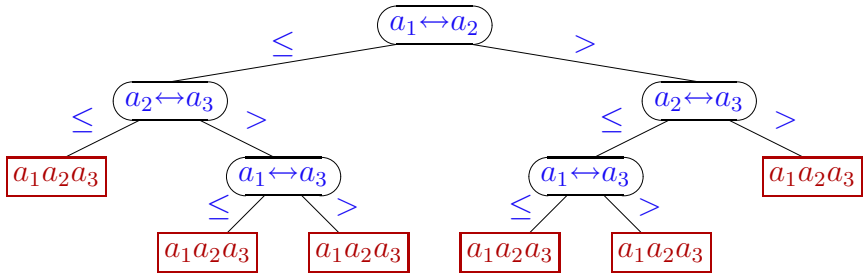


- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1..a_n$ hat $n!$ Blätter
  - Ein binärer Baum der Tiefe k hat maximal 2^k Blätter
  - Jeder Entscheidungsbaum hat mindestens Tiefe $\log_2 n!$

Komplexität von Sortierverfahren (II)

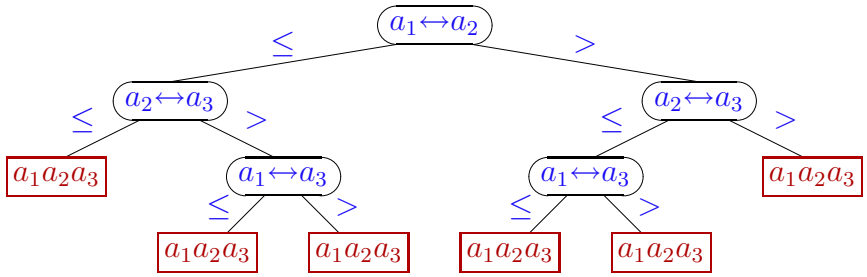


- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1..a_n$ hat $n!$ Blätter
  - Ein binärer Baum der Tiefe k hat maximal 2^k Blätter
  - Jeder Entscheidungsbaum hat mindestens Tiefe $\log_2 n!$
  - $\log_2 n! = \log_2(\Pi_{i=1}^{n} i)$

Komplexität von Sortierverfahren (II)

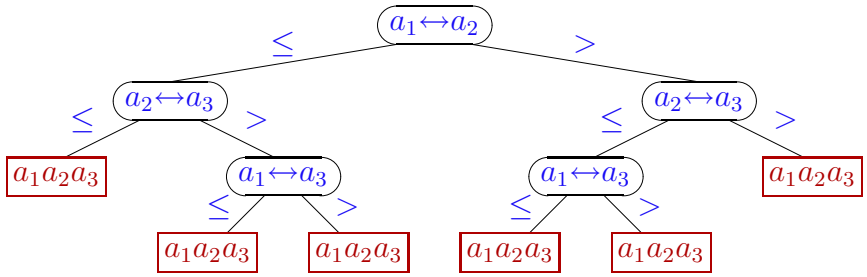


- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1..a_n$ hat $n!$ Blätter
  - Ein binärer Baum der Tiefe k hat maximal 2^k Blätter
  - Jeder Entscheidungsbaum hat mindestens Tiefe $\log_2 n!$
  - $\log_2 n! = \log_2(\Pi_{i=1}^{n} i) = \Sigma_{i=1}^{n} \log_2 i$

Komplexität von Sortierverfahren (II)

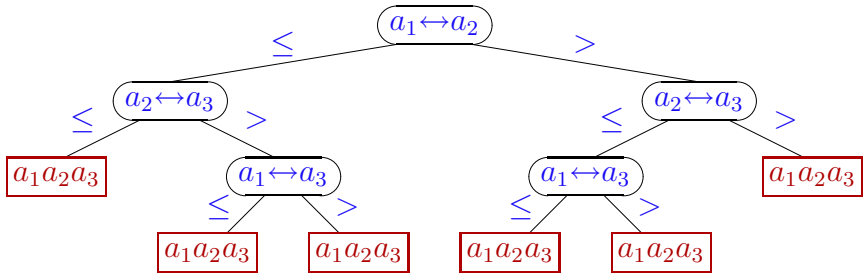


- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1..a_n$ hat $n!$ Blätter
  - Ein binärer Baum der Tiefe k hat maximal 2^k Blätter
  - Jeder Entscheidungsbaum hat mindestens Tiefe $\log_2 n!$
  - $\log_2 n! = \log_2(\Pi_{i=1}^{n} i) = \Sigma_{i=1}^{n} \log_2 i \ \geq \Sigma_{i=n/2}^{n} \log_2(n/2)$

Komplexität von Sortierverfahren (II)

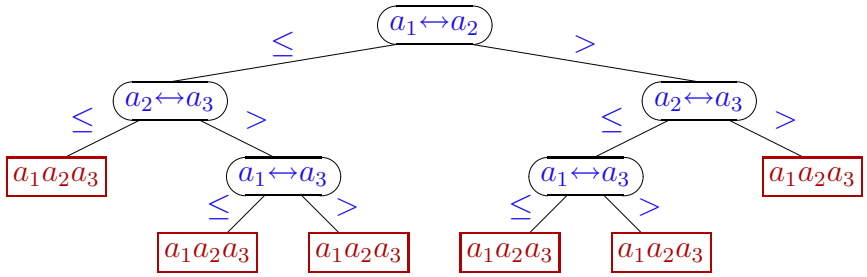


- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1..a_n$ hat $n!$ Blätter
  - Ein binärer Baum der Tiefe k hat maximal 2^k Blätter
  - Jeder Entscheidungsbaum hat mindestens Tiefe $\log_2 n!$
  - $\log_2 n! = \log_2(\Pi_{i=1}^{n} i) = \Sigma_{i=1}^{n} \log_2 i \ \geq \Sigma_{i=n/2}^{n} \log_2(n/2) = n/2{*}(\log_2 n - 1)$

Komplexität von Sortierverfahren (II)



- **Algorithmen entsprechen Entscheidungsbäumen**
  - Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  $\mapsto$ Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen

- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1..a_n$ hat $n!$ Blätter
  - Ein binärer Baum der Tiefe k hat maximal 2^k Blätter
  - Jeder Entscheidungsbaum hat mindestens Tiefe $\log_2 n!$
  - $\log_2 n! = \log_2(\Pi_{i=1}^{n} i) = \Sigma_{i=1}^{n} \log_2 i \ \geq \Sigma_{i=n/2}^{n} \log_2(n/2) = n/2{*}(\log_2 n - 1)$

$\Downarrow$

Sortieren ist in $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$

Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition n-stelliger Zahlen**

Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag

Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation n-stelliger Zahlen**

Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden

Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden
- **Division n-stelliger Zahlen**

Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden
- **Division n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Schriftliche Division bestimmt Ergebnis von links nach rechts

Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden
- **Division n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Schriftliche Division bestimmt Ergebnis von links nach rechts
- **Berechnung von $n!$**

Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden
- **Division n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Schriftliche Division bestimmt Ergebnis von links nach rechts
- **Berechnung von $n!$** $\mathcal{O}(n^2 * (\log_2 n)^2)$
  - Obergrenze: n-fache Multiplikation von n und $n!$: $n * \log_2 n * \log_2(n^n)$
  - Untergrenze: $n/2$-fach $n/2 * (n/2)!$: $n/2 * \log_2(n/2) * n/4 * (\log_2 n - 2)$

Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden
- **Division n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Schriftliche Division bestimmt Ergebnis von links nach rechts
- **Berechnung von $n!$** $\mathcal{O}(n^2 * (\log_2 n)^2)$
  - Obergrenze: n-fache Multiplikation von n und $n!$: $n * \log_2 n * \log_2(n^n)$
  - Untergrenze: $n/2$-fach $n/2 * (n/2)!$: $n/2 * \log_2(n/2) * n/4 * (\log_2 n - 2)$
- **Primzahltest bei n-stelliger Zahlen**

Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden
- **Division n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Schriftliche Division bestimmt Ergebnis von links nach rechts
- **Berechnung von $n!$** $\mathcal{O}(n^2 * (\log_2 n)^2)$
  - Obergrenze: n-fache Multiplikation von n und $n!$: $n * \log_2 n * \log_2(n^n)$
  - Untergrenze: $n/2$-fach $n/2*(n/2)!$: $n/2 * \log_2(n/2) * n/4*(\log_2 n - 2)$
- **Primzahltest bei n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(2^n)$
  - Teilbarkeit muß für alle kleineren Zahlen getestet werden

Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden
- **Division n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Schriftliche Division bestimmt Ergebnis von links nach rechts
- **Berechnung von $n!$** $\mathcal{O}(n^2 * (\log_2 n)^2)$
  - Obergrenze: n-fache Multiplikation von n und $n!$: $n * \log_2 n * \log_2(n^n)$
  - Untergrenze: $n/2$-fach $n/2*(n/2)!$: $n/2 * \log_2(n/2) * n/4*(\log_2 n - 2)$
- **Primzahltest bei n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(2^n)$
  - Teilbarkeit muß für alle kleineren Zahlen getestet werden
  - Untere Schranke $\mathcal{O}(2^n)$ nicht bewiesen $\mapsto$ NP-Vollständigkeit

Komplexität anderer Problemstellungen

- **Addition n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n)$
  - Einstellige Addition von rechts nach links mit Übertrag
- **Multiplikation n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Jede Stelle muß mit jeder Stelle multipliziert werden
- **Division n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(n^2)$
  - Schriftliche Division bestimmt Ergebnis von links nach rechts
- **Berechnung von $n!$** $\mathcal{O}(n^2 * (\log_2 n)^2)$
  - Obergrenze: n-fache Multiplikation von n und $n!$: $n * \log_2 n * \log_2(n^n)$
  - Untergrenze: $n/2$-fach $n/2*(n/2)!$: $n/2 * \log_2(n/2) * n/4*(\log_2 n - 2)$
- **Primzahltest bei n-stelliger Zahlen** $\mathcal{O}(2^n)$
  - Teilbarkeit muß für alle kleineren Zahlen getestet werden
  - Untere Schranke $\mathcal{O}(2^n)$ nicht bewiesen $\mapsto$ NP-Vollständigkeit
  - Ergebnis gut für offene kryptographische Systeme (wähle $n > 200$)

Weitere Probleme mit exponentieller Komplexität

- **Travelling Salesman (TSP)**
  Gegeben n Städte, eine Kostentabelle von Kosten c_{ij} um von Stadt i nach j zu reisen und eine Kostenbeschränkung B. Gibt es eine Rundreise durch alle n Städte, deren Kosten unter B liegt?

Weitere Probleme mit exponentieller Komplexität

- **Travelling Salesman (TSP)**
  Gegeben n Städte, eine Kostentabelle von Kosten c_{ij} um von Stadt i nach j zu reisen und eine Kostenbeschränkung B. Gibt es eine Rundreise durch alle n Städte, deren Kosten unter B liegt?
- **Cliquen-Problem (CLIQUE)**
  Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$. Gibt es in G eine Clique (vollständig verbundener Teilgraph) der Größe k?

Weitere Probleme mit exponentieller Komplexität

- **Travelling Salesman (TSP)**
  Gegeben n Städte, eine Kostentabelle von Kosten c_{ij} um von Stadt i nach j zu reisen und eine Kostenbeschränkung B. Gibt es eine Rundreise durch alle n Städte, deren Kosten unter B liegt?
- **Cliquen-Problem (CLIQUE)**
  Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$. Gibt es in G eine Clique (vollständig verbundener Teilgraph) der Größe k?
- **Erfüllbarkeitsproblem (SAT)**
  Ist eine aussagenlogische Formel in KNF der Größe n erfüllbar?

Weitere Probleme mit exponentieller Komplexität

- **Travelling Salesman (TSP)**
  Gegeben n Städte, eine Kostentabelle von Kosten c_{ij} um von Stadt i nach j zu reisen und eine Kostenbeschränkung B. Gibt es eine Rundreise durch alle n Städte, deren Kosten unter B liegt?
- **Cliquen-Problem (CLIQUE)**
  Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$. Gibt es in G eine Clique (vollständig verbundener Teilgraph) der Größe k?
- **Erfüllbarkeitsproblem (SAT)**
  Ist eine aussagenlogische Formel in KNF der Größe n erfüllbar?
- **Multiprozessor-Scheduling**
  Verteile n Prozesse derart auf eine Menge von Prozessoren, daß die Ressourcen der Rechner optimal genutzt werden.

Weitere Probleme mit exponentieller Komplexität

- **Travelling Salesman (TSP)**
  Gegeben n Städte, eine Kostentabelle von Kosten c_{ij} um von Stadt i nach j zu reisen und eine Kostenbeschränkung B. Gibt es eine Rundreise durch alle n Städte, deren Kosten unter B liegt?
- **Cliquen-Problem (CLIQUE)**
  Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$. Gibt es in G eine Clique (vollständig verbundener Teilgraph) der Größe k?
- **Erfüllbarkeitsproblem (SAT)**
  Ist eine aussagenlogische Formel in KNF der Größe n erfüllbar?
- **Multiprozessor-Scheduling**
  Verteile n Prozesse derart auf eine Menge von Prozessoren, daß die Ressourcen der Rechner optimal genutzt werden.
- **Binpacking**
  Minimiere Anzahl von Verpackungsbehältern, um n verschieden große Gegenstände zu transportieren.

Weitere Probleme mit exponentieller Komplexität

- **Travelling Salesman (TSP)**
  Gegeben n Städte, eine Kostentabelle von Kosten c_{ij} um von Stadt i nach j zu reisen und eine Kostenbeschränkung B. Gibt es eine Rundreise durch alle n Städte, deren Kosten unter B liegt?
- **Cliquen-Problem (CLIQUE)**
  Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$. Gibt es in G eine Clique (vollständig verbundener Teilgraph) der Größe k?
- **Erfüllbarkeitsproblem (SAT)**
  Ist eine aussagenlogische Formel in KNF der Größe n erfüllbar?
- **Multiprozessor-Scheduling**
  Verteile n Prozesse derart auf eine Menge von Prozessoren, daß die Ressourcen der Rechner optimal genutzt werden.
- **Binpacking**
  Minimiere Anzahl von Verpackungsbehältern, um n verschieden große Gegenstände zu transportieren.

Bisher nur durch Testen aller Möglichkeiten lösbar

Entscheidungs- und Optimierungsprobleme

Viele Probleme erscheinen in mehreren Varianten

Viele Probleme erscheinen in mehreren Varianten

- **Entscheidungsprobleme**
  - Teste ob eine Eingabe $x_1, .., x_n$ eine bestimmte Eigenschaft P erfüllt
  - Suchen in Listen, Primzahltests, Travelling Salesman, Clique ...

Viele Probleme erscheinen in mehreren Varianten

- **Entscheidungsprobleme**
  - Teste ob eine Eingabe $x_1, .., x_n$ eine bestimmte Eigenschaft P erfüllt
  - Suchen in Listen, Primzahltests, Travelling Salesman, Clique ...
- **Berechnungsprobleme**
  - Bei Eingabe von $x_1, .., x_n$ berechne ein y, so daß $P(x_1, .., x_n, y)$ gilt
  - Sortieren, Primfaktorzerlegung, Matrixmultiplikation, ...

Viele Probleme erscheinen in mehreren Varianten

- **Entscheidungsprobleme**
  - Teste ob eine Eingabe $x_1, .., x_n$ eine bestimmte Eigenschaft P erfüllt
  - Suchen in Listen, Primzahltests, Travelling Salesman, Clique ...
- **Berechnungsprobleme**
  - Bei Eingabe von $x_1, .., x_n$ berechne ein y, so daß $P(x_1, .., x_n, y)$ gilt
  - Sortieren, Primfaktorzerlegung, Matrixmultiplikation, ...
- **Optimierungsprobleme**
  - Bei Eingabe von $x_1, .., x_n$ berechne das beste y mit $P(x_1, .., x_n, y)$
  - Travelling Salesman, Clique, Binpacking, Multiprocessor Scheduling

Varianten des Cliquenproblems

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \leq |V|$. Eine k-Clique von G ist ein vollständig verbundener Teilgraph $C = (V_c, E_c)$ mit $|V_c| = k$

Varianten des Cliquenproblems

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \leq |V|$. Eine k-Clique von G ist ein vollständig verbundener Teilgraph $C = (V_c, E_c)$ mit $|V_c| = k$

- **Entscheidungsproblem**
  - "Gibt es eine Lösung mit einem bestimmten Wert"
    - CLIQUE: Gibt es in G eine Clique der Größe k?

Varianten des Cliquenproblems

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \leq |V|$. Eine k-Clique von G ist ein vollständig verbundener Teilgraph $C = (V_c, E_c)$ mit $|V_c| = k$

- **Entscheidungsproblem**
  - "Gibt es eine Lösung mit einem bestimmten Wert"
    - CLIQUE: Gibt es in G eine Clique der Größe k?
- **Berechnungsproblem**
  - Bestimme eine konkrete Lösung mit einem bestimmten Wert
    - CLIQUE_2: Bestimme eine Clique $C \subseteq G$ der Größe k

Varianten des Cliquenproblems

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \leq |V|$. Eine k-Clique von G ist ein vollständig verbundener Teilgraph $C = (V_c, E_c)$ mit $|V_c| = k$

- **Entscheidungsproblem**
  - "Gibt es eine Lösung mit einem bestimmten Wert"
    - CLIQUE: Gibt es in G eine Clique der Größe k?
- **Berechnungsproblem**
  - Bestimme eine konkrete Lösung mit einem bestimmten Wert
    - CLIQUE_2: Bestimme eine Clique $C \subseteq G$ der Größe k
- **Optimierungsprobleme**
  - Bestimme den Wert einer optimalen Lösung
    - CLIQUE_{opt}: Bestimme das größte k, so daß G eine k-Clique enthält

Varianten des Cliquenproblems

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \leq |V|$. Eine k-Clique von G ist ein vollständig verbundener Teilgraph $C = (V_c, E_c)$ mit $|V_c| = k$

- **Entscheidungsproblem**
  - "Gibt es eine Lösung mit einem bestimmten Wert"
    - CLIQUE: Gibt es in G eine Clique der Größe k?
- **Berechnungsproblem**
  - Bestimme eine konkrete Lösung mit einem bestimmten Wert
    - CLIQUE_2: Bestimme eine Clique $C \subseteq G$ der Größe k
- **Optimierungsprobleme**
  - Bestimme den Wert einer optimalen Lösung
    - CLIQUE_{opt}: Bestimme das größte k, so daß G eine k-Clique enthält
  - Berechne die optimale Lösung
    - CLIQUE_{opt_2}: Bestimme eine Clique $C \subseteq G$ mit maximaler Größe k

Problemvarianten von Clique sind gleich schwer

- **Löse $\mathbf{CLIQUE}_{opt}$ mit CLIQUE**
  - Beginne mit $k := |V|$ und teste ob es in G eine k-Clique gibt
  - Reduziere k bis der Test erfolgreich ist und gebe k aus
  - Zusatzaufwand ist linear in $|V|$

Problemvarianten von Clique sind gleich schwer

- **Löse CLIQUE$_{opt}$ mit CLIQUE**
  - Beginne mit $k := |V|$ und teste ob es in G eine k-Clique gibt
  - Reduziere k bis der Test erfolgreich ist und gebe k aus
  - Zusatzaufwand ist linear in $|V|$
- **Löse CLIQUE$_{opt_2}$ mit CLIQUE$_{opt}$**
  - Bestimme k_{opt} für G und beginne mit $E_c := E$
  - Wähle Kante $e \in E$ und teste ob es in $(V, E_c - \{e\})$ eine k_{opt}-Clique gibt
  - Ist dies der Fall, so setze $E_c := E_c - \{e\}$
  - Wiederhole dies iterativ für alle Kanten aus E
  - Die resultierende Menge E_c und die zugehörigen Ecken bilden die k_{opt}-Clique
  - Zusatzaufwand ist linear in $|E|$

Problemvarianten von Clique sind gleich schwer

- **Löse $\mathbf{CLIQUE}_{opt}$ mit $\mathbf{CLIQUE}$**
  - Beginne mit $k := |V|$ und teste ob es in G eine k-Clique gibt
  - Reduziere k bis der Test erfolgreich ist und gebe k aus
  - Zusatzaufwand ist linear in $|V|$
- **Löse $\mathbf{CLIQUE}_{opt_2}$ mit $\mathbf{CLIQUE}_{opt}$**
  - Bestimme k_{opt} für G und beginne mit $E_c := E$
  - Wähle Kante $e \in E$ und teste ob es in $(V, E_c - \{e\})$ eine k_{opt}-Clique gibt
  - Ist dies der Fall, so setze $E_c := E_c - \{e\}$
  - Wiederhole dies iterativ für alle Kanten aus E
  - Die resultierende Menge E_c und die zugehörigen Ecken bilden die k_{opt}-Clique
  - Zusatzaufwand ist linear in $|E|$

Löse analog $\mathbf{CLIQUE}_2$ mit $\mathbf{CLIQUE}$

Problemvarianten von Clique sind gleich schwer

- **Löse CLIQUE$_{opt}$ mit CLIQUE**
  - Beginne mit $k := |V|$ und teste ob es in G eine k-Clique gibt
  - Reduziere k bis der Test erfolgreich ist und gebe k aus
  - Zusatzaufwand ist linear in $|V|$
- **Löse CLIQUE$_{opt_2}$ mit CLIQUE$_{opt}$**
  - Bestimme k_{opt} für G und beginne mit $E_c := E$
  - Wähle Kante $e \in E$ und teste ob es in $(V, E_c - \{e\})$ eine k_{opt}-Clique gibt
  - Ist dies der Fall, so setze $E_c := E_c - \{e\}$
  - Wiederhole dies iterativ für alle Kanten aus E
  - Die resultierende Menge E_c und die zugehörigen Ecken bilden die k_{opt}-Clique
  - Zusatzaufwand ist linear in $|E|$

Löse analog CLIQUE$_2$ mit CLIQUE

Die Umkehrungen sind trivial

Problemvarianten von Clique sind gleich schwer

- **Löse $\mathbf{CLIQUE}_{opt}$ mit $\mathbf{CLIQUE}$**
  - Beginne mit $k := |V|$ und teste ob es in G eine k-Clique gibt
  - Reduziere k bis der Test erfolgreich ist und gebe k aus
  - Zusatzaufwand ist linear in $|V|$
- **Löse $\mathbf{CLIQUE}_{opt_2}$ mit $\mathbf{CLIQUE}_{opt}$**
  - Bestimme k_{opt} für G und beginne mit $E_c := E$
  - Wähle Kante $e \in E$ und teste ob es in $(V, E_c - \{e\})$ eine k_{opt}-Clique gibt
  - Ist dies der Fall, so setze $E_c := E_c - \{e\}$
  - Wiederhole dies iterativ für alle Kanten aus E
  - Die resultierende Menge E_c und die zugehörigen Ecken bilden die k_{opt}-Clique
  - Zusatzaufwand ist linear in $|E|$

Löse analog $\mathbf{CLIQUE}_2$ mit $\mathbf{CLIQUE}$

Die Umkehrungen sind trivial

Es reicht Entscheidungsprobleme zu analysieren

Viele schwere Probleme haben leichte Erfolgstests

- **Travelling Salesman:** Für eine gegebene Rundreise $i_1..i_n$ können die Kosten $c_{i_1 i_2} + \ldots c_{i_n i_1}$ in linearer Zeit berechnet und mit der Kostenbeschränkung B verglichen werden

Viele schwere Probleme haben leichte Erfolgstests

- **Travelling Salesman:** Für eine gegebene Rundreise $i_1..i_n$ können die Kosten $c_{i_1 i_2} + \ldots c_{i_n i_1}$ in linearer Zeit berechnet und mit der Kostenbeschränkung B verglichen werden
- **Cliquen-Problem:** Ein gegebener Teilgraph der Größe k kann in polynomieller Zeit auf Vollständigkeit überprüft werden

Viele schwere Probleme haben leichte Erfolgstests

- **Travelling Salesman:** Für eine gegebene Rundreise $i_1..i_n$ können die Kosten $c_{i_1 i_2} + \ldots c_{i_n i_1}$ in linearer Zeit berechnet und mit der Kostenbeschränkung B verglichen werden
- **Cliquen-Problem:** Ein gegebener Teilgraph der Größe k kann in polynomieller Zeit auf Vollständigkeit überprüft werden
- **Erfüllbarkeitsproblem:** Man kann in polynomieller Zeit testen, ob eine gegebene Belegung der Variablen eine Formel erfüllt

Viele schwere Probleme haben leichte Erfolgstests

- **Travelling Salesman:** Für eine gegebene Rundreise $i_1..i_n$ können die Kosten $c_{i_1 i_2} + \ldots c_{i_n i_1}$ in linearer Zeit berechnet und mit der Kostenbeschränkung B verglichen werden
- **Cliquen-Problem:** Ein gegebener Teilgraph der Größe k kann in polynomieller Zeit auf Vollständigkeit überprüft werden
- **Erfüllbarkeitsproblem:** Man kann in polynomieller Zeit testen, ob eine gegebene Belegung der Variablen eine Formel erfüllt
- **Binpacking:** Man kann in polynomieller Zeit testen, ob eine gegebene Verteilung der Gegenstände in k Verpackungsbehälter paßt

Viele schwere Probleme haben leichte Erfolgstests

- **Travelling Salesman:** Für eine gegebene Rundreise $i_1..i_n$ können die Kosten $c_{i_1 i_2} + \ldots c_{i_n i_1}$ in linearer Zeit berechnet und mit der Kostenbeschränkung B verglichen werden
- **Cliquen-Problem:** Ein gegebener Teilgraph der Größe k kann in polynomieller Zeit auf Vollständigkeit überprüft werden
- **Erfüllbarkeitsproblem:** Man kann in polynomieller Zeit testen, ob eine gegebene Belegung der Variablen eine Formel erfüllt
- **Binpacking:** Man kann in polynomieller Zeit testen, ob eine gegebene Verteilung der Gegenstände in k Verpackungsbehälter paßt
- **Zusammengesetztheitstest:** Man kann in quadratischer Zeit testen, ob eine gegebene Zahl Teiler von x (also x keine Primzahl) ist

Viele schwere Probleme haben leichte Erfolgstests

- **Travelling Salesman:** Für eine gegebene Rundreise $i_1..i_n$ können die Kosten $c_{i_1 i_2} + \ldots c_{i_n i_1}$ in linearer Zeit berechnet und mit der Kostenbeschränkung B verglichen werden
- **Cliquen-Problem:** Ein gegebener Teilgraph der Größe k kann in polynomieller Zeit auf Vollständigkeit überprüft werden
- **Erfüllbarkeitsproblem:** Man kann in polynomieller Zeit testen, ob eine gegebene Belegung der Variablen eine Formel erfüllt
- **Binpacking:** Man kann in polynomieller Zeit testen, ob eine gegebene Verteilung der Gegenstände in k Verpackungsbehälter paßt
- **Zusammengesetztheitstest:** Man kann in quadratischer Zeit testen, ob eine gegebene Zahl Teiler von x (also x keine Primzahl) ist

Nichtdeterministische Maschinen liefern polynomielle Lösung

Nichtdeterministische Lösbarkeit

- **Nichtdeterministische Turingmaschine τ**
  - Komponenten S, X, Γ, s_0, b wie bei normaler Turingmaschine
  - Zustandsüberführungsfunktion $\delta: S \times \Gamma \rightarrow 2^{S \times \Gamma \times \{r,l,h\}}$

Nichtdeterministische Lösbarkeit

- **Nichtdeterministische Turingmaschine τ**
  - Komponenten S, X, Γ, s_0, b wie bei normaler Turingmaschine
  - Zustandsüberführungsfunktion $\delta: S \times \Gamma \rightarrow 2^{S \times \Gamma \times \{r,l,h\}}$
  - Nachfolgekonfigurationsfunktion $\hat{\delta}: K_\tau \rightarrow 2^{K_\tau}$

Nichtdeterministische Lösbarkeit

- **Nichtdeterministische Turingmaschine τ**
  - Komponenten S, X, Γ, s_0, b wie bei normaler Turingmaschine
  - Zustandsüberführungsfunktion $\delta{:}S\times\Gamma \to 2^{S\times\Gamma\times\{r,l,h\}}$
  - Nachfolgekonfigurationsfunktion $\hat{\delta}{:}K_\tau \to 2^{K_\tau}$
  - Semantik $h_\tau{:}X^* \to 2^{\Gamma^*}$

    $h_\tau(w) = \perp$, wenn $\hat{\delta}$ unendliche Konfigurationsfolgen ermöglicht

Nichtdeterministische Lösbarkeit

- **Nichtdeterministische Turingmaschine τ**
  - Komponenten S, X, Γ, s_0, b wie bei normaler Turingmaschine
  - Zustandsüberführungsfunktion $\delta{:}S\times\Gamma \to 2^{S\times\Gamma\times\{r,l,h\}}$
  - Nachfolgekonfigurationsfunktion $\hat{\delta}{:}K_\tau \to 2^{K_\tau}$
  - Semantik $h_\tau{:}X^* \to 2^{\Gamma^*}$

    $h_\tau(w) = \perp$, wenn $\hat{\delta}$ unendliche Konfigurationsfolgen ermöglicht
  - **Keine Erweiterung des Berechenbarkeitsbegriffs**

Nichtdeterministische Lösbarkeit

- **Nichtdeterministische Turingmaschine τ**
  - Komponenten S, X, Γ, s_0, b wie bei normaler Turingmaschine
  - Zustandsüberführungsfunktion $\delta: S \times \Gamma \to 2^{S \times \Gamma \times \{r,l,h\}}$
  - Nachfolgekonfigurationsfunktion $\hat{\delta}: K_\tau \to 2^{K_\tau}$
  - Semantik $h_\tau: X^* \to 2^{\Gamma^*}$

    $h_\tau(w) = \perp$, wenn $\hat{\delta}$ unendliche Konfigurationsfolgen ermöglicht
  - **Keine Erweiterung des Berechenbarkeitsbegriffs**
- **Nichtdeterministische Entscheidbarkeit**
  - **τ entscheidet $M \subseteq X^*$**, falls $w \in M \Leftrightarrow 1 \in h_\tau(w)$

    "Es gibt eine akzeptierende Berechnung für w"

Nichtdeterministische Lösbarkeit

- **Nichtdeterministische Turingmaschine τ**
  - Komponenten S, X, Γ, s_0, b wie bei normaler Turingmaschine
  - Zustandsüberführungsfunktion $\delta: S \times \Gamma \to 2^{S \times \Gamma \times \{r,l,h\}}$
  - Nachfolgekonfigurationsfunktion $\hat{\delta}: K_\tau \to 2^{K_\tau}$
  - Semantik $h_\tau: X^* \to 2^{\Gamma^*}$

    $h_\tau(w) = \perp$, wenn $\hat{\delta}$ unendliche Konfigurationsfolgen ermöglicht
  - **Keine Erweiterung des Berechenbarkeitsbegriffs**

- **Nichtdeterministische Entscheidbarkeit**
  - **τ entscheidet $M \subseteq X^*$**, falls $w \in M \Leftrightarrow 1 \in h_\tau(w)$

    "Es gibt eine akzeptierende Berechnung für w"
  - Rechenzeit $nt_\tau(w) = \begin{cases} \text{minimale Länge einer akzep–tierenden Berechnung für } w & \text{falls } w \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Nichtdeterministische Lösbarkeit

- **Nichtdeterministische Turingmaschine τ**
  - Komponenten S, X, Γ, s_0, b wie bei normaler Turingmaschine
  - Zustandsüberführungsfunktion $\delta: S \times \Gamma \to 2^{S \times \Gamma \times \{r,l,h\}}$
  - Nachfolgekonfigurationsfunktion $\hat{\delta}: K_\tau \to 2^{K_\tau}$
  - Semantik $h_\tau: X^* \to 2^{\Gamma^*}$

    $h_\tau(w) = \perp$, wenn $\hat{\delta}$ unendliche Konfigurationsfolgen ermöglicht
  - **Keine Erweiterung des Berechenbarkeitsbegriffs**

- **Nichtdeterministische Entscheidbarkeit**
  - **τ entscheidet $M \subseteq X^*$**, falls $w \in M \Leftrightarrow 1 \in h_\tau(w)$

    "Es gibt eine akzeptierende Berechnung für w"
  - Rechenzeit $\boldsymbol{nt_\tau(w)} = \begin{cases} \text{minimale Länge einer akzep–tierenden Berechnung für } w & \text{falls } w \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - Zeitkomplexität $\boldsymbol{ntime_\tau(n)} = \max\{nt_\tau(w) \mid |w|=n\}$

Nichtdeterministische Lösbarkeit

- **Nichtdeterministische Turingmaschine τ**
  - Komponenten S, X, Γ, s_0, b wie bei normaler Turingmaschine
  - Zustandsüberführungsfunktion $\delta: S \times \Gamma \to 2^{S \times \Gamma \times \{r,l,h\}}$
  - Nachfolgekonfigurationsfunktion $\hat{\delta}: K_\tau \to 2^{K_\tau}$
  - Semantik $h_\tau: X^* \to 2^{\Gamma^*}$

    $h_\tau(w) = \perp$, wenn $\hat{\delta}$ unendliche Konfigurationsfolgen ermöglicht
  - **Keine Erweiterung des Berechenbarkeitsbegriffs**

- **Nichtdeterministische Entscheidbarkeit**
  - **τ entscheidet $M \subseteq X^*$**, falls $w \in M \Leftrightarrow 1 \in h_\tau(w)$

    "Es gibt eine akzeptierende Berechnung für w"
  - Rechenzeit $\boldsymbol{nt_\tau(w)} = \begin{cases} \text{minimale Länge einer akzep–tierenden Berechnung für } w & \text{falls } w \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - Zeitkomplexität $\boldsymbol{ntime_\tau(n)} = \max\{nt_\tau(w) \mid |w|=n\}$
  - Platzkomplexität $\boldsymbol{nspace_\tau(n)}$ analog definiert

Nichtdeterminismus als Raten und Verifizieren

- **Deterministische Turingmaschine mit Orakel**
  - Eingabe des Wortes w auf erstem Arbeitsband
  - Phase 1: Orakel generiert Wort w' auf zweitem Arbeitsband
  - Phase 2: τ verarbeitet w und w' deterministisch

Nichtdeterminismus als Raten und Verifizieren

- **Deterministische Turingmaschine mit Orakel**
  - Eingabe des Wortes w auf erstem Arbeitsband
  - Phase 1: Orakel generiert Wort w' auf zweitem Arbeitsband
  - Phase 2: τ verarbeitet w und w' deterministisch
  - τ entscheidet $M \subseteq X^*$, falls $\forall w, w'. h_\tau(w, w') \neq \bot$
    und $w \in M \Leftrightarrow \exists w'.\ h_\tau(w, w') = 1$

Nichtdeterminismus als Raten und Verifizieren

- **Deterministische Turingmaschine mit Orakel**
  - Eingabe des Wortes w auf erstem Arbeitsband
  - Phase 1: Orakel generiert Wort w' auf zweitem Arbeitsband
  - Phase 2: τ verarbeitet w und w' deterministisch
  - τ entscheidet $M \subseteq X^*$, falls $\forall w, w'. h_\tau(w, w') \neq \bot$
    und $w \in M \Leftrightarrow \exists w'.\ h_\tau(w, w') = 1$
  - Rechenzeit $ot_\tau(w) = \min\{t_\tau(w, w') \mid h_\tau(w, w') = 1\}$ (0 falls $w \notin M$)
    Orakel benötigt keine Rechenzeit zum Schreiben

Nichtdeterminismus als Raten und Verifizieren

- **Deterministische Turingmaschine mit Orakel**
  - Eingabe des Wortes w auf erstem Arbeitsband
  - Phase 1: Orakel generiert Wort w' auf zweitem Arbeitsband
  - Phase 2: τ verarbeitet w und w' deterministisch
  - τ entscheidet $M \subseteq X^*$, falls $\forall w, w'. h_\tau(w, w') \neq \bot$
    und $w \in M \Leftrightarrow \exists w'.\ h_\tau(w, w') = 1$
  - Rechenzeit $ot_\tau(w) = \min\{t_\tau(w, w') \mid h_\tau(w, w') = 1\}$ (0 falls $w \notin M$)
    Orakel benötigt keine Rechenzeit zum Schreiben
  - Zeitkomplexität $otime_\tau(n) = \max\{ot_\tau(w) \mid |w| = n\}$

Nichtdeterminismus als Raten und Verifizieren

- **Deterministische Turingmaschine mit Orakel**
  - Eingabe des Wortes w auf erstem Arbeitsband
  - Phase 1: Orakel generiert Wort w' auf zweitem Arbeitsband
  - Phase 2: τ verarbeitet w und w' deterministisch
  - τ entscheidet $M \subseteq X^*$, falls $\forall w, w'. h_\tau(w, w') \neq \bot$
    und $w \in M \Leftrightarrow \exists w'.\ h_\tau(w, w') = 1$
  - Rechenzeit $ot_\tau(w) = \min\{t_\tau(w, w') \mid h_\tau(w, w') = 1\}$ (0 falls $w \notin M$)
    Orakel benötigt keine Rechenzeit zum Schreiben
  - Zeitkomplexität $otime_\tau(n) = \max\{ot_\tau(w) \mid |w| = n\}$
- **NTM's und OTM's sind äquivalent**

Nichtdeterminismus als Raten und Verifizieren

- **Deterministische Turingmaschine mit Orakel**
  - Eingabe des Wortes w auf erstem Arbeitsband
  - Phase 1: Orakel generiert Wort w' auf zweitem Arbeitsband
  - Phase 2: τ verarbeitet w und w' deterministisch
  - τ entscheidet $M \subseteq X^*$, falls $\forall w, w'. h_\tau(w, w') \neq \bot$
    und $w \in M \Leftrightarrow \exists w'.\ h_\tau(w, w') = 1$
  - Rechenzeit $ot_\tau(w) = \min\{t_\tau(w, w') \mid h_\tau(w, w') = 1\}$ (0 falls $w \notin M$)
    Orakel benötigt keine Rechenzeit zum Schreiben
  - Zeitkomplexität $otime_\tau(n) = \max\{ot_\tau(w) \mid |w| = n\}$
- **NTM's und OTM's sind äquivalent**
  - OTM kann Berechnungsfolge der NTM raten und deterministisch ausführen

Nichtdeterminismus als Raten und Verifizieren

- **Deterministische Turingmaschine mit Orakel**
  - Eingabe des Wortes w auf erstem Arbeitsband
  - Phase 1: Orakel generiert Wort w' auf zweitem Arbeitsband
  - Phase 2: τ verarbeitet w und w' deterministisch
  - τ entscheidet $M \subseteq X^*$, falls $\forall w, w'. h_\tau(w, w') \neq \bot$
    und $w \in M \Leftrightarrow \exists w'.\ h_\tau(w, w') = 1$
  - Rechenzeit $ot_\tau(w) = \min\{t_\tau(w, w') \mid h_\tau(w, w') = 1\}$ (0 falls $w \notin M$)
    Orakel benötigt keine Rechenzeit zum Schreiben
  - Zeitkomplexität $otime_\tau(n) = \max\{ot_\tau(w) \mid |w| = n\}$
- **NTM's und OTM's sind äquivalent**
  - OTM kann Berechnungsfolge der NTM raten und deterministisch ausführen
  - NTM kann alle Berechnungsfolgen der OTM "parallel" ausführen

Nichtdeterminismus als Raten und Verifizieren

- **Deterministische Turingmaschine mit Orakel**
  - Eingabe des Wortes w auf erstem Arbeitsband
  - Phase 1: Orakel generiert Wort w' auf zweitem Arbeitsband
  - Phase 2: τ verarbeitet w und w' deterministisch
  - τ entscheidet $M \subseteq X^*$, falls $\forall w, w'. h_\tau(w, w') \neq \bot$
    und $w \in M \Leftrightarrow \exists w'.\ h_\tau(w, w') = 1$
  - Rechenzeit $ot_\tau(w) = \min\{t_\tau(w, w') \mid h_\tau(w, w') = 1\}$ (0 falls $w \notin M$)
    Orakel benötigt keine Rechenzeit zum Schreiben
  - Zeitkomplexität $otime_\tau(n) = \max\{ot_\tau(w) \mid |w| = n\}$
- **NTM's und OTM's sind äquivalent**
  - OTM kann Berechnungsfolge der NTM raten und deterministisch ausführen
  - NTM kann alle Berechnungsfolgen der OTM "parallel" ausführen
  - **Rechenzeit ist identisch**

Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge M hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM τ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.

Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge M hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM τ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **DTIME(f)** $= \{M \mid M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$

Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge M hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM τ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **DTIME(f)** $= \{M \mid M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge M hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM τ mit $ntime_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.

Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge M hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM τ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **DTIME(f)** $= \{M \mid M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge M hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM τ mit $ntime_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **NTIME(f)** $= \{M \mid M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$

Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge M hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM τ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **DTIME(f)** $= \{M \mid M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge M hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM τ mit $ntime_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **NTIME(f)** $= \{M \mid M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$
- **Platzkomplexität**
  - Eine Menge M hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM τ mit $space_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.

Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge M hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM τ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **DTIME(f)** $= \{M \mid M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge M hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM τ mit $ntime_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **NTIME(f)** $= \{M \mid M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$
- **Platzkomplexität**
  - Eine Menge M hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM τ mit $space_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **DSPACE(f)** $= \{M \mid M$ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$

Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge M hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM τ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **DTIME(f)** $= \{M \mid M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge M hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM τ mit $ntime_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **NTIME(f)** $= \{M \mid M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$
- **Platzkomplexität**
  - Eine Menge M hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM τ mit $space_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **DSPACE(f)** $= \{M \mid M$ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge M hat nichtdeterministische Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM τ mit $nspace_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.

Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge M hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM τ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **DTIME(f)** $= \{M \mid M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge M hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM τ mit $ntime_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **NTIME(f)** $= \{M \mid M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$
- **Platzkomplexität**
  - Eine Menge M hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM τ mit $space_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **DSPACE(f)** $= \{M \mid M$ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge M hat nichtdeterministische Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM τ mit $nspace_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **NSPACE(f)** $= \{M \mid M$ hat nichtdeterministische Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$

Komplexität von (Entscheidungs-)Problemen

- **Zeitkomplexität**
  - Eine Menge M hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM τ mit $time_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **DTIME(f)** $= \{M \mid M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge M hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM τ mit $ntime_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **NTIME(f)** $= \{M \mid M$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$
- **Platzkomplexität**
  - Eine Menge M hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine DTM τ mit $space_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **DSPACE(f)** $= \{M \mid M$ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)\ \}$
  - Eine Menge M hat nichtdeterministische Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$,
    falls es eine NTM τ mit $nspace_\tau \in \mathcal{O}(f)$ gibt, die M entscheidet.
  - **NSPACE(f)** $= \{M \mid M$ hat nichtdeterministische Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$

Konkrete Analysen werden mit abstrakten deterministischen oder nichtdeterministischen Algorithmen durchgeführt

Wichtige Komplexitätsklassen

- $\mathcal{P} = \bigcup_k DTIME(n^k)$ **: Effiziente Lösbarkeit**
  - Menge der in polynomieller Zeit lösbaren Probleme

Wichtige Komplexitätsklassen

- $\mathcal{P} = \bigcup_k DTIME(n^k)$ **: Effiziente Lösbarkeit**
  - Menge der in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
- $\mathcal{NP} = \bigcup_k NTIME(n^k)$ **:**
  - Menge der nichtdeterministisch in polynomieller Zeit lösbaren Probleme

Wichtige Komplexitätsklassen

- $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \bigcup_k DTIME(n^k)$ **: Effiziente Lösbarkeit**
  - Menge der in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
- $\boldsymbol{\mathcal{NP}} = \bigcup_k NTIME(n^k)$ **:**
  - Menge der nichtdeterministisch in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
- **Weitere Zeitkomplexitätsklassen**
  - $EXPTIME = \bigcup_k DTIME(2^{n^k})$
  - $NEXPTIME = \bigcup_k NTIME(2^{n^k})$
  - $LOGTIME = DTIME(\log_2 n)$
  - $NLOGTIME = NTIME(\log_2 n)$

Wichtige Komplexitätsklassen

- $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \bigcup_k DTIME(n^k)$ **: Effiziente Lösbarkeit**
  - Menge der in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
- $\boldsymbol{\mathcal{NP}} = \bigcup_k NTIME(n^k)$ **:**
  - Menge der nichtdeterministisch in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
- **Weitere Zeitkomplexitätsklassen**
  - $EXPTIME = \bigcup_k DTIME(2^{n^k})$
  - $NEXPTIME = \bigcup_k NTIME(2^{n^k})$
  - $LOGTIME = DTIME(\log_2 n)$
  - $NLOGTIME = NTIME(\log_2 n)$
- **Platzkomplexitätsklassen**
  - $LOGSPACE = DSPACE(\log_2 n)$
  - $NLOGSPACE = NSPACE(\log_2 n)$
  - $PSPACE = \bigcup_k DSPACE(n^k)$
  - $NPSPACE = \bigcup_k NSPACE(n^k)$
  - $EXPSPACE = \bigcup_k DSPACE(2^{n^k})$

Beispiele für Komplexitätsklassen

- $\mathcal{P}$:
  - Arithmetische Operationen, Sortieren, Matrixmultiplikation, ...

Beispiele für Komplexitätsklassen

- $\mathcal{P}$:
  - Arithmetische Operationen, Sortieren, Matrixmultiplikation, ...
- $\mathcal{NP}$:
  - Travelling Salesman, Cliquen-Problem, Erfüllbarkeitsproblem
  - Multiprozessor-Scheduling, Binpacking, Zusammengesetztheitstest

Beispiele für Komplexitätsklassen

- $\mathcal{P}$:
  - Arithmetische Operationen, Sortieren, Matrixmultiplikation, ...
- $\mathcal{NP}$:
  - Travelling Salesman, Cliquen-Problem, Erfüllbarkeitsproblem
  - Multiprozessor-Scheduling, Binpacking, Zusammengesetztheitstest
- $\mathcal{EXPTIME}$:
  - Travelling Salesman, Cliquen-Problem, Erfüllbarkeitsproblem
  - Multiprozessor-Scheduling, Binpacking, Primzahltest

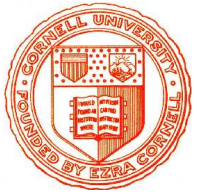
Beispiele für Komplexitätsklassen

- $\mathcal{P}$:
  - Arithmetische Operationen, Sortieren, Matrixmultiplikation, ...
- $\mathcal{NP}$:
  - Travelling Salesman, Cliquen-Problem, Erfüllbarkeitsproblem
  - Multiprozessor-Scheduling, Binpacking, Zusammengesetztheitstest
- $EXPTIME$:
  - Travelling Salesman, Cliquen-Problem, Erfüllbarkeitsproblem
  - Multiprozessor-Scheduling, Binpacking, Primzahltest
- **Komplexitätsklassenhierarchie**

  $$LOGTIME \subseteq NLOGTIME \subseteq LOGSPACE \subseteq NLOGSPACE$$
  $$\subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \subseteq PSPACE \subseteq NPSPACE$$
  $$\subseteq EXPTIME \subseteq NEXPTIME \subseteq EXPSPACE \subseteq \ldots$$

  - Es wird vermutet, daß alle Inklusionen echt sind

Theoretische Informatik



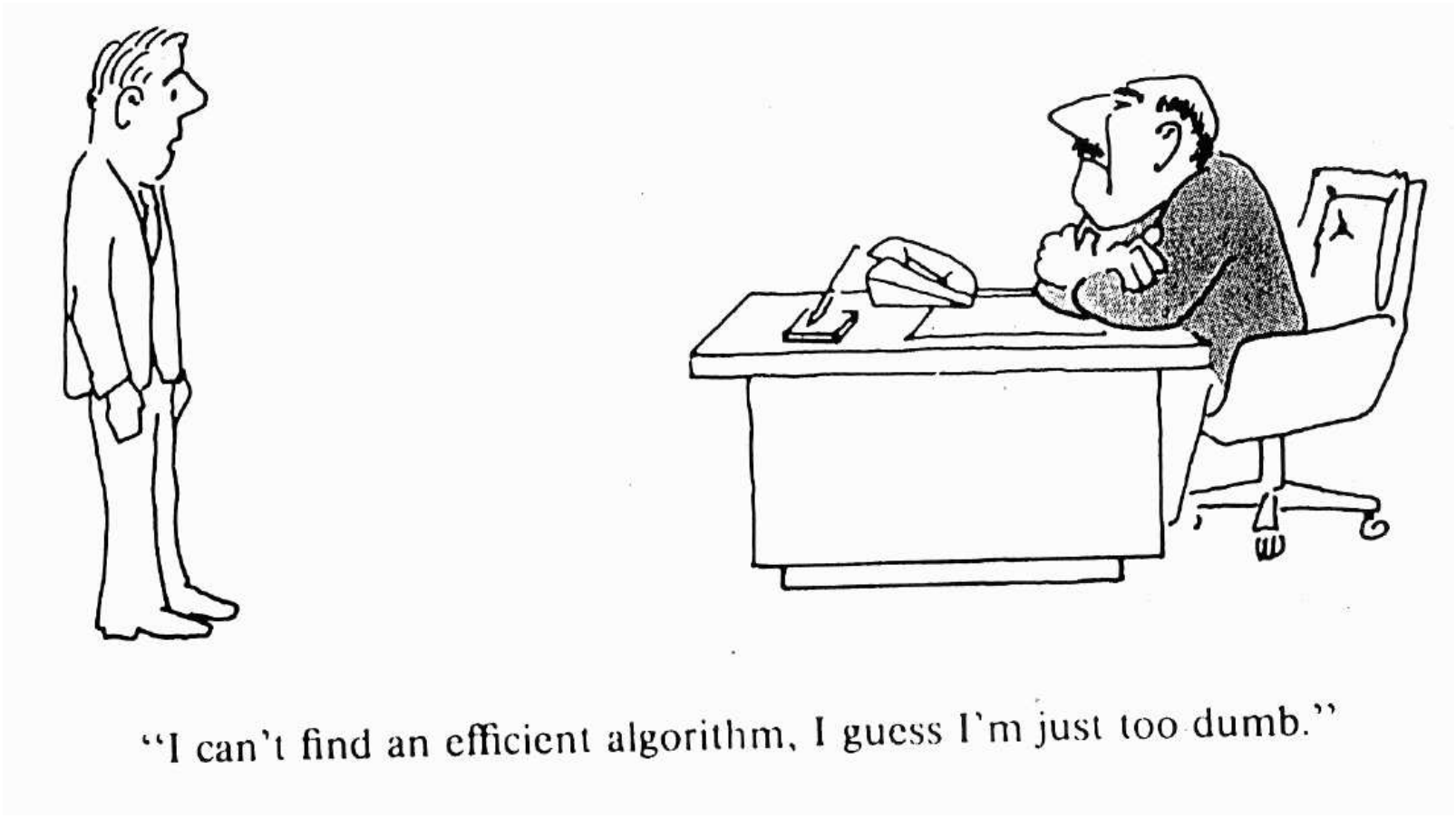
Einheit 3.4

NP-Vollständigkeit

1. Reduzierbarkeit und Vollständigkeit von Klassen
2. Der Satz von Cook
3. NP-vollständige Probleme

Das $\mathcal{P}$–$\mathcal{NP}$ Problem

Was tun, wenn ein Problem nicht effektiv lösbar zu sein scheint?

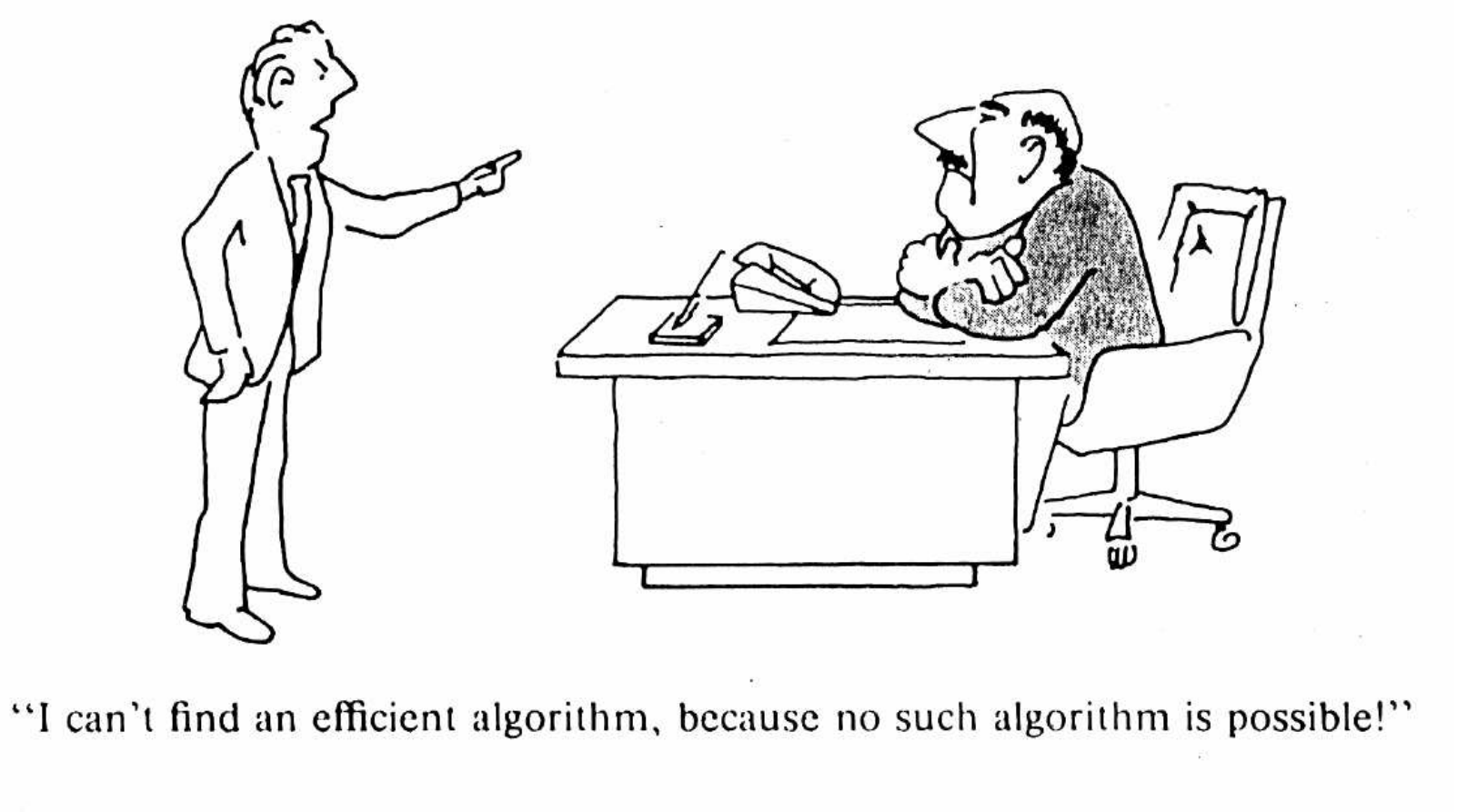


"I can't find an efficient algorithm, I guess I'm just too dumb."

Nicht empfehlenswert

Das $\mathcal{P}$–$\mathcal{NP}$ Problem

Was tun, wenn ein Problem nicht effektiv lösbar zu sein scheint?

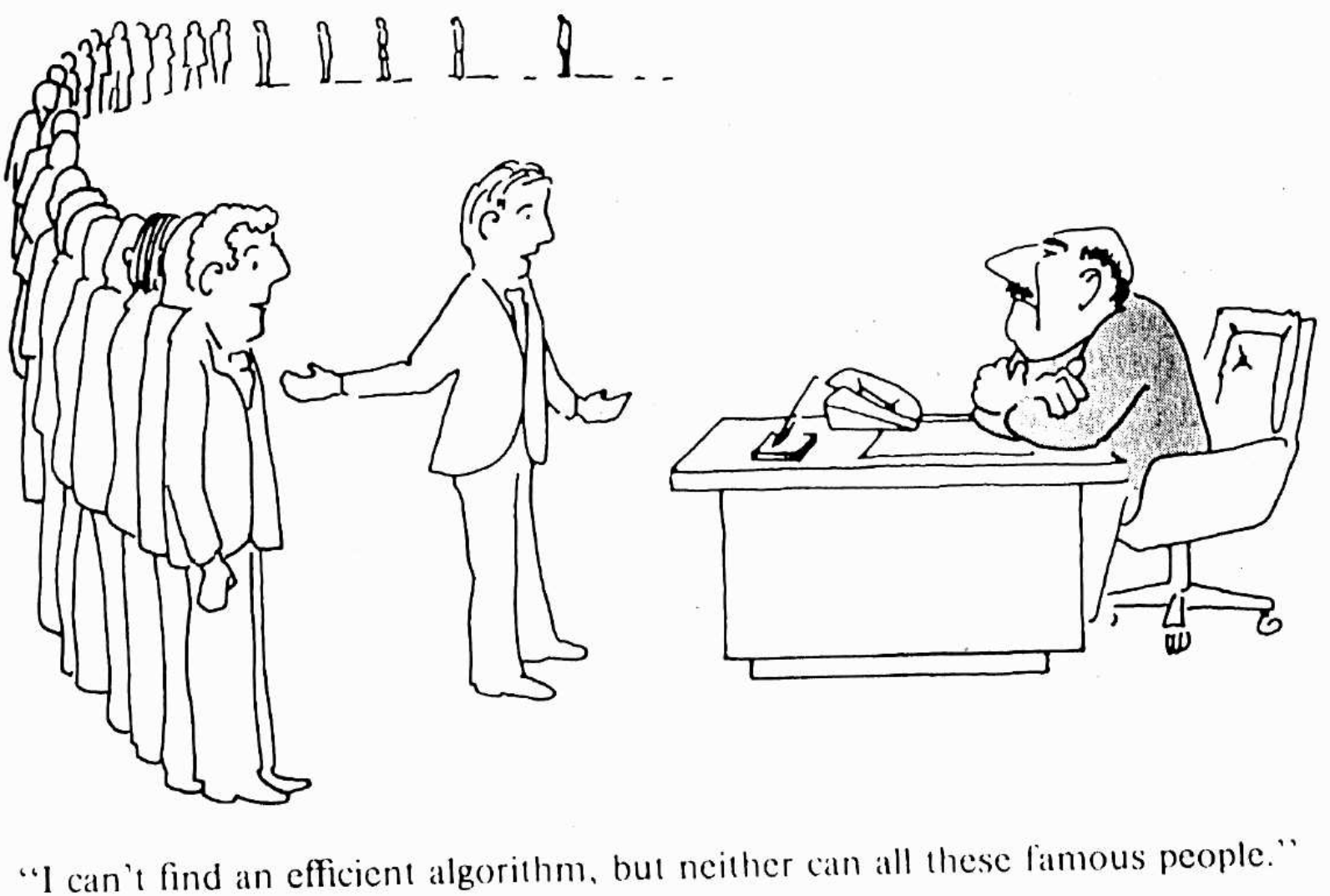


"I can't find an efficient algorithm, because no such algorithm is possible!"

Extrem schwierig nachzuweisen, wenn überhaupt

Das $\mathcal{P}$–$\mathcal{NP}$ Problem

Was tun, wenn ein Problem nicht effektiv lösbar zu sein scheint?



"I can't find an efficient algorithm, but neither can all these famous people."

Vielleicht der einzig mögliche Weg

Das $\mathcal{P}$–$\mathcal{NP}$ Problem

Gilt $\mathcal{P}=\mathcal{NP}$ oder $\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$?

- **Eines der wichtigsten offenen Probleme der TI**
  - Sind nichtdeterministisch lösbare Probleme effizient lösbar?
  - Seit mehr als 30 Jahren ungeklärt, möglicherweise unlösbar

Das $\mathcal{P}$–$\mathcal{NP}$ Problem

Gilt $\mathcal{P}=\mathcal{NP}$ oder $\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$?

- **Eines der wichtigsten offenen Probleme der TI**
  - Sind nichtdeterministisch lösbare Probleme effizient lösbar?
  - Seit mehr als 30 Jahren ungeklärt, möglicherweise unlösbar
- **Mehr als 1000 algorithmische Probleme betroffen**
  - Suchprobleme (Travelling Salesman, ...)
  - Reihenfolgenprobleme (Scheduling, Binpacking, ...)
  - Graphenprobleme (Clique, Vertex cover, ...) $\mapsto$ Operations Research
  - Logische Probleme (Erfüllbarkeit, ...) $\mapsto$ Model Checking, Hardwareverifikation
  - Zahlenprobleme (Primzahltest, ...) $\mapsto$ Kryptographie, IT Sicherheit

Das $\mathcal{P}$–$\mathcal{NP}$ Problem

Gilt $\mathcal{P}=\mathcal{NP}$ oder $\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$?

- **Eines der wichtigsten offenen Probleme der TI**
  - Sind nichtdeterministisch lösbare Probleme effizient lösbar?
  - Seit mehr als 30 Jahren ungeklärt, möglicherweise unlösbar
- **Mehr als 1000 algorithmische Probleme betroffen**
  - Suchprobleme (Travelling Salesman, ...)
  - Reihenfolgenprobleme (Scheduling, Binpacking, ...)
  - Graphenprobleme (Clique, Vertex cover, ...) $\mapsto$ Operations Research
  - Logische Probleme (Erfüllbarkeit, ...) $\mapsto$ Model Checking, Hardwareverifikation
  - Zahlenprobleme (Primzahltest, ...) $\mapsto$ Kryptographie, IT Sicherheit
- **Indizien sprechen gegen $\mathcal{P}=\mathcal{NP}$**
  - Zu viele $\mathcal{NP}$-Probleme ohne bekannte polynomielle Lösung
  - Mehr als 1000 äquivalente Probleme in der 'schwersten Teilklasse' von $\mathcal{NP}$

Wie analysiert man die Frage "$\mathcal{P}=\mathcal{NP}$ oder $\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$"?

Wie analysiert man die Frage "$\mathcal{P}=\mathcal{NP}$ oder $\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$"?

- **Untersuche die "schwierigsten" $\mathcal{NP}$-Probleme**
  - Kann man eines davon effizient lösen?
  - Wenn ja, dann gilt $\mathcal{P}=\mathcal{NP}$
  - Wenn nein, dann gibt es ein Beispiel für $\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$

Wie analysiert man die Frage "$\mathcal{P}=\mathcal{NP}$ oder $\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$"?

- **Untersuche die "schwierigsten" $\mathcal{NP}$-Probleme**
  - Kann man eines davon effizient lösen?
  - Wenn ja, dann gilt $\mathcal{P}=\mathcal{NP}$
  - Wenn nein, dann gibt es ein Beispiel für $\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$
- **Was heißt "M ist schwierigstes $\mathcal{NP}$-Problem"?**
  - Jedes andere $\mathcal{NP}$-Problem M' ist leichter als M
  - Lösungen für M' können in Lösungen für M' umgewandelt werden
  - Transformation der Lösung ist effizient

Wie analysiert man die Frage "$\mathcal{P}=\mathcal{NP}$ oder $\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$"?

- **Untersuche die "schwierigsten" $\mathcal{NP}$-Probleme**
  - Kann man eines davon effizient lösen?
  - Wenn ja, dann gilt $\mathcal{P}=\mathcal{NP}$
  - Wenn nein, dann gibt es ein Beispiel für $\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$
- **Was heißt "M ist schwierigstes $\mathcal{NP}$-Problem"?**
  - Jedes andere $\mathcal{NP}$-Problem M' ist leichter als M
  - Lösungen für M' können in Lösungen für M' umgewandelt werden
  - Transformation der Lösung ist effizient

$\Downarrow$

Polynomielle Reduktion

Polynomielle Reduzierbarkeit

- **$M \subseteq X^*$ polynomiell reduzierbar auf $M' \subseteq Y^*$**

Polynomielle Reduzierbarkeit

- **$M \subseteq X^*$ polynomiell reduzierbar auf $M' \subseteq Y^*$**
  - Es gibt eine in polynomieller Zeit berechenbare totale Funktion $f: X^* \to Y^*$ mit $M = f^{-1}(M)$

Polynomielle Reduzierbarkeit

- **$M \subseteq X^*$ polynomiell reduzierbar auf $M' \subseteq Y^*$**
  - Es gibt eine in polynomieller Zeit berechenbare totale Funktion $f: X^* \to Y^*$ mit $M = f^{-1}(M)$
  - Schreibweise: $\boldsymbol{M \leq_p M'}$

Polynomielle Reduzierbarkeit

- **$M \subseteq X^*$ polynomiell reduzierbar auf $M' \subseteq Y^*$**
  - Es gibt eine in polynomieller Zeit berechenbare totale Funktion $f: X^* \to Y^*$ mit $M = f^{-1}(M)$
  - Schreibweise: $\boldsymbol{M \leq_p M'}$
- **Reduzierbarkeit $\equiv$ geringere Komplexität**

Polynomielle Reduzierbarkeit

- **$M \subseteq X^*$ polynomiell reduzierbar auf $M' \subseteq Y^*$**
  - Es gibt eine in polynomieller Zeit berechenbare totale Funktion $f: X^* \to Y^*$ mit $M = f^{-1}(M)$
  - Schreibweise: $\boldsymbol{M \leq_p M'}$
- **Reduzierbarkeit $\equiv$ geringere Komplexität**
  - $\boldsymbol{M \leq_p M' \ \wedge \ M' \in \mathcal{P} \ \Rightarrow \ M \in \mathcal{P}}$

Polynomielle Reduzierbarkeit

- **$M \subseteq X^*$ polynomiell reduzierbar auf $M' \subseteq Y^*$**
  - Es gibt eine in polynomieller Zeit berechenbare totale Funktion $f: X^* \to Y^*$ mit $M = f^{-1}(M)$
  - Schreibweise: $\boldsymbol{M \leq_p M'}$
- **Reduzierbarkeit $\equiv$ geringere Komplexität**
  - $\boldsymbol{M \leq_p M' \ \wedge \ M' \in \mathcal{P} \ \Rightarrow \ M \in \mathcal{P}}$
  - $\boldsymbol{M \leq_p M' \ \wedge \ M' \in \mathcal{NP} \ \Rightarrow \ M \in \mathcal{NP}}$

Polynomielle Reduzierbarkeit

- **$M \subseteq X^*$ polynomiell reduzierbar auf $M' \subseteq Y^*$**
  - Es gibt eine in polynomieller Zeit berechenbare totale Funktion $f: X^* \to Y^*$ mit $M = f^{-1}(M)$
  - Schreibweise: $\boldsymbol{M \leq_p M'}$
- **Reduzierbarkeit $\equiv$ geringere Komplexität**
  - $\boldsymbol{M \leq_p M' \ \wedge \ M' \in \mathcal{P} \ \Rightarrow \ M \in \mathcal{P}}$
  - $\boldsymbol{M \leq_p M' \ \wedge \ M' \in \mathcal{NP} \ \Rightarrow \ M \in \mathcal{NP}}$

  Beweis:

  - $\chi_M(x) = 1$

Polynomielle Reduzierbarkeit

- **$M \subseteq X^*$ polynomiell reduzierbar auf $M' \subseteq Y^*$**
  - Es gibt eine in polynomieller Zeit berechenbare totale Funktion $f: X^* \to Y^*$ mit $M = f^{-1}(M)$
  - Schreibweise: $\boldsymbol{M \leq_p M'}$
- **Reduzierbarkeit $\equiv$ geringere Komplexität**
  - $\boldsymbol{M \leq_p M' \ \wedge \ M' \in \mathcal{P} \ \Rightarrow \ M \in \mathcal{P}}$
  - $\boldsymbol{M \leq_p M' \ \wedge \ M' \in \mathcal{NP} \ \Rightarrow \ M \in \mathcal{NP}}$

  Beweis:

  - $\chi_M(x) = 1 \ \Leftrightarrow \ x \in M$

Polynomielle Reduzierbarkeit

- **$M \subseteq X^*$ polynomiell reduzierbar auf $M' \subseteq Y^*$**
  - Es gibt eine in polynomieller Zeit berechenbare totale Funktion $f: X^* \to Y^*$ mit $M = f^{-1}(M)$
  - Schreibweise: $\boldsymbol{M \leq_p M'}$
- **Reduzierbarkeit $\equiv$ geringere Komplexität**
  - $\boldsymbol{M \leq_p M' \wedge M' \in \mathcal{P} \Rightarrow M \in \mathcal{P}}$
  - $\boldsymbol{M \leq_p M' \wedge M' \in \mathcal{NP} \Rightarrow M \in \mathcal{NP}}$

  Beweis:

  - $\chi_M(x) = 1 \Leftrightarrow x \in M \Leftrightarrow f(x) \in M'$

Polynomielle Reduzierbarkeit

- **$M \subseteq X^*$ polynomiell reduzierbar auf $M' \subseteq Y^*$**
  - Es gibt eine in polynomieller Zeit berechenbare totale Funktion $f: X^* \to Y^*$ mit $M = f^{-1}(M)$
  - Schreibweise: $\boldsymbol{M \leq_p M'}$
- **Reduzierbarkeit $\equiv$ geringere Komplexität**
  - $\boldsymbol{M \leq_p M' \wedge M' \in \mathcal{P} \Rightarrow M \in \mathcal{P}}$
  - $\boldsymbol{M \leq_p M' \wedge M' \in \mathcal{NP} \Rightarrow M \in \mathcal{NP}}$

  Beweis:

  - $\chi_M(x) = 1 \Leftrightarrow x \in M \Leftrightarrow f(x) \in M' \Leftrightarrow \chi_{M'}(f(x)) = 1$

Polynomielle Reduzierbarkeit

- **$M \subseteq X^*$ polynomiell reduzierbar auf $M' \subseteq Y^*$**
  - Es gibt eine in polynomieller Zeit berechenbare totale Funktion $f: X^* \to Y^*$ mit $M = f^{-1}(M)$
  - Schreibweise: $\boldsymbol{M \leq_p M'}$
- **Reduzierbarkeit $\equiv$ geringere Komplexität**
  - $\boldsymbol{M \leq_p M' \ \wedge \ M' \in \mathcal{P} \ \Rightarrow \ M \in \mathcal{P}}$
  - $\boldsymbol{M \leq_p M' \ \wedge \ M' \in \mathcal{NP} \ \Rightarrow \ M \in \mathcal{NP}}$

  Beweis:
  - $\chi_M(x) = 1 \ \Leftrightarrow \ x \in M \ \Leftrightarrow \ f(x) \in M' \ \Leftrightarrow \ \chi_{M'}(f(x)) = 1 \ \Leftrightarrow \ (\chi_{M'} \circ f)(x) = 1$

Polynomielle Reduzierbarkeit

- **$M \subseteq X^*$ polynomiell reduzierbar auf $M' \subseteq Y^*$**
  - Es gibt eine in polynomieller Zeit berechenbare totale Funktion $f: X^* \to Y^*$ mit $M = f^{-1}(M)$
  - Schreibweise: $\boldsymbol{M \leq_p M'}$
- **Reduzierbarkeit $\equiv$ geringere Komplexität**
  - $\boldsymbol{M \leq_p M' \ \wedge \ M' \in \mathcal{P} \ \Rightarrow \ M \in \mathcal{P}}$
  - $\boldsymbol{M \leq_p M' \ \wedge \ M' \in \mathcal{NP} \ \Rightarrow \ M \in \mathcal{NP}}$

  Beweis:
  - $\chi_M(x) = 1 \ \Leftrightarrow \ x \in M \ \Leftrightarrow \ f(x) \in M' \ \Leftrightarrow \ \chi_{M'}(f(x)) = 1 \ \Leftrightarrow \ (\chi_{M'} \circ f)(x) = 1$
  - $\chi_{M'} \circ f$ ist in polynomieller Zeit berechenbar, wenn dies für $\chi_{M'}$ gilt

Wichtige Graphentheoretische Definitionen

- Ein (ungerichteter) *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V endliche Menge und $E \subseteq \{ \{v, v'\} \mid v, v' \in V \wedge v \neq v' \}$.
  Ein Graph ist darstellbar als Liste $v_1, ..., v_n, \{v_{i_1}, v'_{i_1}\}, ..., \{v_{i_m}, v'_{i_m}\}$.

Wichtige Graphentheoretische Definitionen

- Ein (ungerichteter) *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V endliche Menge und $E \subseteq \{ \{v, v'\} \mid v, v' \in V \wedge v \neq v' \}$.
  Ein Graph ist darstellbar als Liste $v_1, ..., v_n, \{v_{i_1}, v'_{i_1}\}, ..., \{v_{i_m}, v'_{i_m}\}$.
- Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ ist genau dann *Subgraph* des Graphen $G = (V, E)$ ($H \sqsubseteq G$), wenn alle Ecken und Kanten von H auch Ecken bzw. Kanten in G sind:
  $$(V_H, E_H) \sqsubseteq (V, E) \ :\Leftrightarrow\ V_H \subseteq V \wedge E_H \subseteq E$$

Wichtige Graphentheoretische Definitionen

- Ein (ungerichteter) *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V endliche Menge und $E \subseteq \{ \{v, v'\} \mid v, v' \in V \wedge v \neq v' \}$.
  Ein Graph ist darstellbar als Liste $v_1, ..., v_n,\ \{v_{i_1}, v'_{i_1}\}, ..., \{v_{i_m}, v'_{i_m}\}$.
- Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ ist genau dann *Subgraph* des Graphen $G = (V, E)$ ($H \sqsubseteq G$), wenn alle Ecken und Kanten von H auch Ecken bzw. Kanten in G sind:
  $$(V_H, E_H) \sqsubseteq (V, E) \ :\Leftrightarrow\ V_H \subseteq V \wedge E_H \subseteq E$$
- $H = (V_H, E_H)$ ist *isomorph* zu $G = (V, E)$ (kurz: $H \cong G$), wenn die Graphen durch Umbenennung (bijektive Abbildung $h : V_2 \to V$) ineinander überführt werden können:
  $$(V_H, , E_H,) \cong (V, E) \ :\Leftrightarrow\ \exists h : V \to V_H, .(h \text{ bijektiv } \wedge\ E_H = \{\{h(u), h(v)\} \mid \{u, v\} \in E\})$$

Wichtige Graphentheoretische Definitionen

- Ein (ungerichteter) *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V endliche Menge und $E \subseteq \{ \{v, v'\} \mid v, v' \in V \wedge v \neq v' \}$.
  Ein Graph ist darstellbar als Liste $v_1, ..., v_n,\ \{v_{i_1}, v'_{i_1}\}, ..., \{v_{i_m}, v'_{i_m}\}$.
- Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ ist genau dann *Subgraph* des Graphen $G = (V, E)$ ($H \sqsubseteq G$), wenn alle Ecken und Kanten von H auch Ecken bzw. Kanten in G sind:
  $$(V_H, E_H) \sqsubseteq (V, E) \ :\Leftrightarrow\ V_H \subseteq V \wedge E_H \subseteq E$$
- $H = (V_H, E_H)$ ist *isomorph* zu $G = (V, E)$ (kurz: $H \cong G$), wenn die Graphen durch Umbenennung (bijektive Abbildung $h : V_2 \to V$) ineinander überführt werden können:
  $$(V_H, , E_H,) \cong (V, E) \ :\Leftrightarrow\ \exists h : V \to V_H, .(h \text{ bijektiv } \wedge\ E_H = \{\{h(u), h(v)\} \mid \{u, v\} \in E\})$$
- Die *Größe* $|G|$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl $|E|$ seiner Kanten.

Wichtige Graphentheoretische Definitionen

- Ein (ungerichteter) *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V endliche Menge und $E \subseteq \{\, \{v, v'\} \mid v, v' \in V \wedge v \neq v' \,\}$.
  Ein Graph ist darstellbar als Liste $v_1, ..., v_n,\ \{v_{i_1}, v'_{i_1}\}, ..., \{v_{i_m}, v'_{i_m}\}$.
- Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ ist genau dann *Subgraph* des Graphen $G = (V, E)$ ($H \sqsubseteq G$), wenn alle Ecken und Kanten von H auch Ecken bzw. Kanten in G sind:
  $$(V_H, E_H) \sqsubseteq (V, E) \ :\Leftrightarrow\ V_H \subseteq V \wedge E_H \subseteq E$$
- $H = (V_H, E_H)$ ist *isomorph* zu $G = (V, E)$ (kurz: $H \cong G$), wenn die Graphen durch Umbenennung (bijektive Abbildung $h : V_2 \to V$) ineinander überführt werden können:
  $$(V_H, , E_H,) \cong (V, E) \ :\Leftrightarrow\ \exists h : V \to V_H, .(h \text{ bijektiv } \wedge\ E_H = \{\{h(u), h(v)\} \mid \{u, v\} \in E\})$$
- Die *Größe* $|G|$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl $|E|$ seiner Kanten.
- Der *Komplementärgraph* des Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $G^c = (V, E^c)$ mit $E^c = \{\, \{v, v'\} \mid v, v' \in V \,\} - E$.

Wichtige Graphentheoretische Definitionen

- Ein (ungerichteter) *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V endliche Menge und $E \subseteq \{\, \{v, v'\} \mid v, v' \in V \wedge v \neq v' \,\}$.
  Ein Graph ist darstellbar als Liste $v_1, ..., v_n,\ \{v_{i_1}, v'_{i_1}\}, ..., \{v_{i_m}, v'_{i_m}\}$.
- Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ ist genau dann *Subgraph* des Graphen $G = (V, E)$ ($H \sqsubseteq G$), wenn alle Ecken und Kanten von H auch Ecken bzw. Kanten in G sind:
  $$(V_H, E_H) \sqsubseteq (V, E) \ :\Leftrightarrow\ V_H \subseteq V \wedge E_H \subseteq E$$
- $H = (V_H, E_H)$ ist *isomorph* zu $G = (V, E)$ (kurz: $H \cong G$), wenn die Graphen durch Umbenennung (bijektive Abbildung $h : V_2 \to V$) ineinander überführt werden können:
  $$(V_H, , E_H,) \cong (V, E) \ :\Leftrightarrow\ \exists h : V \to V_H, .(h \text{ bijektiv } \wedge\ E_H = \{\{h(u), h(v)\} \mid \{u, v\} \in E\})$$
- Die *Größe* $|G|$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl $|E|$ seiner Kanten.
- Der *Komplementärgraph* des Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $G^c = (V, E^c)$ mit $E^c = \{\, \{v, v'\} \mid v, v' \in V \,\} - E$.
- Eine *Clique* der Größe k im Graphen $G = (V, E)$ ist eine vollständig verbundene Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $|V| = k$. (Dabei heißt *vollständig verbunden*: $\forall v, v' \in V'.\, v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E$)

Wichtige Graphentheoretische Definitionen

- Ein (ungerichteter) *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V endliche Menge und $E \subseteq \{\, \{v, v'\} \mid v, v' \in V \wedge v \neq v' \,\}$.
  Ein Graph ist darstellbar als Liste $v_1, ..., v_n,\ \{v_{i_1}, v'_{i_1}\}, ..., \{v_{i_m}, v'_{i_m}\}$.
- Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ ist genau dann *Subgraph* des Graphen $G = (V, E)$ ($H \sqsubseteq G$), wenn alle Ecken und Kanten von H auch Ecken bzw. Kanten in G sind:
  $$(V_H, E_H) \sqsubseteq (V, E) \ :\Leftrightarrow\ V_H \subseteq V \wedge E_H \subseteq E$$
- $H = (V_H, E_H)$ ist *isomorph* zu $G = (V, E)$ (kurz: $H \cong G$), wenn die Graphen durch Umbenennung (bijektive Abbildung $h : V_2 \to V$) ineinander überführt werden können:
  $$(V_H, , E_H,) \cong (V, E) \ :\Leftrightarrow\ \exists h : V \to V_H, .(h \text{ bijektiv } \wedge\ E_H = \{\{h(u), h(v)\} \mid \{u, v\} \in E\})$$
- Die *Größe* $|G|$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl $|E|$ seiner Kanten.
- Der *Komplementärgraph* des Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $G^c = (V, E^c)$ mit $E^c = \{\, \{v, v'\} \mid v, v' \in V \,\} - E$.
- Eine *Clique* der Größe k im Graphen $G = (V, E)$ ist eine vollständig verbundene Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $|V| = k$. (Dabei heißt *vollständig verbunden*: $\forall v, v' \in V'.\, v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E$)
- Eine *Knotenüberdeckung* (Vertex cover) des Graphen $G = (V, E)$ ist eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit der Eigenschaft $\forall \{v, v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$

Wichtige Graphentheoretische Definitionen

- Ein (ungerichteter) *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V endliche Menge und $E \subseteq \{\, \{v, v'\} \mid v, v' \in V \wedge v \neq v' \,\}$.
  Ein Graph ist darstellbar als Liste $v_1, ..., v_n,\ \{v_{i_1}, v'_{i_1}\}, ..., \{v_{i_m}, v'_{i_m}\}$.
- Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ ist genau dann *Subgraph* des Graphen $G = (V, E)$ ($H \sqsubseteq G$), wenn alle Ecken und Kanten von H auch Ecken bzw. Kanten in G sind:
  $$(V_H, E_H) \sqsubseteq (V, E) \ :\Leftrightarrow\ V_H \subseteq V \wedge E_H \subseteq E$$
- $H = (V_H, E_H)$ ist *isomorph* zu $G = (V, E)$ (kurz: $H \cong G$), wenn die Graphen durch Umbenennung (bijektive Abbildung $h : V_2 \to V$) ineinander überführt werden können:
  $$(V_H, , E_H,) \cong (V, E) \ :\Leftrightarrow\ \exists h : V \to V_H, .(h \text{ bijektiv } \wedge\ E_H = \{\{h(u), h(v)\} \mid \{u, v\} \in E\})$$
- Die *Größe* $|G|$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl $|E|$ seiner Kanten.
- Der *Komplementärgraph* des Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $G^c = (V, E^c)$ mit $E^c = \{\, \{v, v'\} \mid v, v' \in V \,\} - E$.
- Eine *Clique* der Größe k im Graphen $G = (V, E)$ ist eine vollständig verbundene Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $|V| = k$. (Dabei heißt *vollständig verbunden*: $\forall v, v' \in V'.\, v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E$)
- Eine *Knotenüberdeckung* (Vertex cover) des Graphen $G = (V, E)$ ist eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit der Eigenschaft $\forall \{v, v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$
- Ein *Hamilton'scher Kreis* im Graphen $G = (V, E)$ ist ein Kreis, der nur aus Kanten aus E besteht und jeden Knoten genau einmal berührt.
  (D.h. eine Permutation $\pi : \{1..n\} \to \{1..n\}$ mit $\forall i < n.\ \{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\} \in E \wedge \{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\} \in E$)

Wichtige Graphentheoretische Definitionen

- Ein (ungerichteter) *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V endliche Menge und $E \subseteq \{ \{v, v'\} \mid v, v' \in V \wedge v \neq v' \}$.
  Ein Graph ist darstellbar als Liste $v_1, ..., v_n,\ \{v_{i_1}, v'_{i_1}\}, ..., \{v_{i_m}, v'_{i_m}\}$.
- Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ ist genau dann *Subgraph* des Graphen $G = (V, E)$ ($H \sqsubseteq G$), wenn alle Ecken und Kanten von H auch Ecken bzw. Kanten in G sind:
  $(V_H, E_H) \sqsubseteq (V, E) \ :\Leftrightarrow\ V_H \subseteq V \wedge E_H \subseteq E$
- $H = (V_H, E_H)$ ist *isomorph* zu $G = (V, E)$ (kurz: $H \cong G$), wenn die Graphen durch Umbenennung (bijektive Abbildung $h : V_2 \to V$) ineinander überführt werden können:
  $(V_H, , E_H,) \cong (V, E) \ :\Leftrightarrow\ \exists h : V \to V_H, .(h \text{ bijektiv } \wedge\ E_H = \{\{h(u), h(v)\} \mid \{u, v\} \in E\})$
- Die *Größe* $|G|$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl $|E|$ seiner Kanten.
- Der *Komplementärgraph* des Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $G^c = (V, E^c)$ mit $E^c = \{ \{v, v'\} \mid v, v' \in V \} - E$.
- Eine *Clique* der Größe k im Graphen $G = (V, E)$ ist eine vollständig verbundene Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $|V| = k$. (Dabei heißt *vollständig verbunden*: $\forall v, v' \in V'. v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E$)
- Eine *Knotenüberdeckung* (Vertex cover) des Graphen $G = (V, E)$ ist eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit der Eigenschaft $\forall \{v, v'\} \in E. v \in V' \vee v' \in V'$
- Ein *Hamilton'scher Kreis* im Graphen $G = (V, E)$ ist ein Kreis, der nur aus Kanten aus E besteht und jeden Knoten genau einmal berührt.
  (D.h. eine Permutation $\pi : \{1..n\} \to \{1..n\}$ mit $\forall i < n. \{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\} \in E \wedge \{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\} \in E$)
- Ein *gerichteter Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V endliche Menge und $E \subseteq V \times V$.
  Ein *Hamilton'scher Kreis* im gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist ein gerichteter Kreis, der nur aus Kanten aus E besteht und jeden Knoten genau einmal berührt.

Polynomielle Reduktion auf Graphenproblemen

- **Cliquen Problem**
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es in G eine Clique der Größe k?

Polynomielle Reduktion auf Graphenproblemen

- **Cliquen Problem**
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es in G eine Clique der Größe k?

$$\boldsymbol{CLIQUE} = \{\ (G,k) \mid G = (V,E) \text{ Graph } \wedge\ (\exists V_c \subseteq V.\ |V_c| \geq k \wedge V_c \text{ is Clique in } G)\ \}$$

Polynomielle Reduktion auf Graphenproblemen

- **Cliquen Problem**
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es in G eine Clique der Größe k?

$$\boldsymbol{CLIQUE} = \{\ (G,k) \mid G = (V,E) \text{ Graph } \wedge\ (\exists V_c \subseteq V.\ |V_c| \geq k \wedge V_c \text{ is Clique in } G)\ \}$$

- **Vertex Cover Problem**
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es eine Teilmenge $V' \subseteq V$ mit höchstens k Elementen, so daß aus jeder Kante in G mindestens eine Ecke in V' liegt?

Polynomielle Reduktion auf Graphenproblemen

- **Cliquen Problem**
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es in G eine Clique der Größe k?

  $$\boldsymbol{CLIQUE} = \{ (G,k) \mid G = (V,E) \text{ Graph } \wedge\ (\exists V_c \subseteq V.\ |V_c| \geq k \wedge\ V_c \text{ is Clique in } G) \}$$

- **Vertex Cover Problem**
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es eine Teilmenge $V' \subseteq V$ mit höchstens k Elementen, so daß aus jeder Kante in G mindestens eine Ecke in V' liegt?

  $$\boldsymbol{VC} = \{ (G,k) \mid G \text{ Graph } \wedge\ (\exists V' \subseteq V.\ |V'| \leq k \wedge\ V' \text{ ist Knotenüberdeckung von } G) \}$$

Reduzierbarkeit: Clique $\leq_p$ Vertex Cover

- **Analyse der Eigenschaften**

Reduzierbarkeit: Clique $\leq_p$ Vertex Cover

- **Analyse der Eigenschaften**

  V' Knotenüberdeckung von G

Reduzierbarkeit: Clique $\leq_p$ Vertex Cover

- **Analyse der Eigenschaften**

  V' Knotenüberdeckung von G

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$

Reduzierbarkeit: Clique $\leq_p$ Vertex Cover

- **Analyse der Eigenschaften**

  V' Knotenüberdeckung von G

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ \{v, v'\} \cap V' \neq \emptyset$

Reduzierbarkeit: Clique $\leq_p$ Vertex Cover

- **Analyse der Eigenschaften**

  V' Knotenüberdeckung von G

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ \{v, v'\} \cap V' \neq \emptyset$

  $\Leftrightarrow \forall v, v' \in V - V'.\ \{v, v'\} \notin E$

Reduzierbarkeit: Clique $\leq_p$ Vertex Cover

- **Analyse der Eigenschaften**

  V' Knotenüberdeckung von G

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ \{v, v'\} \cap V' \neq \emptyset$

  $\Leftrightarrow \forall v, v' \in V - V'.\ \{v, v'\} \notin E$

  $\Leftrightarrow \forall v, v' \in V - V'.\ v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E^c := \{\ \{v, v'\} \subseteq V \mid v \neq v'\} - E$

Reduzierbarkeit: Clique $\leq_p$ Vertex Cover

- **Analyse der Eigenschaften**

  V' Knotenüberdeckung von G

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ \{v, v'\} \cap V' \neq \emptyset$

  $\Leftrightarrow \forall v, v' \in V - V'.\ \{v, v'\} \notin E$

  $\Leftrightarrow \forall v, v' \in V - V'.\ v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E^c := \{\ \{v, v'\} \subseteq V \mid v \neq v'\} - E$

  $\Leftrightarrow$ $V - V'$ ist Clique im Komplementgraphen $G^c = (V, E^c)$

Reduzierbarkeit: Clique $\leq_p$ Vertex Cover

- **Analyse der Eigenschaften**

  V' Knotenüberdeckung von G

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ \{v, v'\} \cap V' \neq \emptyset$

  $\Leftrightarrow \forall v, v' \in V - V'.\ \{v, v'\} \notin E$

  $\Leftrightarrow \forall v, v' \in V - V'.\ v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E^c := \{\ \{v, v'\} \subseteq V \mid v \neq v'\} - E$

  $\Leftrightarrow$ $V - V'$ ist Clique im Komplementgraphen $G^c = (V, E^c)$

- **Transformation der Probleme** (Vertausche G und G^c)

Reduzierbarkeit: Clique $\leq_p$ Vertex Cover

- **Analyse der Eigenschaften**

  V' Knotenüberdeckung von G

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ \{v, v'\} \cap V' \neq \emptyset$

  $\Leftrightarrow \forall v, v' \in V - V'.\ \{v, v'\} \notin E$

  $\Leftrightarrow \forall v, v' \in V - V'.\ v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E^c := \{\ \{v, v'\} \subseteq V \mid v \neq v'\} - E$

  $\Leftrightarrow$ $V - V'$ ist Clique im Komplementgraphen $G^c = (V, E^c)$

- **Transformation der Probleme** (Vertausche G und G^c)

  $(G, k) \in CLIQUE$

Reduzierbarkeit: Clique $\leq_p$ Vertex Cover

- **Analyse der Eigenschaften**

  V' Knotenüberdeckung von G

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ \{v, v'\} \cap V' \neq \emptyset$

  $\Leftrightarrow \forall v, v' \in V - V'.\ \{v, v'\} \notin E$

  $\Leftrightarrow \forall v, v' \in V - V'.\ v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E^c := \{\ \{v, v'\} \subseteq V \mid v \neq v'\} - E$

  $\Leftrightarrow$ $V - V'$ ist Clique im Komplementgraphen $G^c = (V, E^c)$

- **Transformation der Probleme** (Vertausche G und G^c)

  $(G, k) \in CLIQUE$

  $\Leftrightarrow$ G hat Clique V_c der Mindestgröße k

Reduzierbarkeit: Clique $\leq_p$ Vertex Cover

- **Analyse der Eigenschaften**

  V' Knotenüberdeckung von G

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ \{v, v'\} \cap V' \neq \emptyset$

  $\Leftrightarrow \forall v, v' \in V - V'.\ \{v, v'\} \notin E$

  $\Leftrightarrow \forall v, v' \in V - V'.\ v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E^c := \{\ \{v, v'\} \subseteq V \mid v \neq v'\} - E$

  $\Leftrightarrow$ $V - V'$ ist Clique im Komplementgraphen $G^c = (V, E^c)$

- **Transformation der Probleme** (Vertausche G und G^c)

  $(G, k) \in CLIQUE$

  $\Leftrightarrow$ G hat Clique V_c der Mindestgröße k

  $\Leftrightarrow$ G^c hat Knotenüberdeckung $V' = V - V_c$ der Maximalgröße $|V| - k$

Reduzierbarkeit: Clique $\leq_p$ Vertex Cover

- **Analyse der Eigenschaften**

  V' Knotenüberdeckung von G

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$

  $\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E.\ \{v, v'\} \cap V' \neq \emptyset$

  $\Leftrightarrow \forall v, v' \in V - V'.\ \{v, v'\} \notin E$

  $\Leftrightarrow \forall v, v' \in V - V'.\ v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E^c := \{\ \{v, v'\} \subseteq V \mid v \neq v'\} - E$

  $\Leftrightarrow$ $V - V'$ ist Clique im Komplementgraphen $G^c = (V, E^c)$

- **Transformation der Probleme** (Vertausche G und G^c)

  $(G, k) \in CLIQUE$

  $\Leftrightarrow$ G hat Clique V_c der Mindestgröße k

  $\Leftrightarrow$ G^c hat Knotenüberdeckung $V' = V - V_c$ der Maximalgröße $|V| - k$

  $\Leftrightarrow$ $(G^c, |V| - k) \in VC$

Reduzierbarkeit: Clique $\leq_p$ Vertex Cover

- **Analyse der Eigenschaften**

  V' Knotenüberdeckung von G

  $\Leftrightarrow \forall \{v,v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$

  $\Leftrightarrow \forall \{v,v'\} \in E.\ \{v,v'\} \cap V' \neq \emptyset$

  $\Leftrightarrow \forall v,v' \in V - V'.\ \{v,v'\} \notin E$

  $\Leftrightarrow \forall v,v' \in V - V'.\ v \neq v' \Rightarrow \{v,v'\} \in E^c := \{\ \{v,v'\} \subseteq V \mid v \neq v'\} - E$

  $\Leftrightarrow$ $V - V'$ ist Clique im Komplementgraphen $G^c = (V, E^c)$

- **Transformation der Probleme** (Vertausche G und G^c)

  $(G,k) \in CLIQUE$

  $\Leftrightarrow$ G hat Clique V_c der Mindestgröße k

  $\Leftrightarrow$ G^c hat Knotenüberdeckung $V' = V - V_c$ der Maximalgröße $|V| - k$

  $\Leftrightarrow$ $(G^c, |V| - k) \in VC$

  Wähle $f(G,k) := (G^c, |V| - k)$

Reduzierbarkeit: Clique $\leq_p$ Vertex Cover

- **Analyse der Eigenschaften**

  V' Knotenüberdeckung von G

  $\Leftrightarrow \forall \{v,v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$

  $\Leftrightarrow \forall \{v,v'\} \in E.\ \{v,v'\} \cap V' \neq \emptyset$

  $\Leftrightarrow \forall v,v' \in V - V'.\ \{v,v'\} \notin E$

  $\Leftrightarrow \forall v,v' \in V - V'.\ v \neq v' \Rightarrow \{v,v'\} \in E^c := \{\ \{v,v'\} \subseteq V \mid v \neq v'\} - E$

  $\Leftrightarrow$ $V - V'$ ist Clique im Komplementgraphen $G^c = (V, E^c)$

- **Transformation der Probleme** (Vertausche G und G^c)

  $(G,k) \in CLIQUE$

  $\Leftrightarrow$ G hat Clique V_c der Mindestgröße k

  $\Leftrightarrow$ G^c hat Knotenüberdeckung $V' = V - V_c$ der Maximalgröße $|V| - k$

  $\Leftrightarrow$ $(G^c, |V| - k) \in VC$

  Wähle $f(G,k) := (G^c, |V| - k)$

  f in polynomieller Zeit berechenbar und $CLIQUE = f^{-1}(VC)$ $\surd$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **$\mathcal{NP}$-hart: nicht leichter als $\mathcal{NP}$**

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **$\mathcal{NP}$-hart: nicht leichter als $\mathcal{NP}$**
  - $M' \subseteq X^*$ ist $\mathcal{NP}$-hart, wenn $M \leq_p M'$ für alle $M \in \mathcal{NP}$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **$\mathcal{NP}$-hart: nicht leichter als $\mathcal{NP}$**
  - $M' \subseteq X^*$ ist $\mathcal{NP}$-hart, wenn $M \leq_p M'$ für alle $M \in \mathcal{NP}$
- **$\mathcal{NP}$-vollständig: das Schwierigste in $\mathcal{NP}$**

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **$\mathcal{NP}$-hart: nicht leichter als $\mathcal{NP}$**
  - $M' \subseteq X^*$ ist $\mathcal{NP}$-hart, wenn $M \leq_p M'$ für alle $M \in \mathcal{NP}$
- **$\mathcal{NP}$-vollständig: das Schwierigste in $\mathcal{NP}$**
  - $M \subseteq X^*$ ist $\mathcal{NP}$-vollständig, wenn $M \in \mathcal{NP}$ und M $\mathcal{NP}$-hart

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **$\mathcal{NP}$-hart: nicht leichter als $\mathcal{NP}$**
  - $M' \subseteq X^*$ ist $\mathcal{NP}$-hart, wenn $M \leq_p M'$ für alle $M \in \mathcal{NP}$
- **$\mathcal{NP}$-vollständig: das Schwierigste in $\mathcal{NP}$**
  - $M \subseteq X^*$ ist $\mathcal{NP}$-vollständig, wenn $M \in \mathcal{NP}$ und M $\mathcal{NP}$-hart
  - Schreibweise: $M \in \mathcal{NPC}$

Konsequenzen von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Alle $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme sind äquivalent**

Konsequenzen von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Alle $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme sind äquivalent**
  - $M, M' \in \mathcal{NPC} \;\Rightarrow\; M' \leq_p M \;\wedge\; M \leq_p M'$

Konsequenzen von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Alle $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme sind äquivalent**
  - $M, M' \in \mathcal{NPC} \;\Rightarrow\; M' \leq_p M \;\wedge\; M \leq_p M'$
- **$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit ist leicht nachweisbar, wenn ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem bekannt ist**

Konsequenzen von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Alle $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme sind äquivalent**
  - $M, M' \in \mathcal{NPC} \;\Rightarrow\; M' \leq_p M \;\wedge\; M \leq_p M'$
- **$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit ist leicht nachweisbar, wenn ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem bekannt ist**
  - $M \in \mathcal{NPC} \;\Leftrightarrow\; M \in \mathcal{NP} \;\wedge\; \exists M' \in \mathcal{NPC}.\, M' \leq_p M$

Konsequenzen von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Alle $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme sind äquivalent**
  - $M, M' \in \mathcal{NPC} \;\Rightarrow\; M' \leq_p M \;\wedge\; M \leq_p M'$
- **$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit ist leicht nachweisbar, wenn ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem bekannt ist**
  - $M \in \mathcal{NPC} \;\Leftrightarrow\; M \in \mathcal{NP} \;\wedge\; \exists M' \in \mathcal{NPC}.\, M' \leq_p M$
  - $M \in \mathcal{NPC} \;\Leftrightarrow\; \exists M' \in \mathcal{NPC}.\; M' \leq_p M \;\wedge\; M \leq_p M'$

Konsequenzen von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Alle $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme sind äquivalent**
  - $M, M' \in \mathcal{NPC} \;\Rightarrow\; M' \leq_p M \;\wedge\; M \leq_p M'$
- **$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit ist leicht nachweisbar, wenn ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem bekannt ist**
  - $M \in \mathcal{NPC} \;\Leftrightarrow\; M \in \mathcal{NP} \;\wedge\; \exists M' \in \mathcal{NPC}.\, M' \leq_p M$
  - $M \in \mathcal{NPC} \;\Leftrightarrow\; \exists M' \in \mathcal{NPC}.\, M' \leq_p M \;\wedge\; M \leq_p M'$
- **$\mathcal{NP}$-vollständige Probleme entscheiden "$\mathcal{P} = \mathcal{NP}$"**

Konsequenzen von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Alle $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme sind äquivalent**
  - $M, M' \in \mathcal{NPC} \;\Rightarrow\; M' \leq_p M \;\wedge\; M \leq_p M'$
- **$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit ist leicht nachweisbar, wenn ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem bekannt ist**
  - $M \in \mathcal{NPC} \;\Leftrightarrow\; M \in \mathcal{NP} \;\wedge\; \exists M' \in \mathcal{NPC}.\, M' \leq_p M$
  - $M \in \mathcal{NPC} \;\Leftrightarrow\; \exists M' \in \mathcal{NPC}.\, M' \leq_p M \;\wedge\; M \leq_p M'$
- **$\mathcal{NP}$-vollständige Probleme entscheiden "$\mathcal{P} = \mathcal{NP}$"**
  - $\mathcal{P} = \mathcal{NP} \;\Leftrightarrow\; \exists M \in \mathcal{NPC}.\, M \in \mathcal{P}$
  - Ist $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ dann sind alle $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme in $\mathcal{P}$

Konsequenzen von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Alle $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme sind äquivalent**
  - $M, M' \in \mathcal{NPC} \;\Rightarrow\; M' \leq_p M \;\wedge\; M \leq_p M'$
- **$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit ist leicht nachweisbar, wenn ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem bekannt ist**
  - $M \in \mathcal{NPC} \;\Leftrightarrow\; M \in \mathcal{NP} \;\wedge\; \exists M' \in \mathcal{NPC}.\, M' \leq_p M$
  - $M \in \mathcal{NPC} \;\Leftrightarrow\; \exists M' \in \mathcal{NPC}.\, M' \leq_p M \;\wedge\; M \leq_p M'$
- **$\mathcal{NP}$-vollständige Probleme entscheiden "$\mathcal{P} = \mathcal{NP}$"**
  - $\mathcal{P} = \mathcal{NP} \;\Leftrightarrow\; \exists M \in \mathcal{NPC}.\, M \in \mathcal{P}$
  - Ist $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ dann sind alle $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme in $\mathcal{P}$
  - $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP} \;\Leftrightarrow\; \exists M \in \mathcal{NPC}.\, M \notin \mathcal{P}$
  - Ist $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ dann sind alle $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme nicht in $\mathcal{P}$

Wie zeigt man $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit?

- **Codiere Berechnung einer NTM in einem Problem L**

Wie zeigt man $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit?

- **Codiere Berechnung einer NTM in einem Problem L**
  - Wenn Berechnung positiv ausfällt, soll Problem lösbar sein
  - Wenn Berechnung negativ ausfällt, soll Problem unlösbar sein

Wie zeigt man $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit?

- **Codiere Berechnung einer NTM in einem Problem L**
  - Wenn Berechnung positiv ausfällt, soll Problem lösbar sein
  - Wenn Berechnung negativ ausfällt, soll Problem unlösbar sein
  - Ergibt $M \leq_p L$ für das von der NTM entschiedene Problem M

Wie zeigt man $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit?

- **Codiere Berechnung einer NTM in einem Problem L**
  - Wenn Berechnung positiv ausfällt, soll Problem lösbar sein
  - Wenn Berechnung negativ ausfällt, soll Problem unlösbar sein
  - Ergibt $M \leq_p L$ für das von der NTM entschiedene Problem M
- **Problem L muß alle polynomiellen NTMs codieren**

Wie zeigt man $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit?

- **Codiere Berechnung einer NTM in einem Problem L**
  - Wenn Berechnung positiv ausfällt, soll Problem lösbar sein
  - Wenn Berechnung negativ ausfällt, soll Problem unlösbar sein
  - Ergibt $M \leq_p L$ für das von der NTM entschiedene Problem M
- **Problem L muß alle polynomiellen NTMs codieren**
  - Ergibt $M \leq_p L$ für jedes $M \in \mathcal{NP}$

Wie zeigt man $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit?

- **Codiere Berechnung einer NTM in einem Problem L**
  - Wenn Berechnung positiv ausfällt, soll Problem lösbar sein
  - Wenn Berechnung negativ ausfällt, soll Problem unlösbar sein
  - Ergibt $M \leq_p L$ für das von der NTM entschiedene Problem M
- **Problem L muß alle polynomiellen NTMs codieren**
  - Ergibt $M \leq_p L$ für jedes $M \in \mathcal{NP}$
- **Welches Problem ist ausdrucksstark genug?**

Wie zeigt man $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit?

- **Codiere Berechnung einer NTM in einem Problem L**
  - Wenn Berechnung positiv ausfällt, soll Problem lösbar sein
  - Wenn Berechnung negativ ausfällt, soll Problem unlösbar sein
  - Ergibt $M \leq_p L$ für das von der NTM entschiedene Problem M
- **Problem L muß alle polynomiellen NTMs codieren**
  - Ergibt $M \leq_p L$ für jedes $M \in \mathcal{NP}$
- **Welches Problem ist ausdrucksstark genug?**
  - Codiere mögliche Zustandsübergänge durch logische Formeln
  - Problem: Können Zustandsübergänge so kombiniert werden, daß Berechnung mit Ergebnis 1 codiert wird?

Wie zeigt man $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit?

- **Codiere Berechnung einer NTM in einem Problem L**
  - Wenn Berechnung positiv ausfällt, soll Problem lösbar sein
  - Wenn Berechnung negativ ausfällt, soll Problem unlösbar sein
  - Ergibt $M \leq_p L$ für das von der NTM entschiedene Problem M
- **Problem L muß alle polynomiellen NTMs codieren**
  - Ergibt $M \leq_p L$ für jedes $M \in \mathcal{NP}$
- **Welches Problem ist ausdrucksstark genug?**
  - Codiere mögliche Zustandsübergänge durch logische Formeln
  - Problem: Können Zustandsübergänge so kombiniert werden, daß Berechnung mit Ergebnis 1 codiert wird?
  - Erfüllbarkeitsproblem der (Aussagen-)logik ist Kandidat für $\mathcal{NPC}$

Das Erfüllbarkeitsproblem

Ist eine aussagenlogische Formel in KNF erfüllbar?

Das Erfüllbarkeitsproblem

Ist eine aussagenlogische Formel in KNF erfüllbar?

Gegeben m Klauseln $k_1, ..., k_m$ über n Variablen $x_1, ..x_n$.

Gibt es eine Belegung $a_1, ..., a_n \in \{0, 1\}$

der Variablen $x_1, ..x_n$, welche alle Klauseln erfüllt?

Das Erfüllbarkeitsproblem

Ist eine aussagenlogische Formel in KNF erfüllbar?

Gegeben m Klauseln $k_1, ..., k_m$ über n Variablen $x_1, ..x_n$.
Gibt es eine Belegung $a_1, ..., a_n \in \{0, 1\}$
der Variablen $x_1, ..x_n$, welche alle Klauseln erfüllt?

- **Klausel über den Variablen $x_1, ..x_n$**
  - Disjunktion einiger Literale der Form x_i bzw. $\underline{x_i}$

Das Erfüllbarkeitsproblem

Ist eine aussagenlogische Formel in KNF erfüllbar?

Gegeben m Klauseln $k_1, ..., k_m$ über n Variablen $x_1, ..x_n$.
Gibt es eine Belegung $a_1, ..., a_n \in \{0, 1\}$
der Variablen $x_1, ..x_n$, welche alle Klauseln erfüllt?

- **Klausel über den Variablen $x_1, ..x_n$**
  - Disjunktion einiger Literale der Form x_i bzw. $\underline{x_i}$
- **Belegung $a_1, ..., a_n \in \{0, 1\}$ erfüllt Klausel k_j**
  - Auswertung von k_j unter $a_1, ..., a_n$ ergibt den Boole'schen Wert 1

Das Erfüllbarkeitsproblem

Ist eine aussagenlogische Formel in KNF erfüllbar?

Gegeben m Klauseln $k_1, ..., k_m$ über n Variablen $x_1, ..x_n$.
Gibt es eine Belegung $a_1, ..., a_n \in \{0, 1\}$
der Variablen $x_1, ..x_n$, welche alle Klauseln erfüllt?

- **Klausel über den Variablen $x_1, ..x_n$**
  - Disjunktion einiger Literale der Form x_i bzw. $\underline{x_i}$
- **Belegung $a_1, ..., a_n \in \{0, 1\}$ erfüllt Klausel k_j**
  - Auswertung von k_j unter $a_1, ..., a_n$ ergibt den Boole'schen Wert 1
- $SAT = \{k_1, ..k_m \mid$ **k_i Klausel über $x_1, ..x_n$**
  $\wedge$ **$\exists a_1, ..a_n \in \{0,1\}.\ \forall j \leq m.\ a_1, ..a_n$ erfüllt $k_j\}$**

Das Erfüllbarkeitsproblem

Ist eine aussagenlogische Formel in KNF erfüllbar?

Gegeben m Klauseln $k_1, ..., k_m$ über n Variablen $x_1, ..x_n$.
Gibt es eine Belegung $a_1, ..., a_n \in \{0, 1\}$
der Variablen $x_1, ..x_n$, welche alle Klauseln erfüllt?

- **Klausel über den Variablen $x_1, ..x_n$**
  - Disjunktion einiger Literale der Form x_i bzw. $\underline{x_i}$
- **Belegung $a_1, ..., a_n \in \{0, 1\}$ erfüllt Klausel k_j**
  - Auswertung von k_j unter $a_1, ..., a_n$ ergibt den Boole'schen Wert 1
- $SAT = \{k_1, ..k_m \mid$ **k_i Klausel über $x_1, ..x_n$**
  $\wedge$ **$\exists a_1, ..a_n \in \{0,1\}.\ \forall j \leq m.\ a_1, ..a_n$ erfüllt $k_j\}$**

Codierbar als Teilmenge der Sprache der Aussagenlogik

Beispiele von Formeln in KNF

$$(\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}) \wedge \underline{x_3}$$

Beispiele von Formeln in KNF

$$(\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}) \wedge \underline{x_3}$$ *erfüllbar*

Beispiele von Formeln in KNF

$(\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}) \wedge \underline{x_3}$ *erfüllbar*

– Setze x_3=0, x_2=1, x_1 beliebig, z.B. x_1=0

Beispiele von Formeln in KNF

$(\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}) \wedge \underline{x_3}$ *erfüllbar*

– Setze x_3=0, x_2=1, x_1 beliebig, z.B. x_1=0

– Auswertung: $(\underline{0}+1) * (0+\underline{1}+\underline{0}) * \underline{0}$

Beispiele von Formeln in KNF

$(\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}) \wedge \underline{x_3}$ *erfüllbar*

– Setze x_3=0, x_2=1, x_1 beliebig, z.B. x_1=0

– Auswertung: $(\underline{0}+1) * (0+\underline{1}+\underline{0}) * \underline{0} = (1+1) * (0+0+1) * 1$

Beispiele von Formeln in KNF

$(\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}) \wedge \underline{x_3}$ *erfüllbar*

– Setze x_3=0, x_2=1, x_1 beliebig, z.B. x_1=0

– Auswertung: $(\underline{0}+1) * (0+\underline{1}+\underline{0}) * \underline{0} = (1+1) * (0+0+1) * 1 = 1 * 1 * 1$

Beispiele von Formeln in KNF

$(\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}) \wedge \underline{x_3}$ *erfüllbar*

– Setze x_3=0, x_2=1, x_1 beliebig, z.B. x_1=0

– Auswertung: $(\underline{0}+1) * (0+\underline{1}+\underline{0}) * \underline{0} = (1+1) * (0+0+1) * 1 = 1 * 1 * 1 = 1$

Beispiele von Formeln in KNF

$(\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}) \wedge \underline{x_3}$ *erfüllbar*

– Setze x_3=0, x_2=1, x_1 beliebig, z.B. x_1=0

– Auswertung: $(\underline{0}+1) * (0+\underline{1}+\underline{0}) * \underline{0} = (1+1) * (0+0+1) * 1 = 1 * 1 * 1 = 1$

$x_1 \wedge \underline{x_1}$

Beispiele von Formeln in KNF

$(\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}) \wedge \underline{x_3}$ *erfüllbar*

– Setze x_3=0, x_2=1, x_1 beliebig, z.B. x_1=0

– Auswertung: $(\underline{0}+1) * (0+\underline{1}+\underline{0}) * \underline{0} = (1+1) * (0+0+1) * 1 = 1 * 1 * 1 = 1$

$x_1 \wedge \underline{x_1}$ *nicht erfüllbar*

Beispiele von Formeln in KNF

$(\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}) \wedge \underline{x_3}$ *erfüllbar*

– Setze x_3=0, x_2=1, x_1 beliebig, z.B. x_1=0

– Auswertung: $(\underline{0}+1) * (0+\underline{1}+\underline{0}) * \underline{0} = (1+1) * (0+0+1) * 1 = 1 * 1 * 1 = 1$

$x_1 \wedge \underline{x_1}$ *nicht erfüllbar*

– Jede Belegung ergibt den Wert 0

Beispiele von Formeln in KNF

$(\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}) \wedge \underline{x_3}$ *erfüllbar*

– Setze x_3=0, x_2=1, x_1 beliebig, z.B. x_1=0

– Auswertung: $(\underline{0}+1) * (0+\underline{1}+\underline{0}) * \underline{0} = (1+1) * (0+0+1) * 1 = 1 * 1 * 1 = 1$

$x_1 \wedge \underline{x_1}$ *nicht erfüllbar*

– Jede Belegung ergibt den Wert 0

$(x_1 \vee x_2) \wedge (\underline{x_1} \vee \underline{x_2})$

Beispiele von Formeln in KNF

$(\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}) \wedge \underline{x_3}$ *erfüllbar*

– Setze x_3=0, x_2=1, x_1 beliebig, z.B. x_1=0

– Auswertung: $(\underline{0}+1) * (0+\underline{1}+\underline{0}) * \underline{0} = (1+1) * (0+0+1) * 1 = 1 * 1 * 1 = 1$

$x_1 \wedge \underline{x_1}$ *nicht erfüllbar*

– Jede Belegung ergibt den Wert 0

$(x_1 \vee x_2) \wedge (\underline{x_1} \vee \underline{x_2})$ *erfüllbar, Belegung: (1,0)*

Beispiele von Formeln in KNF

$(\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}) \wedge \underline{x_3}$ *erfüllbar*

– Setze x_3=0, x_2=1, x_1 beliebig, z.B. x_1=0

– Auswertung: $(\underline{0}+1) * (0+\underline{1}+\underline{0}) * \underline{0} = (1+1) * (0+0+1) * 1 = 1 * 1 * 1 = 1$

$x_1 \wedge \underline{x_1}$ *nicht erfüllbar*

– Jede Belegung ergibt den Wert 0

$(x_1 \vee x_2) \wedge (\underline{x_1} \vee \underline{x_2})$ *erfüllbar, Belegung: (1,0)*

$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2}) \wedge (\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (\underline{x_1} \vee \underline{x_2})$

Beispiele von Formeln in KNF

$(\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}) \wedge \underline{x_3}$ *erfüllbar*

– Setze x_3=0, x_2=1, x_1 beliebig, z.B. x_1=0

– Auswertung: $(\underline{0}+1) * (0+\underline{1}+\underline{0}) * \underline{0} = (1+1) * (0+0+1) * 1 = 1 * 1 * 1 = 1$

$x_1 \wedge \underline{x_1}$ *nicht erfüllbar*

– Jede Belegung ergibt den Wert 0

$(x_1 \vee x_2) \wedge (\underline{x_1} \vee \underline{x_2})$ *erfüllbar, Belegung: (1,0)*

$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2}) \wedge (\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (\underline{x_1} \vee \underline{x_2})$

nicht erfüllbar

Beispiele von Formeln in KNF

$(\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}) \wedge \underline{x_3}$ *erfüllbar*

– Setze x_3=0, x_2=1, x_1 beliebig, z.B. x_1=0

– Auswertung: $(\underline{0}+1) * (0+\underline{1}+\underline{0}) * \underline{0} = (1+1) * (0+0+1) * 1 = 1 * 1 * 1 = 1$

$x_1 \wedge \underline{x_1}$ *nicht erfüllbar*

– Jede Belegung ergibt den Wert 0

$(x_1 \vee x_2) \wedge (\underline{x_1} \vee \underline{x_2})$ *erfüllbar, Belegung: (1,0)*

$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2}) \wedge (\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (\underline{x_1} \vee \underline{x_2})$

nicht erfüllbar

$(x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3) \wedge (\underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4}) \wedge (\underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3})$

Beispiele von Formeln in KNF

$(\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}) \wedge \underline{x_3}$ *erfüllbar*

– Setze x_3=0, x_2=1, x_1 beliebig, z.B. x_1=0

– Auswertung: $(\underline{0}+1) * (0+\underline{1}+\underline{0}) * \underline{0} = (1+1) * (0+0+1) * 1 = 1 * 1 * 1 = 1$

$x_1 \wedge \underline{x_1}$ *nicht erfüllbar*

– Jede Belegung ergibt den Wert 0

$(x_1 \vee x_2) \wedge (\underline{x_1} \vee \underline{x_2})$ *erfüllbar, Belegung: (1,0)*

$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \underline{x_2}) \wedge (\underline{x_1} \vee x_2) \wedge (\underline{x_1} \vee \underline{x_2})$

nicht erfüllbar

$(x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3) \wedge (\underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4}) \wedge (\underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3})$

erfüllbar, Belegung: (1,1,0,0)

Lösungsalgorithmen für das Erfüllbarkeitsproblem

$$SAT = \{k_1..k_m |\ k_i \text{ Klausel über } x_1..x_n \ \wedge\ \exists a_1..a_n \in \{0,1\}.\forall j \leq m.a_1..a_n \text{ erfüllt } k_j\}$$

- **Deterministisch**
  - Werte Klauseln für alle möglichen Belegungen der Variablen aus bis erfüllende Belegung gefunden ist

Lösungsalgorithmen für das Erfüllbarkeitsproblem

$SAT = \{k_1..k_m | \; k_i \text{ Klausel über } x_1..x_n \; \wedge \; \exists a_1..a_n \in \{0,1\}.\forall j \leq m.a_1..a_n \text{ erfüllt } k_j\}$

- **Deterministisch**
  - Werte Klauseln für alle möglichen Belegungen der Variablen aus bis erfüllende Belegung gefunden ist
  - Es gibt 2^n möglichen Belegungen von $x_1, ..x_n$

Lösungsalgorithmen für das Erfüllbarkeitsproblem

$SAT = \{k_1..k_m |\ k_i$ Klausel über $x_1..x_n \wedge \exists a_1..a_n \in \{0,1\}.\forall j \leq m.a_1..a_n$ erfüllt $k_j\}$

- **Deterministisch**
  - Werte Klauseln für alle möglichen Belegungen der Variablen aus bis erfüllende Belegung gefunden ist
  - Es gibt 2^n möglichen Belegungen von $x_1, ..x_n$
  - Auswertung linear in Größe der Formel $\mathcal{O}(m * n)$

Lösungsalgorithmen für das Erfüllbarkeitsproblem

$SAT = \{k_1..k_m |\ k_i$ Klausel über $x_1..x_n \wedge \exists a_1..a_n \in \{0,1\}.\forall j \leq m.a_1..a_n$ erfüllt $k_j\}$

- **Deterministisch**
  - Werte Klauseln für alle möglichen Belegungen der Variablen aus bis erfüllende Belegung gefunden ist
  - Es gibt 2^n möglichen Belegungen von $x_1, ..x_n$
  - Auswertung linear in Größe der Formel $\mathcal{O}(m * n)$
  - **Laufzeit ist in $\mathcal{O}(2^n)$**

Lösungsalgorithmen für das Erfüllbarkeitsproblem

$SAT = \{k_1..k_m |\ k_i$ Klausel über $x_1..x_n \wedge \exists a_1..a_n \in \{0,1\}.\forall j \leq m.a_1..a_n$ erfüllt $k_j\}$

- **Deterministisch**
  - Werte Klauseln für alle möglichen Belegungen der Variablen aus bis erfüllende Belegung gefunden ist
  - Es gibt 2^n möglichen Belegungen von $x_1, ..x_n$
  - Auswertung linear in Größe der Formel $\mathcal{O}(m * n)$
  - **Laufzeit ist in $\mathcal{O}(2^n)$**
- **Nichtdeterministisch**
  - Rate eine erfüllende Belegung der Variablen (falls es eine gibt)
  - Prüfe Belegung durch Auswertung der Formel

Lösungsalgorithmen für das Erfüllbarkeitsproblem

$SAT = \{k_1..k_m |\ k_i$ Klausel über $x_1..x_n \wedge \exists a_1..a_n \in \{0,1\}.\forall j \leq m.a_1..a_n$ erfüllt $k_j\}$

- **Deterministisch**
  - Werte Klauseln für alle möglichen Belegungen der Variablen aus bis erfüllende Belegung gefunden ist
  - Es gibt 2^n möglichen Belegungen von $x_1, ..x_n$
  - Auswertung linear in Größe der Formel $\mathcal{O}(m * n)$
  - **Laufzeit ist in $\mathcal{O}(2^n)$**
- **Nichtdeterministisch**
  - Rate eine erfüllende Belegung der Variablen (falls es eine gibt)
  - Prüfe Belegung durch Auswertung der Formel
  - Polynomielle Laufzeit

Lösungsalgorithmen für das Erfüllbarkeitsproblem

$SAT = \{k_1..k_m |\ k_i$ Klausel über $x_1..x_n \wedge \exists a_1..a_n \in \{0,1\}.\forall j \leq m.a_1..a_n$ erfüllt $k_j\}$

- **Deterministisch**
  - Werte Klauseln für alle möglichen Belegungen der Variablen aus bis erfüllende Belegung gefunden ist
  - Es gibt 2^n möglichen Belegungen von $x_1, ..x_n$
  - Auswertung linear in Größe der Formel $\mathcal{O}(m * n)$
  - **Laufzeit ist in $\mathcal{O}(2^n)$**
- **Nichtdeterministisch**
  - Rate eine erfüllende Belegung der Variablen (falls es eine gibt)
  - Prüfe Belegung durch Auswertung der Formel
  - Polynomielle Laufzeit

$\Downarrow$

$\boldsymbol{SAT \in \mathcal{NP}}$

Der Satz von Cook

SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig

Der Satz von Cook

SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig

- **Gegeben: NTM τ, die ein Problem in polynomieller Zeit löst**

Der Satz von Cook

SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig

- **Gegeben: NTM τ, die ein Problem in polynomieller Zeit löst**
- **Ziel: Codiere Berechnung von τ bei Eingabe w durch Formel in KNF, die genau dann erfüllbar ist, wenn $h_\tau(w) = 1$**

Der Satz von Cook

SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig

- **Gegeben: NTM τ, die ein Problem in polynomieller Zeit löst**
- **Ziel: Codiere Berechnung von τ bei Eingabe w durch Formel in KNF, die genau dann erfüllbar ist, wenn $h_\tau(w) = 1$**
  - Codierung muß in polynomieller Zeit (relativ zu $|w|$) berechenbar sein

Der Satz von Cook

SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig

- **Gegeben: NTM τ, die ein Problem in polynomieller Zeit löst**
- **Ziel: Codiere Berechnung von τ bei Eingabe w durch Formel in KNF, die genau dann erfüllbar ist, wenn $h_\tau(w) = 1$**
  - Codierung muß in polynomieller Zeit (relativ zu $|w|$) berechenbar sein
- **Vorgehen: Beschreibe mögliche Konfigurationsübergänge von τ durch Klauseln**

Der Satz von Cook

SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig

- **Gegeben: NTM τ, die ein Problem in polynomieller Zeit löst**
- **Ziel: Codiere Berechnung von τ bei Eingabe w durch Formel in KNF, die genau dann erfüllbar ist, wenn $h_\tau(w) = 1$**
  - Codierung muß in polynomieller Zeit (relativ zu $|w|$) berechenbar sein
- **Vorgehen: Beschreibe mögliche Konfigurationsübergänge von τ durch Klauseln**
  - Codiere Zustand, Kopfposition und Bandzellen durch Literale

Der Satz von Cook

SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig

- **Gegeben: NTM τ, die ein Problem in polynomieller Zeit löst**
- **Ziel: Codiere Berechnung von τ bei Eingabe w durch Formel in KNF, die genau dann erfüllbar ist, wenn $h_\tau(w) = 1$**
  - Codierung muß in polynomieller Zeit (relativ zu $|w|$) berechenbar sein
- **Vorgehen: Beschreibe mögliche Konfigurationsübergänge von τ durch Klauseln**
  - Codiere Zustand, Kopfposition und Bandzellen durch Literale
  - Es werden nur polynomiell viele Literale und Klauseln benötigt

Der Satz von Cook

SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig

- **Gegeben: NTM τ, die ein Problem in polynomieller Zeit löst**
- **Ziel: Codiere Berechnung von τ bei Eingabe w durch Formel in KNF, die genau dann erfüllbar ist, wenn $h_\tau(w) = 1$**
  - Codierung muß in polynomieller Zeit (relativ zu $|w|$) berechenbar sein
- **Vorgehen: Beschreibe mögliche Konfigurationsübergänge von τ durch Klauseln**
  - Codiere Zustand, Kopfposition und Bandzellen durch Literale
  - Es werden nur polynomiell viele Literale und Klauseln benötigt
  - Formel ist erfüllbar, wenn Konfigurationsübergänge zu Berechnung zusammengesetzt werden können

Methodik für Nachweis von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Zeige $L \in \mathcal{NP}$:**

Methodik für Nachweis von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Zeige $L \in \mathcal{NP}$:**
  - Beschreibe, welchen Lösungsvorschlag das Orakel generiert

Methodik für Nachweis von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Zeige $L \in \mathcal{NP}$:**
  - Beschreibe, welchen Lösungsvorschlag das Orakel generiert
  - Beschreibe, wie Lösungsvorschlag überprüft wird

Methodik für Nachweis von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Zeige $L \in \mathcal{NP}$:**
  - Beschreibe, welchen Lösungsvorschlag das Orakel generiert
  - Beschreibe, wie Lösungsvorschlag überprüft wird
  - Zeige, daß das Prüfverfahren polynomiell ist

Methodik für Nachweis von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Zeige $L \in \mathcal{NP}$:**
  - Beschreibe, welchen Lösungsvorschlag das Orakel generiert
  - Beschreibe, wie Lösungsvorschlag überprüft wird
  - Zeige, daß das Prüfverfahren polynomiell ist
- **Zeige $\exists L' \in \mathcal{NPC}.\ L' \leq_p L$**

Methodik für Nachweis von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Zeige $L \in \mathcal{NP}$:**
  - Beschreibe, welchen Lösungsvorschlag das Orakel generiert
  - Beschreibe, wie Lösungsvorschlag überprüft wird
  - Zeige, daß das Prüfverfahren polynomiell ist
- **Zeige $\exists L' \in \mathcal{NPC}.\ L' \leq_p L$** (anstatt $\forall L' \in \mathcal{NP}.\ L' \leq_p L$)

Methodik für Nachweis von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Zeige $L \in \mathcal{NP}$:**
  - Beschreibe, welchen Lösungsvorschlag das Orakel generiert
  - Beschreibe, wie Lösungsvorschlag überprüft wird
  - Zeige, daß das Prüfverfahren polynomiell ist
- **Zeige $\exists L' \in \mathcal{NPC}.\ L' \leq_p L$** (anstatt $\forall L' \in \mathcal{NP}.\ L' \leq_p L$)
  - Wähle ein ähnliches, bekanntes Problem $L' \in \mathcal{NPC}$

Methodik für Nachweis von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Zeige $L \in \mathcal{NP}$:**
  - Beschreibe, welchen Lösungsvorschlag das Orakel generiert
  - Beschreibe, wie Lösungsvorschlag überprüft wird
  - Zeige, daß das Prüfverfahren polynomiell ist
- **Zeige $\exists L' \in \mathcal{NPC}.\ L' \leq_p L$** (anstatt $\forall L' \in \mathcal{NP}.\ L' \leq_p L$)
  - Wähle ein ähnliches, bekanntes Problem $L' \in \mathcal{NPC}$
  - Beschreibe Transformationsfunktion f, welche Eingaben aus der Sprache für L' in Worte der Sprache für L umwandelt

Methodik für Nachweis von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Zeige $L \in \mathcal{NP}$:**
  - Beschreibe, welchen Lösungsvorschlag das Orakel generiert
  - Beschreibe, wie Lösungsvorschlag überprüft wird
  - Zeige, daß das Prüfverfahren polynomiell ist
- **Zeige $\exists L' \in \mathcal{NPC}.\ L' \leq_p L$** (anstatt $\forall L' \in \mathcal{NP}.\ L' \leq_p L$)
  - Wähle ein ähnliches, bekanntes Problem $L' \in \mathcal{NPC}$
  - Beschreibe Transformationsfunktion f, welche Eingaben aus der Sprache für L' in Worte der Sprache für L umwandelt
  - Zeige für alle x: $x \in L' \Leftrightarrow f(x) \in L$ (also $L' = f^{-1}(L)$)

Methodik für Nachweis von $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

- **Zeige $L \in \mathcal{NP}$:**
  - Beschreibe, welchen Lösungsvorschlag das Orakel generiert
  - Beschreibe, wie Lösungsvorschlag überprüft wird
  - Zeige, daß das Prüfverfahren polynomiell ist
- **Zeige $\exists L' \in \mathcal{NPC}.\ L' \leq_p L$** (anstatt $\forall L' \in \mathcal{NP}.\ L' \leq_p L$)
  - Wähle ein ähnliches, bekanntes Problem $L' \in \mathcal{NPC}$
  - Beschreibe Transformationsfunktion f, welche Eingaben aus der Sprache für L' in Worte der Sprache für L umwandelt
  - Zeige für alle x: $x \in L' \Leftrightarrow f(x) \in L$ (also $L' = f^{-1}(L)$)
  - Zeige, daß f in polynomieller Zeit berechnet werden kann

Erfüllbarkeitsproblem mit 3 Literalen pro Klausel

$$\textbf{3SAT}$$
$$= \{k_1, ..k_m \mid \forall i \leq m.\ \exists z_{ij} \in \{x_1, \underline{x_1}, ..., x_n, \underline{x_n}\}.\ k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$$
$$\wedge\ \exists a_1, ..a_n \in \{0,1\}.\ \forall j \leq m.\ a_1, ..a_n \text{ erfüllt } k_j\ \}$$

Erfüllbarkeitsproblem mit 3 Literalen pro Klausel

$$3SAT$$
$$= \{k_1, ..k_m \mid \forall i \leq m.\ \exists z_{ij} \in \{x_1, \underline{x_1}, ..., x_n, \underline{x_n}\}.\ k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$$
$$\wedge\ \exists a_1, ..a_n \in \{0,1\}.\ \forall j \leq m.\ a_1, ..a_n \text{ erfüllt } k_j\ \}$$

- $3SAT \in \mathcal{NP}$

Erfüllbarkeitsproblem mit 3 Literalen pro Klausel

$$\mathbf{3SAT}$$
$$= \{k_1, ..k_m \mid \forall i \leq m.\ \exists z_{ij} \in \{x_1, \underline{x_1}, ..., x_n, \underline{x_n}\}.\ k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$$
$$\wedge\ \exists a_1, ..a_n \in \{0,1\}.\ \forall j \leq m.\ a_1, ..a_n \text{ erfüllt } k_j\ \}$$

- $\mathbf{3SAT \in \mathcal{NP}}$
  - Wie $SAT \in \mathcal{NP}$: Rate Belegung der Variablen und werte Klauseln aus

Erfüllbarkeitsproblem mit 3 Literalen pro Klausel

$$\begin{aligned} 3SAT \\ = \{k_1, ..k_m \mid\ & \forall i \leq m.\ \exists z_{ij} \in \{x_1, \underline{x_1}, ..., x_n, \underline{x_n}\}.\ k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3} \\ & \wedge\ \exists a_1, ..a_n \in \{0,1\}.\ \forall j \leq m.\ a_1, ..a_n \text{ erfüllt } k_j\ \} \end{aligned}$$

- $3SAT \in \mathcal{NP}$
  - Wie $SAT \in \mathcal{NP}$: Rate Belegung der Variablen und werte Klauseln aus
- $SAT \leq_p 3SAT$:

Erfüllbarkeitsproblem mit 3 Literalen pro Klausel

$$\mathbf{3SAT} = \{k_1, ..k_m \mid \forall i{\leq}m.\ \exists z_{ij} \in \{x_1, \underline{x_1}, ..., x_n, \underline{x_n}\}.\ k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3} \wedge \exists a_1, ..a_n \in \{0,1\}.\ \forall j{\leq}m.\ a_1, ..a_n \text{ erfüllt } k_j\}$$

- $\mathbf{3SAT} \in \mathcal{NP}$
  - Wie $SAT \in \mathcal{NP}$: Rate Belegung der Variablen und werte Klauseln aus
- $\mathbf{SAT} \leq_p \mathbf{3SAT}$:
  - Normalisierung der Klauseln $k_1, ..k_m$ über $x_1, ..x_n$.
    Ersetze Klausel k_i durche äquivalente Menge von Dreierklauseln

Erfüllbarkeitsproblem mit 3 Literalen pro Klausel

$$\boldsymbol{3SAT}$$
$$= \{k_1, ..k_m \mid \forall i \leq m.\ \exists z_{ij} \in \{x_1, \underline{x_1}, ..., x_n, \underline{x_n}\}.\ k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$$
$$\wedge\ \exists a_1, ..a_n \in \{0,1\}.\ \forall j \leq m.\ a_1, ..a_n \text{ erfüllt } k_j\ \}$$

- $\boldsymbol{3SAT \in \mathcal{NP}}$
  - Wie $SAT \in \mathcal{NP}$: Rate Belegung der Variablen und werte Klauseln aus
- $\boldsymbol{SAT \leq_p 3SAT}$:
  - Normalisierung der Klauseln $k_1, ..k_m$ über $x_1, ..x_n$.
    Ersetze Klausel k_i durche äquivalente Menge von Dreierklauseln
    - Ersetze einelementige Klauseln $k_i = z$ durch $z \vee z \vee z$
    - Ersetze zweielementige Klauseln $k_i = z \vee z'$ durch $z \vee z \vee z'$
    - Übernehme dreielementige Klauseln unverändert
    - Ersetze Klauseln $k_i = z_1 \vee z_2 ... \vee z_j$ durch j-2 neue Klauseln mit neuen Variablen $y_{i,l}$: $(z_1 \vee z_2 \vee y_{i,1}) \wedge (\underline{y_{i,1}} \vee z_3 \vee y_{i,2}) \wedge \ldots (\underline{y_{i,j-3}} \vee z_{j-1} \vee z_j)$

Erfüllbarkeitsproblem mit 3 Literalen pro Klausel

$$\mathbf{3SAT}$$
$$= \{k_1, ..k_m \mid \forall i \leq m.\ \exists z_{ij} \in \{x_1, \underline{x_1}, ..., x_n, \underline{x_n}\}.\ k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$$
$$\wedge\ \exists a_1, ..a_n \in \{0,1\}.\ \forall j \leq m.\ a_1, ..a_n \text{ erfüllt } k_j\ \}$$

- $\mathbf{3SAT \in \mathcal{NP}}$
  - Wie $SAT \in \mathcal{NP}$: Rate Belegung der Variablen und werte Klauseln aus
- $\mathbf{SAT \leq_p 3SAT}$:
  - Normalisierung der Klauseln $k_1, ..k_m$ über $x_1, ..x_n$.
    Ersetze Klausel k_i durche äquivalente Menge von Dreierklauseln
    - Ersetze einelementige Klauseln $k_i = z$ durch $z \vee z \vee z$
    - Ersetze zweielementige Klauseln $k_i = z \vee z'$ durch $z \vee z \vee z'$
    - Übernehme dreielementige Klauseln unverändert
    - Ersetze Klauseln $k_i = z_1 \vee z_2 ... \vee z_j$ durch j-2 neue Klauseln mit neuen Variablen $y_{i,l}$: $(z_1 \vee z_2 \vee y_{i,1}) \wedge (\underline{y_{i,1}} \vee z_3 \vee y_{i,2}) \wedge \ldots (\underline{y_{i,j-3}} \vee z_{j-1} \vee z_j)$
  - Normalisierung der Klauseln möglich in **polynomieller Zeit**

Erfüllbarkeitsproblem mit 3 Literalen pro Klausel

$$\mathbf{3SAT}$$
$$= \{k_1, ..k_m \mid \forall i \leq m.\ \exists z_{ij} \in \{x_1, \underline{x_1}, ..., x_n, \underline{x_n}\}.\ k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$$
$$\wedge\ \exists a_1, ..a_n \in \{0,1\}.\ \forall j \leq m.\ a_1, ..a_n \text{ erfüllt } k_j\ \}$$

- $\mathbf{3SAT \in \mathcal{NP}}$
  - Wie $SAT \in \mathcal{NP}$: Rate Belegung der Variablen und werte Klauseln aus
- $\mathbf{SAT \leq_p 3SAT}$:
  - Normalisierung der Klauseln $k_1, ..k_m$ über $x_1, ..x_n$.
    Ersetze Klausel k_i durche äquivalente Menge von Dreierklauseln
    - Ersetze einelementige Klauseln $k_i = z$ durch $z \vee z \vee z$
    - Ersetze zweielementige Klauseln $k_i = z \vee z'$ durch $z \vee z \vee z'$
    - Übernehme dreielementige Klauseln unverändert
    - Ersetze Klauseln $k_i = z_1 \vee z_2 ... \vee z_j$ durch j-2 neue Klauseln mit neuen Variablen $y_{i,l}$: $(z_1 \vee z_2 \vee y_{i,1}) \wedge (\underline{y_{i,1}} \vee z_3 \vee y_{i,2}) \wedge \ldots (\underline{y_{i,j-3}} \vee z_{j-1} \vee z_j)$
  - Normalisierung der Klauseln möglich in **polynomieller Zeit**
  - k_i erfüllbar genau dann wenn normalisierte Klauselmenge erfüllbar

Erfüllbarkeitsproblem mit 3 Literalen pro Klausel

$$\boldsymbol{3SAT}$$
$$= \{k_1, ..k_m \mid \forall i \leq m.\ \exists z_{ij} \in \{x_1, \underline{x_1}, ..., x_n, \underline{x_n}\}.\ k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$$
$$\wedge\ \exists a_1, ..a_n \in \{0,1\}.\ \forall j \leq m.\ a_1, ..a_n \text{ erfüllt } k_j\ \}$$

- $\boldsymbol{3SAT \in \mathcal{NP}}$
  - Wie $SAT \in \mathcal{NP}$: Rate Belegung der Variablen und werte Klauseln aus
- $\boldsymbol{SAT \leq_p 3SAT}$:
  - Normalisierung der Klauseln $k_1, ..k_m$ über $x_1, ..x_n$.
    Ersetze Klausel k_i durche äquivalente Menge von Dreierklauseln
    - Ersetze einelementige Klauseln $k_i = z$ durch $z \vee z \vee z$
    - Ersetze zweielementige Klauseln $k_i = z \vee z'$ durch $z \vee z \vee z'$
    - Übernehme dreielementige Klauseln unverändert
    - Ersetze Klauseln $k_i = z_1 \vee z_2 ... \vee z_j$ durch j-2 neue Klauseln mit neuen Variablen $y_{i,l}$: $(z_1 \vee z_2 \vee y_{i,1}) \wedge (\underline{y_{i,1}} \vee z_3 \vee y_{i,2}) \wedge \ldots (\underline{y_{i,j-3}} \vee z_{j-1} \vee z_j)$
  - Normalisierung der Klauseln möglich in **polynomieller Zeit**
  - k_i erfüllbar genau dann wenn normalisierte Klauselmenge erfüllbar
  - Für die Transformation f gilt: $\forall \boldsymbol{F}.\ \boldsymbol{F \in SAT} \Leftrightarrow \boldsymbol{f(F) \in 3SAT}$

Das Cliquen Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{CLIQUE} = \{\, (G,k) \mid G=(V,E) \text{ Graph } \wedge\ (\exists V_c \subseteq V.\ |V_c| \geq k\ \wedge\ V_c \text{ is Clique in } G) \,\}$$

- $\boldsymbol{CLIQUE \in \mathcal{NP}}$:

Das Cliquen Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{CLIQUE} = \{\, (G,k) \mid G=(V,E) \text{ Graph } \wedge\ (\exists V_c \subseteq V.\ |V_c| \geq k \ \wedge\ V_c \text{ is Clique in } G) \,\}$$

- $\boldsymbol{CLIQUE \in \mathcal{NP}}$:
  - Rate eine Kantenmenge $V_c \subseteq V$

Das Cliquen Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{CLIQUE} = \{\, (G,k) \mid G=(V,E) \text{ Graph } \wedge\ (\exists V_c \subseteq V.\ |V_c| \geq k \ \wedge\ V_c \text{ is Clique in } G) \,\}$$

- $\boldsymbol{CLIQUE \in \mathcal{NP}}$**:**
  - Rate eine Kantenmenge $V_c \subseteq V$
  - Prüfe $|V_c| \geq k$ *maximal* $|V_c|$ *Schritte*

Das Cliquen Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{CLIQUE} = \{\, (G,k) \mid G=(V,E) \text{ Graph } \wedge\ (\exists V_c \subseteq V.\ |V_c| \geq k \ \wedge\ V_c \text{ is Clique in } G) \,\}$$

- $\boldsymbol{CLIQUE \in \mathcal{NP}}$:
  - Rate eine Kantenmenge $V_c \subseteq V$
  - Prüfe $|V_c| \geq k$ — *maximal* $|V_c|$ *Schritte*
  - Prüfe: $\forall v \neq v' \in V_c.\ \{v,v'\} \in E$ — *maximal* $|V_c|^2 * |E| \leq |V|^4$ *Schritte*

Das Cliquen Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{CLIQUE} = \{\, (G,k) \mid G=(V,E) \text{ Graph } \wedge\ (\exists V_c \subseteq V.\ |V_c| \geq k \ \wedge\ V_c \text{ is Clique in } G) \,\}$$

- $\boldsymbol{CLIQUE \in \mathcal{NP}}$:
  - Rate eine Kantenmenge $V_c \subseteq V$
  - Prüfe $|V_c| \geq k$ — *maximal* $|V_c|$ *Schritte*
  - Prüfe: $\forall v \neq v' \in V_c.\ \{v,v'\} \in E$ — *maximal* $|V_c|^2 * |E| \leq |V|^4$ *Schritte*
- $\boldsymbol{3SAT \leq_p CLIQUE}$

Das Cliquen Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{CLIQUE} = \{\, (G,k) \mid G=(V,E) \text{ Graph } \wedge\ (\exists V_c \subseteq V.\ |V_c| \geq k \ \wedge\ V_c \text{ is Clique in } G) \,\}$$

- $\boldsymbol{CLIQUE \in \mathcal{NP}}$:
  - Rate eine Kantenmenge $V_c \subseteq V$
  - Prüfe $|V_c| \geq k$ — *maximal* $|V_c|$ *Schritte*
  - Prüfe: $\forall v \neq v' \in V_c.\ \{v,v'\} \in E$ — *maximal* $|V_c|^2 * |E| \leq |V|^4$ *Schritte*
- $\boldsymbol{3SAT \leq_p CLIQUE}$
  - Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$

Das Cliquen Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{CLIQUE} = \{\, (G,k) \mid G=(V,E) \text{ Graph } \wedge\ (\exists V_c \subseteq V.\ |V_c| \geq k \ \wedge\ V_c \text{ is Clique in } G) \,\}$$

- $\boldsymbol{CLIQUE \in \mathcal{NP}}$:
  - Rate eine Kantenmenge $V_c \subseteq V$
  - Prüfe $|V_c| \geq k$ — *maximal* $|V_c|$ *Schritte*
  - Prüfe: $\forall v \neq v' \in V_c.\ \{v,v'\} \in E$ — *maximal* $|V_c|^2 * |E| \leq |V|^4$ *Schritte*

- $\boldsymbol{3SAT \leq_p CLIQUE}$
  - Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$
  - Konstruiere Graphen $G_F := (V,E)$ mit

    $V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{\, \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}} \}$

Das Cliquen Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{CLIQUE} = \{\, (G,k) \mid G=(V,E) \text{ Graph } \wedge\ (\exists V_c \subseteq V.\ |V_c| \geq k \ \wedge\ V_c \text{ is Clique in } G) \,\}$$

- $\boldsymbol{CLIQUE \in \mathcal{NP}}$:
  - Rate eine Kantenmenge $V_c \subseteq V$
  - Prüfe $|V_c| \geq k$ — *maximal* $|V_c|$ *Schritte*
  - Prüfe: $\forall v \neq v' \in V_c.\ \{v,v'\} \in E$ — *maximal* $|V_c|^2 * |E| \leq |V|^4$ *Schritte*

- $\boldsymbol{3SAT \leq_p CLIQUE}$
  - Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$
  - Konstruiere Graphen $G_F := (V,E)$ mit

    $V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{\, \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}} \}$
  - Setze $f(F) := (G_F, m)$

Das Cliquen Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{CLIQUE} = \{\, (G,k) \mid G=(V,E) \text{ Graph } \wedge\ (\exists V_c \subseteq V.\ |V_c| \geq k \ \wedge\ V_c \text{ is Clique in } G) \,\}$$

- $\boldsymbol{CLIQUE \in \mathcal{NP}}$:
  - Rate eine Kantenmenge $V_c \subseteq V$
  - Prüfe $|V_c| \geq k$ — *maximal* $|V_c|$ *Schritte*
  - Prüfe: $\forall v \neq v' \in V_c.\ \{v,v'\} \in E$ — *maximal* $|V_c|^2 * |E| \leq |V|^4$ *Schritte*

- $\boldsymbol{3SAT \leq_p CLIQUE}$
  - Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$
  - Konstruiere Graphen $G_F := (V,E)$ mit

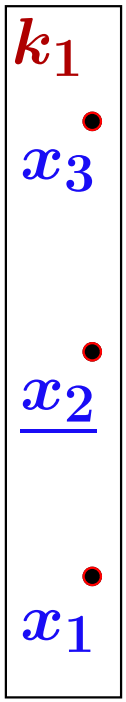
    $V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{\, \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}} \}$
  - Setze $f(F) := (G_F, m)$
  - f ist in polynomieller Zeit berechenbar

Codierung einer Formel als Cliquenproblem

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$$

Codierung einer Formel als Cliquenproblem

$F = (k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$

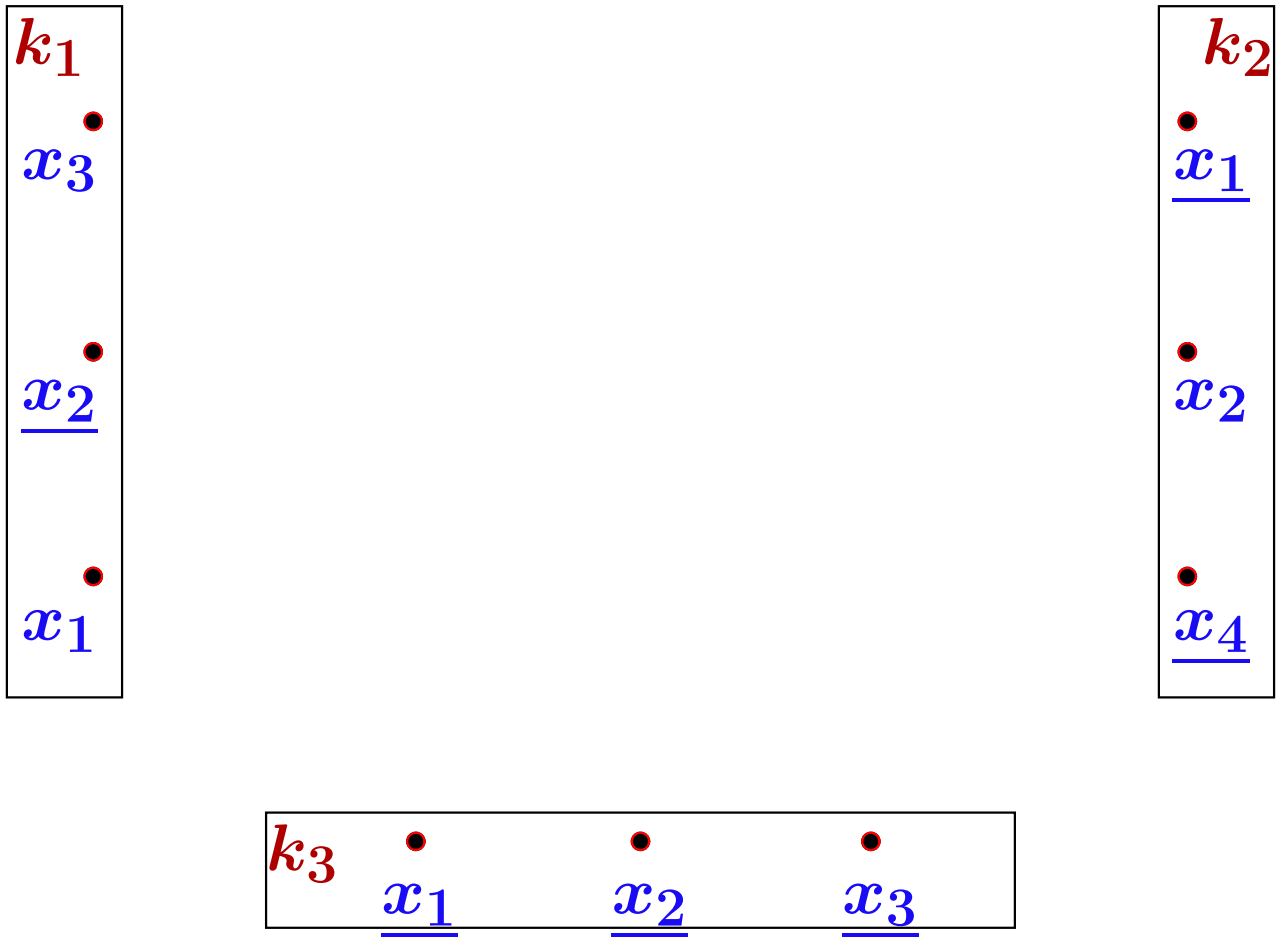


Codierung einer Formel als Cliquenproblem

$F = (k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$

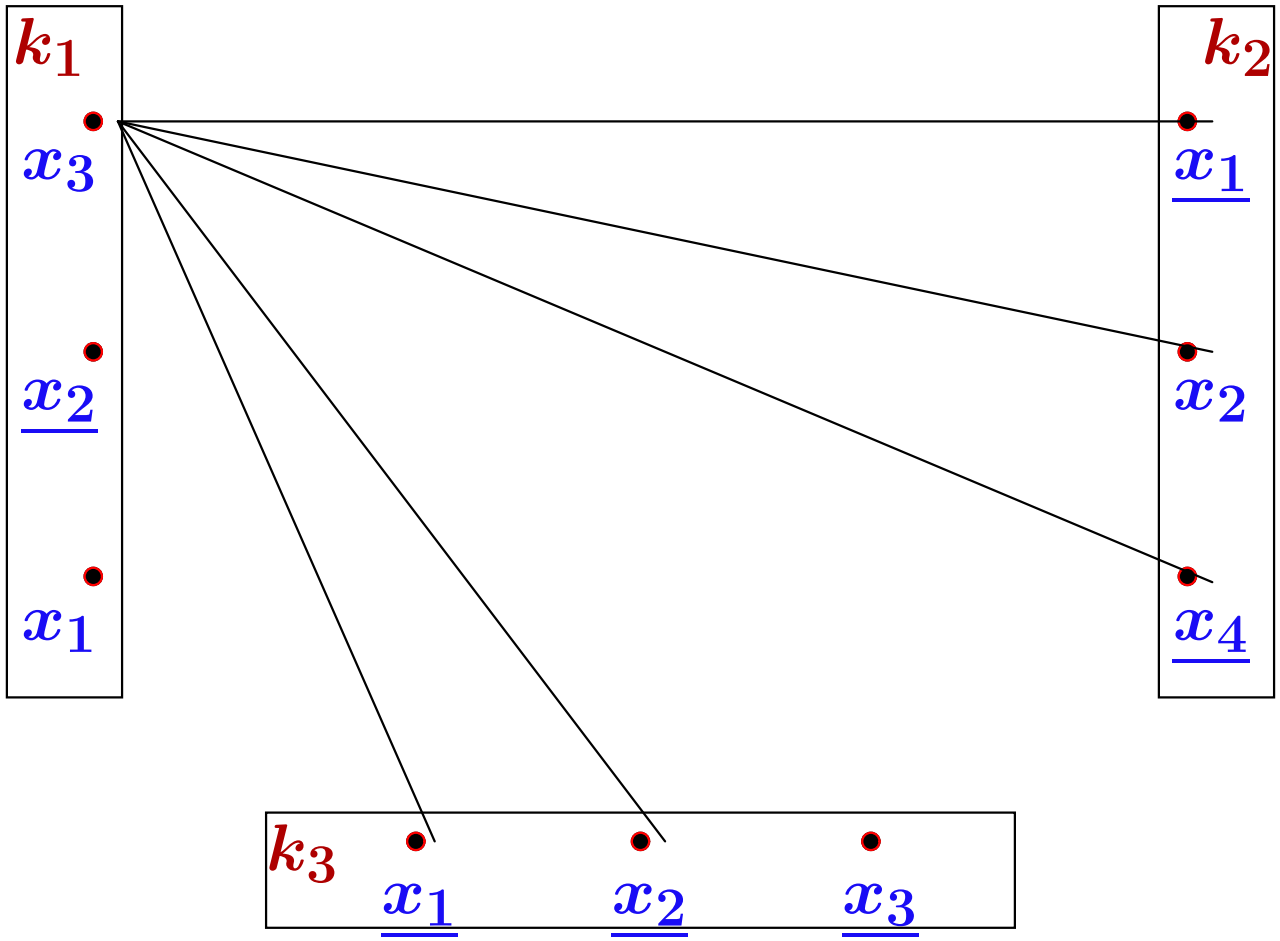
Codierung einer Formel als Cliquenproblem

$F = (k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$



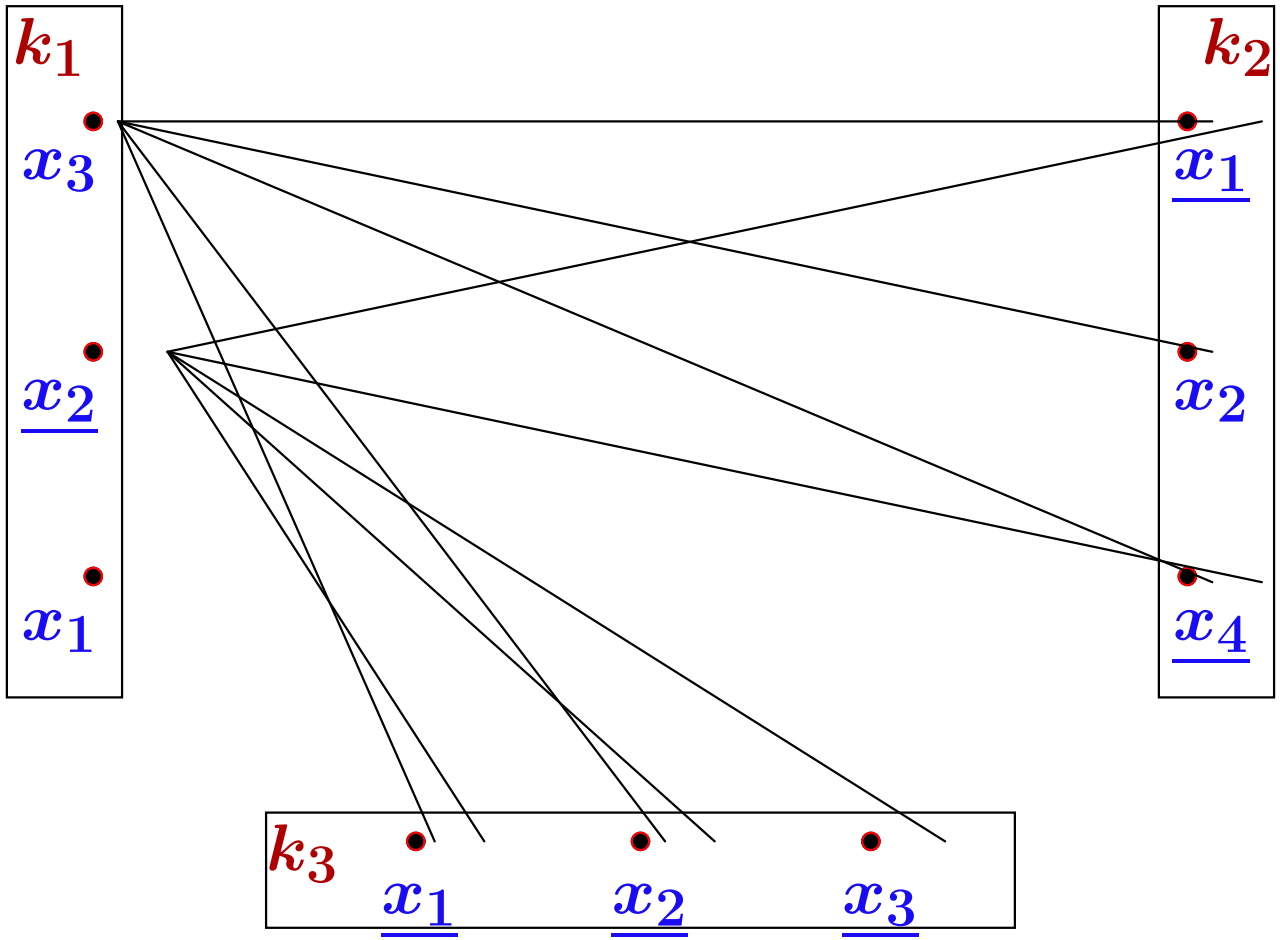
Codierung einer Formel als Cliquenproblem

$F = (k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$



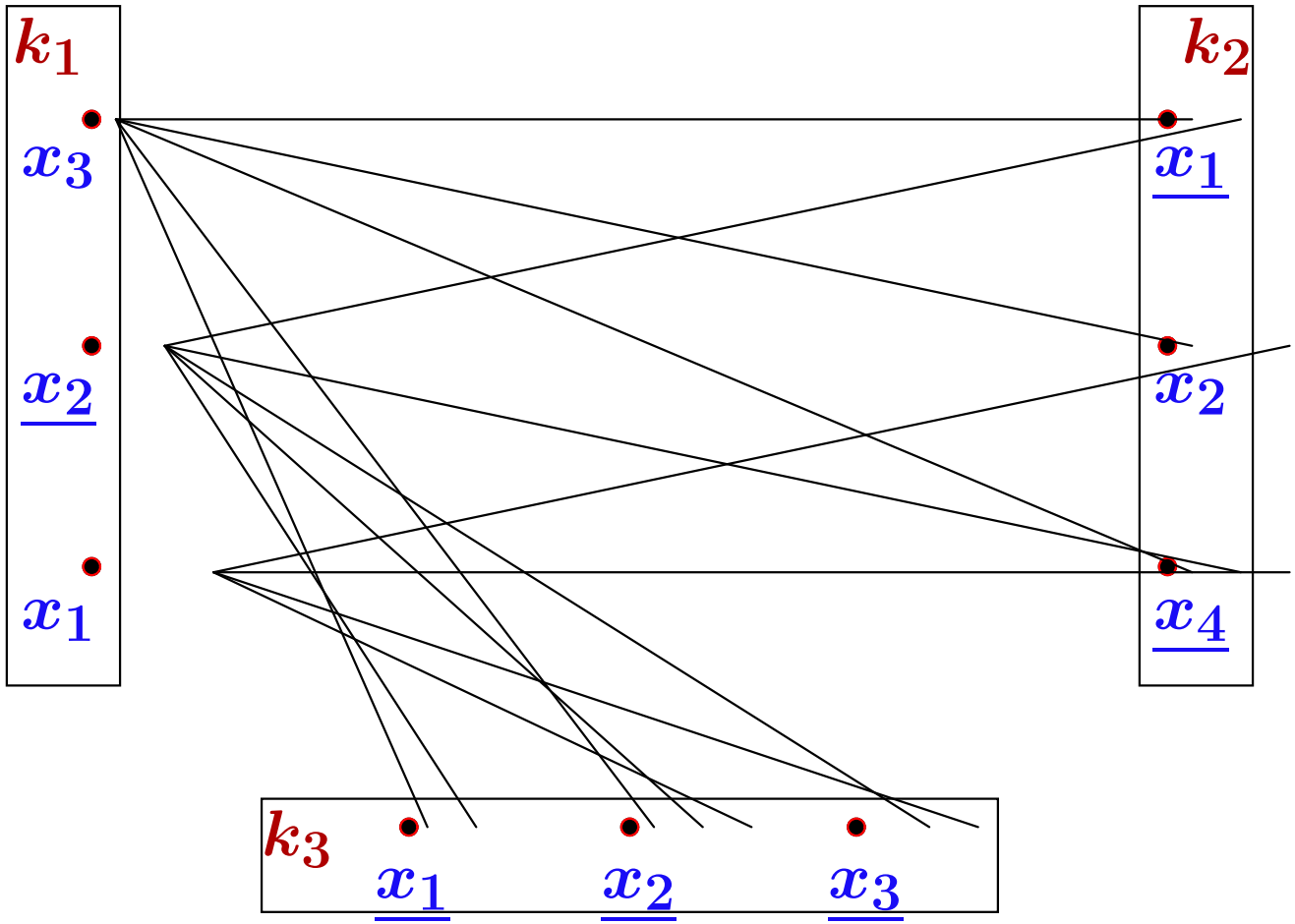
Codierung einer Formel als Cliquenproblem

$F = (k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$



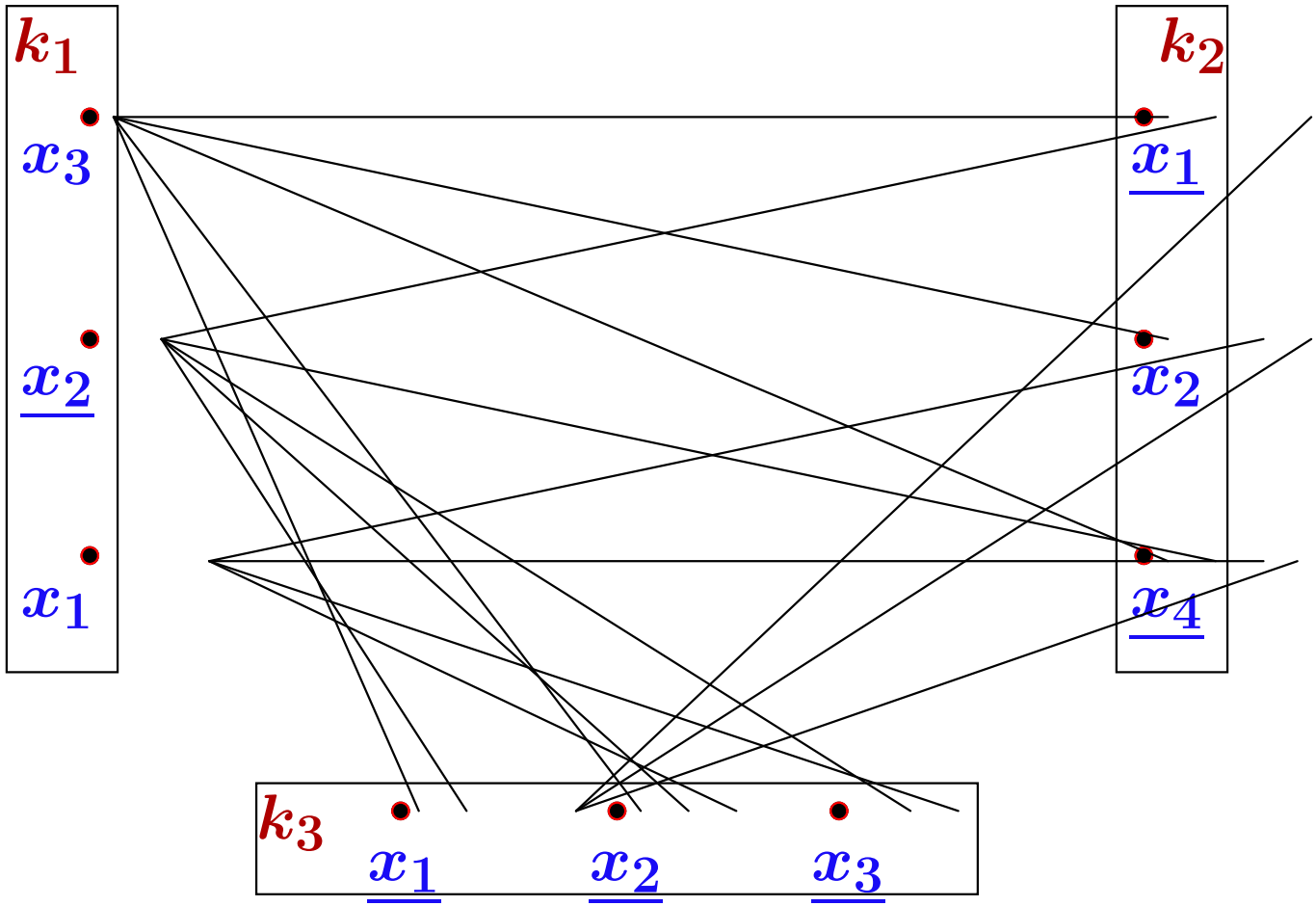
Codierung einer Formel als Cliquenproblem

$F = (k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$



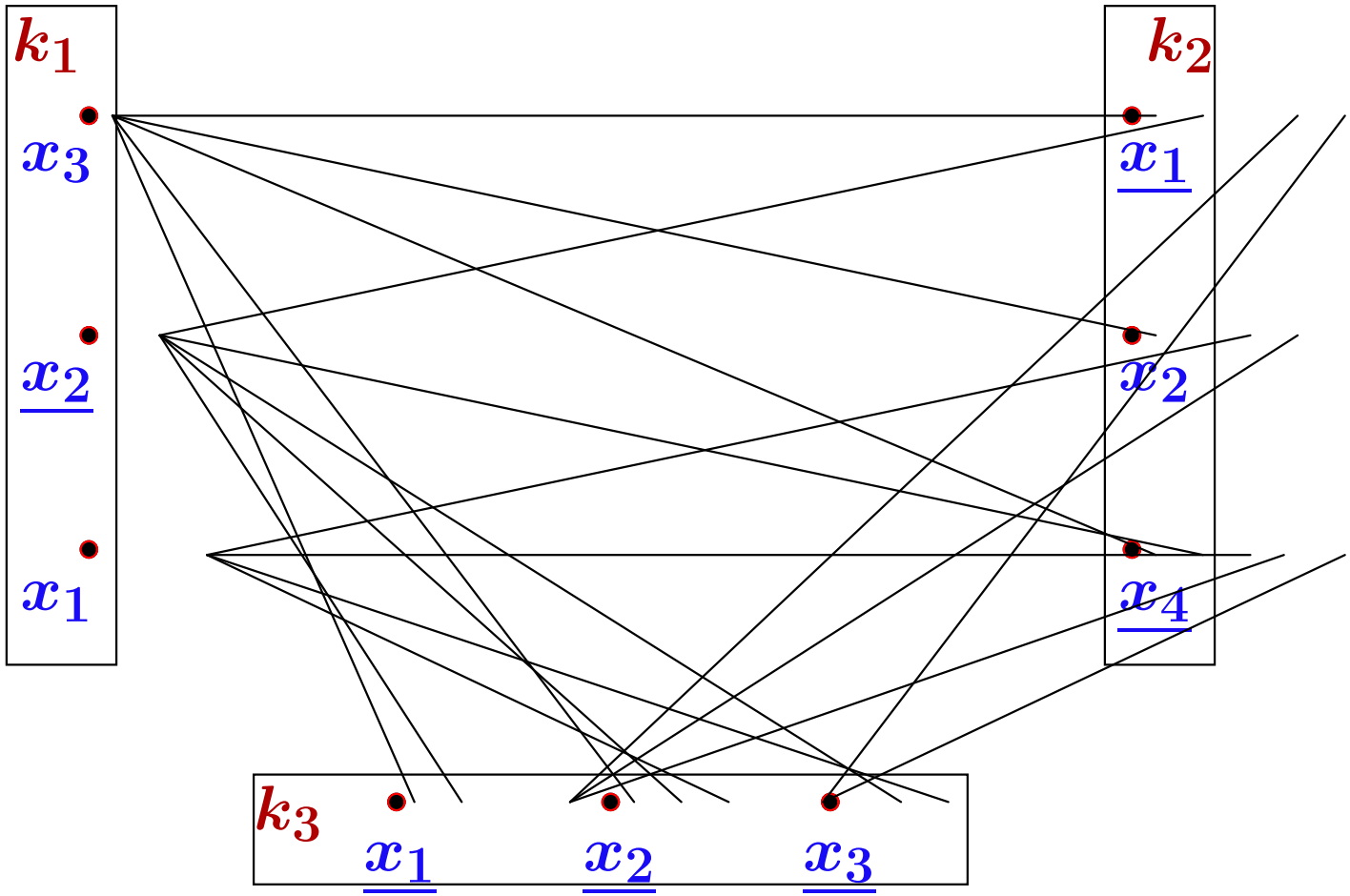
Codierung einer Formel als Cliquenproblem

$F = (k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$



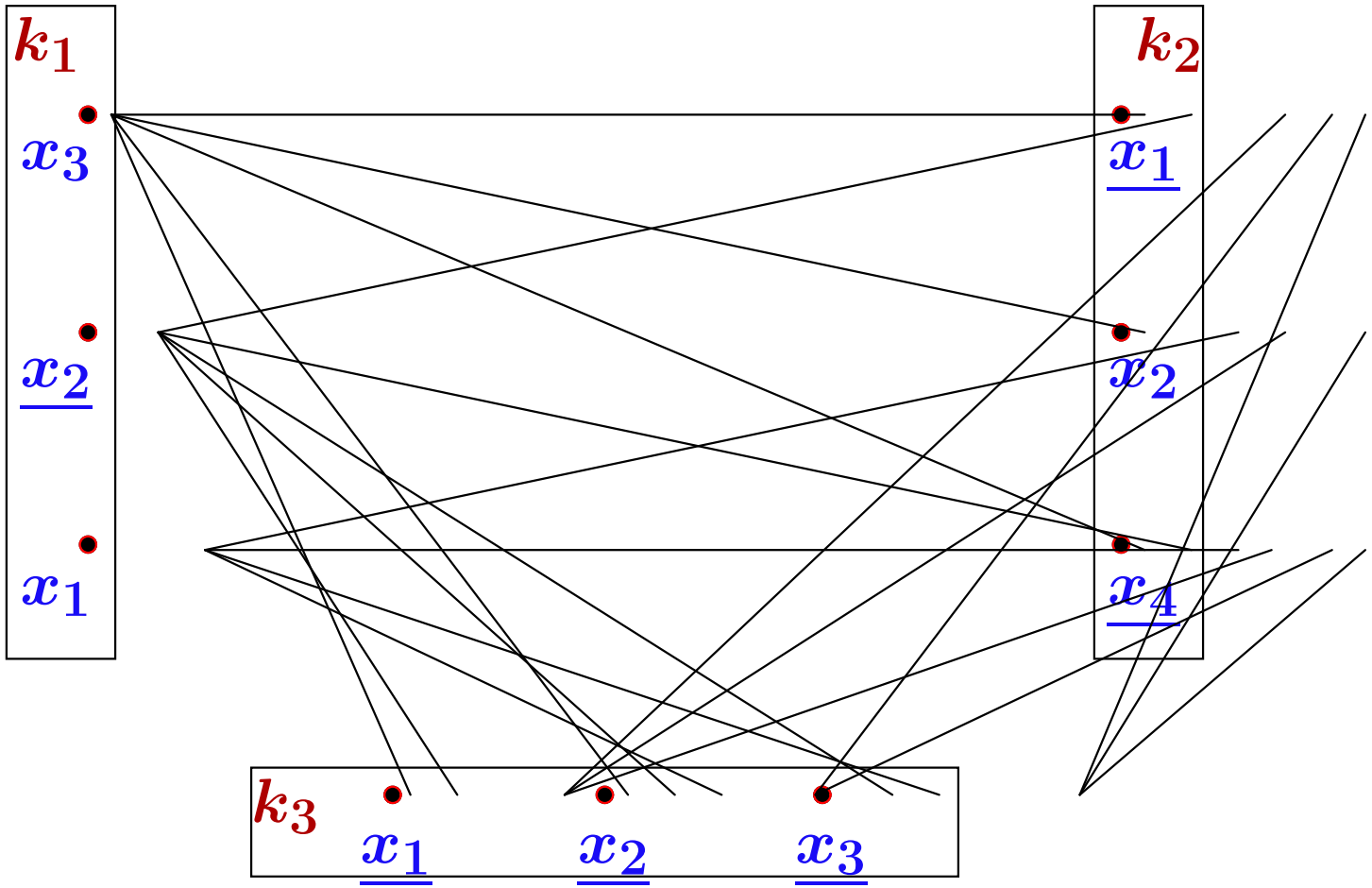
Codierung einer Formel als Cliquenproblem

$F = (k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$



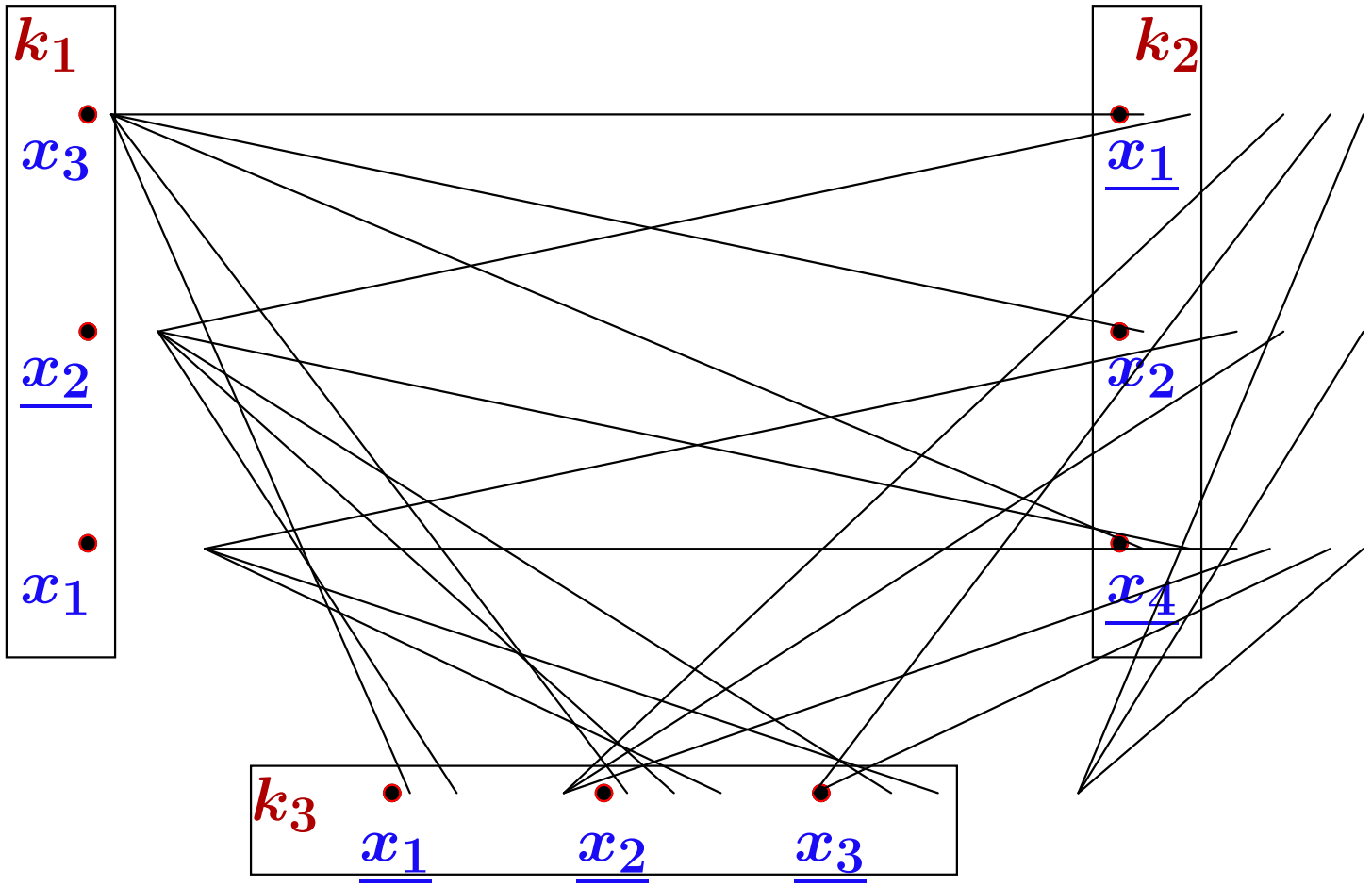
Codierung einer Formel als Cliquenproblem

$F = (k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$



Codierung einer Formel als Cliquenproblem

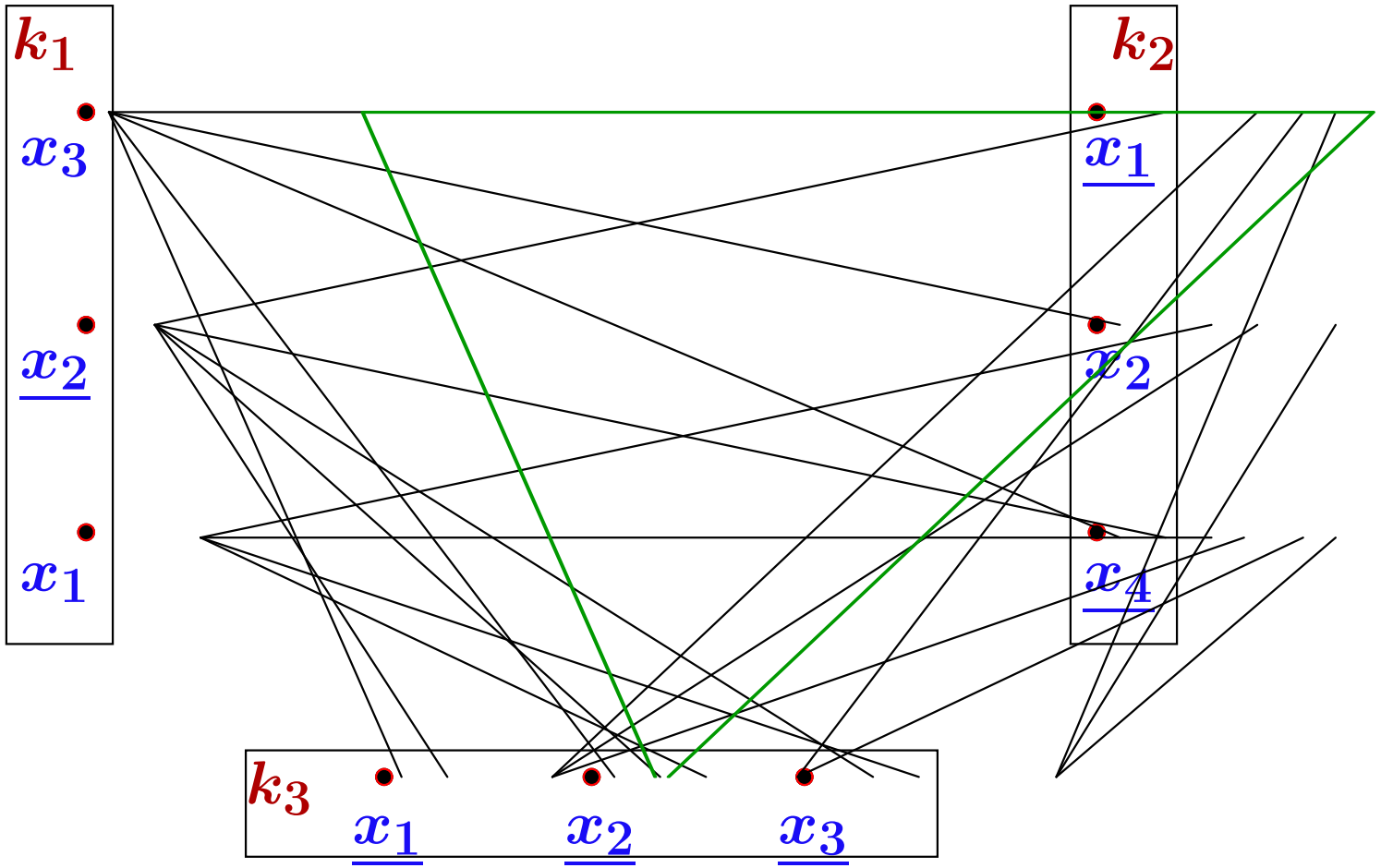
$F = (k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$



Gibt es in dem Graphen eine 3-Clique?

Codierung einer Formel als Cliquenproblem

$F = (k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$



Gibt es in dem Graphen eine 3-Clique?

Korrektheit der Transformation

Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$

Setze $f(F) := (G_F, m)$ mit $G_F := (V, E)$, wobei

$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}}\}$

Korrektheit der Transformation

Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$

Setze $f(F) := (G_F, m)$ mit $G_F := (V, E)$, wobei

$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}}\}$

Es sei $f(F) \in CLIQUE$

Korrektheit der Transformation

Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$

Setze $f(F) := (G_F, m)$ mit $G_F := (V, E)$, wobei

$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}}\}$

Es sei $f(F) \in CLIQUE$

Dann hat G_F eine m-Clique V_c

Korrektheit der Transformation

Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$
Setze $f(F) := (G_F, m)$ mit $G_F := (V, E)$, wobei
$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}}\}$

Es sei $f(F) \in CLIQUE$
Dann hat G_F eine m-Clique V_c
Per Konstruktion von E enthält V_c aus jedem der Blöcke $b_i := \{v_{ij} \mid 1 \leq j \leq 3\}$ genau einen Knoten

Korrektheit der Transformation

Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$
Setze $f(F) := (G_F, m)$ mit $G_F := (V, E)$, wobei
$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}}\}$

Es sei $f(F) \in CLIQUE$
Dann hat G_F eine m-Clique V_c
Per Konstruktion von E enthält V_c aus jedem der Blöcke $b_i := \{v_{ij} \mid 1 \leq j \leq 3\}$
genau einen Knoten und keine zwei Knoten in V_c sind komplementär $(z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}})$

Korrektheit der Transformation

Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$
Setze $f(F) := (G_F, m)$ mit $G_F := (V, E)$, wobei
$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}}\}$

Es sei $f(F) \in CLIQUE$
Dann hat G_F eine m-Clique V_c
Per Konstruktion von E enthält V_c aus jedem der Blöcke $b_i := \{v_{ij} \mid 1 \leq j \leq 3\}$ genau einen Knoten und keine zwei Knoten in V_c sind komplementär ($z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}}$)
Eine Belegung der zugehörigen z_{ij} mit 1 erfüllt alle Klauseln k_i von F

Korrektheit der Transformation

Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$
Setze $f(F) := (G_F, m)$ mit $G_F := (V, E)$, wobei
$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}}\}$

Es sei $f(F) \in CLIQUE$
Dann hat G_F eine m-Clique V_c
Per Konstruktion von E enthält V_c aus jedem der Blöcke $b_i := \{v_{ij} \mid 1 \leq j \leq 3\}$ genau einen Knoten und keine zwei Knoten in V_c sind komplementär $(z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}})$
Eine Belegung der zugehörigen z_{ij} mit 1 erfüllt alle Klauseln k_i von F
Also gilt $F \in 3SAT$

Korrektheit der Transformation

Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$
Setze $f(F) := (G_F, m)$ mit $G_F := (V, E)$, wobei
$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}}\}$

Es sei $f(F) \in CLIQUE$
Dann hat G_F eine m-Clique V_c
Per Konstruktion von E enthält V_c aus jedem der Blöcke $b_i := \{v_{ij} \mid 1 \leq j \leq 3\}$ genau einen Knoten und keine zwei Knoten in V_c sind komplementär ($z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}}$)
Eine Belegung der zugehörigen z_{ij} mit 1 erfüllt alle Klauseln k_i von F
Also gilt $F \in 3SAT$

Gilt umgekehrt $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der z_{ij}

Korrektheit der Transformation

Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$
Setze $f(F) := (G_F, m)$ mit $G_F := (V, E)$, wobei
$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}}\}$

Es sei $f(F) \in CLIQUE$
Dann hat G_F eine m-Clique V_c
Per Konstruktion von E enthält V_c aus jedem der Blöcke $b_i := \{v_{ij} \mid 1 \leq j \leq 3\}$ genau einen Knoten und keine zwei Knoten in V_c sind komplementär ($z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}}$)
Eine Belegung der zugehörigen z_{ij} mit 1 erfüllt alle Klauseln k_i von F
Also gilt $F \in 3SAT$

Gilt umgekehrt $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der z_{ij}
Wähle aus jeder Klausel k_i ein Literal mit dem Wert 1

Korrektheit der Transformation

Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$
Setze $f(F) := (G_F, m)$ mit $G_F := (V, E)$, wobei
$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}}\}$

Es sei $f(F) \in CLIQUE$
Dann hat G_F eine m-Clique V_c
Per Konstruktion von E enthält V_c aus jedem der Blöcke $b_i := \{v_{ij} \mid 1 \leq j \leq 3\}$ genau einen Knoten und keine zwei Knoten in V_c sind komplementär ($z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}}$)
Eine Belegung der zugehörigen z_{ij} mit 1 erfüllt alle Klauseln k_i von F
Also gilt $F \in 3SAT$

Gilt umgekehrt $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der z_{ij}
Wähle aus jeder Klausel k_i ein Literal mit dem Wert 1
Die zugehörigen Knoten bilden eine m-Clique in G_F

Korrektheit der Transformation

Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$
Setze $f(F) := (G_F, m)$ mit $G_F := (V, E)$, wobei
$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}}\}$

Es sei $f(F) \in CLIQUE$
Dann hat G_F eine m-Clique V_c
Per Konstruktion von E enthält V_c aus jedem der Blöcke $b_i := \{v_{ij} \mid 1 \leq j \leq 3\}$ genau einen Knoten und keine zwei Knoten in V_c sind komplementär $(z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}})$
Eine Belegung der zugehörigen z_{ij} mit 1 erfüllt alle Klauseln k_i von F
Also gilt $F \in 3SAT$

Gilt umgekehrt $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der z_{ij}
Wähle aus jeder Klausel k_i ein Literal mit dem Wert 1
Die zugehörigen Knoten bilden eine m-Clique in G_F
Also gilt $f(F) \in CLIQUE$

Korrektheit der Transformation

Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$
Setze $f(F) := (G_F, m)$ mit $G_F := (V, E)$, wobei
$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$ und $E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}}\}$

Es sei $f(F) \in CLIQUE$
Dann hat G_F eine m-Clique V_c
Per Konstruktion von E enthält V_c aus jedem der Blöcke $b_i := \{v_{ij} \mid 1 \leq j \leq 3\}$ genau einen Knoten und keine zwei Knoten in V_c sind komplementär $(z_{ij} \neq \underline{z_{i'j'}})$
Eine Belegung der zugehörigen z_{ij} mit 1 erfüllt alle Klauseln k_i von F
Also gilt $F \in 3SAT$

Gilt umgekehrt $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der z_{ij}
Wähle aus jeder Klausel k_i ein Literal mit dem Wert 1
Die zugehörigen Knoten bilden eine m-Clique in G_F
Also gilt $f(F) \in CLIQUE$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{3SAT \leq_p CLIQUE}$$

Vertex Cover Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{VC} = \{ (G,k) \mid G \text{ Graph } \wedge\ (\exists V' \subseteq V.\ |V'| \leq k\ \wedge\ V' \text{ ist Knotenüberdeckung von } G)\}$$

- $\boldsymbol{VC \in \mathcal{NP}}$:

Vertex Cover Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{VC} = \{\, (G,k) \mid G \text{ Graph } \wedge\ (\exists V' \subseteq V.\ |V'| \leq k \ \wedge\ V' \text{ ist Knotenüberdeckung von } G)\}$$

- $\boldsymbol{VC \in \mathcal{NP}}$**:**
  - Rate eine Kantenmenge $V' \subseteq V$

Vertex Cover Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{VC} = \{\, (G,k) \mid G \text{ Graph } \wedge\ (\exists V' \subseteq V.\ |V'| \leq k \ \wedge\ V' \text{ ist Knotenüberdeckung von } G)\}$$

- $\boldsymbol{VC \in \mathcal{NP}}$**:**
  - Rate eine Kantenmenge $V' \subseteq V$
  - Prüfe $|V'| \leq k$ *maximal* $|V'|$ *Schritte*

Vertex Cover Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{VC} = \{\, (G,k) \mid G \text{ Graph } \wedge\ (\exists V' \subseteq V.\ |V'| \leq k \ \wedge\ V' \text{ ist Knotenüberdeckung von } G)\}$$

- $\boldsymbol{VC \in \mathcal{NP}}$**:**
  - Rate eine Kantenmenge $V' \subseteq V$
  - Prüfe $|V'| \leq k$ — *maximal* $|V'|$ *Schritte*
  - Prüfe: $\forall \{v, v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$ — *maximal* $|V'| * |E| \leq |V|^3$ *Schritte*

Vertex Cover Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{VC} = \{\, (G,k) \mid G \text{ Graph } \wedge\ (\exists V' \subseteq V.\ |V'| \leq k \ \wedge\ V' \text{ ist Knotenüberdeckung von } G)\}$$

- $\boldsymbol{VC \in \mathcal{NP}}$**:**
  - Rate eine Kantenmenge $V' \subseteq V$
  - Prüfe $|V'| \leq k$ — *maximal* $|V'|$ *Schritte*
  - Prüfe: $\forall \{v, v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$ — *maximal* $|V'| * |E| \leq |V|^3$ *Schritte*

- $\boldsymbol{CLIQUE \leq_p VC}$

Vertex Cover Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig

$$\boldsymbol{VC} = \{\, (G,k) \mid G \text{ Graph } \wedge\ (\exists V' \subseteq V.\ |V'| \leq k \ \wedge\ V' \text{ ist Knotenüberdeckung von } G)\}$$

- $\boldsymbol{VC \in \mathcal{NP}}$**:**
  - Rate eine Kantenmenge $V' \subseteq V$
  - Prüfe $|V'| \leq k$ — *maximal* $|V'|$ *Schritte*
  - Prüfe: $\forall \{v, v'\} \in E.\ v \in V' \vee v' \in V'$ — *maximal* $|V'| * |E| \leq |V|^3$ *Schritte*

- $\boldsymbol{CLIQUE \leq_p VC}$
  - Bereits beweisen

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Graphenprobleme

- **Independent Set** $\boldsymbol{CLIQUE \leq_p IS}$
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es in G eine unabhängige Knotenmenge der Größe k?

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Graphenprobleme

- **Independent Set** $\quad \boldsymbol{CLIQUE \leq_p IS}$
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es in G eine unabhängige Knotenmenge der Größe k?

$$\boldsymbol{IS} = \{\ (G,k) \mid G = (V,E) \text{ Graph} \\ \wedge\ \exists V_i \subseteq V.\ |V_c| \geq k\ \wedge\ \forall u, v \in V_i.\ \{u,v\} \notin E\ \}$$

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Graphenprobleme

- **Independent Set** $\quad CLIQUE \leq_p IS$
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es in G eine unabhängige Knotenmenge der Größe k?

  $$IS = \{ (G, k) \mid G = (V, E) \text{ Graph} \wedge \exists V_i \subseteq V.\ |V_c| \geq k \wedge \forall u, v \in V_i.\ \{u, v\} \notin E \}$$

- **Subgraph Isomorphism** $\quad CLIQUE \leq_p SGI$
  - Gegeben zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$.
  - Gibt es einen Subgraphen H von G_1, der isomorph zu G_2 ist?

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Graphenprobleme

- **Independent Set** $\quad CLIQUE \leq_p IS$
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es in G eine unabhängige Knotenmenge der Größe k?

  $IS = \{ (G, k) \mid G = (V, E)$ Graph
  $\wedge\ \exists V_i \subseteq V.\ |V_c| \geq k\ \wedge\ \forall u, v \in V_i.\ \{u, v\} \notin E \}$

- **Subgraph Isomorphism** $\quad CLIQUE \leq_p SGI$
  - Gegeben zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$.
  - Gibt es einen Subgraphen H von G_1, der isomorph zu G_2 ist?

  $SGI = \{ G_1, G_2) \mid G_1, G_2$ Graphen $\wedge\ \exists H$ Graph. $H \sqsubseteq G_1\ \wedge\ H \cong G_2 \}$

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Graphenprobleme

- **Independent Set** $\quad \boldsymbol{CLIQUE \leq_p IS}$
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es in G eine unabhängige Knotenmenge der Größe k?

  $\boldsymbol{IS} = \{ (G, k) \mid G = (V, E)$ Graph
  $\wedge\ \exists V_i \subseteq V.\ |V_c| \geq k\ \wedge\ \forall u, v \in V_i.\ \{u, v\} \notin E \}$

- **Subgraph Isomorphism** $\quad \boldsymbol{CLIQUE \leq_p SGI}$
  - Gegeben zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$.
  - Gibt es einen Subgraphen H von G_1, der isomorph zu G_2 ist?

  $\boldsymbol{SGI} = \{ G_1, G_2) \mid G_1, G_2$ Graphen $\wedge\ \exists H$ Graph. $H \sqsubseteq G_1\ \wedge\ H \cong G_2 \}$

- **Largest Common Subgraph** $\quad \boldsymbol{SGI \leq_p LCS}$
  - Gegeben Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ und eine Zahl $k \leq |G_1|$
  - Gibt es isomorphe Subgraphen H_1 von G_1 und H_2 von G_2 der Größe k?

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Graphenprobleme

- **Independent Set** $\quad CLIQUE \leq_p IS$
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es in G eine unabhängige Knotenmenge der Größe k?

  $IS = \{ (G, k) \mid G = (V, E) \text{ Graph} \wedge \exists V_i \subseteq V.\ |V_c| \geq k \wedge \forall u, v \in V_i.\ \{u, v\} \notin E \}$

- **Subgraph Isomorphism** $\quad CLIQUE \leq_p SGI$
  - Gegeben zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$.
  - Gibt es einen Subgraphen H von G_1, der isomorph zu G_2 ist?

  $SGI = \{ G_1, G_2) \mid G_1, G_2 \text{ Graphen} \wedge \exists H \text{ Graph}.\ H \sqsubseteq G_1 \wedge H \cong G_2 \}$

- **Largest Common Subgraph** $\quad SGI \leq_p LCS$
  - Gegeben Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ und eine Zahl $k \leq |G_1|$
  - Gibt es isomorphe Subgraphen H_1 von G_1 und H_2 von G_2 der Größe k?

  $LCS = \{ (G_1, G_2, k) \mid G_1, G_2 \text{ Graphen} \wedge k \leq |G_1 \wedge \exists H_1, H_2 \text{ Graphen}. H_1 \sqsubseteq G_1 \wedge H_2 \sqsubseteq G_2 \wedge H_1 \cong H_2 \wedge |H_1| \geq k \}$

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Graphenprobleme

- **Directed Hamiltonian Circuit** $\quad 3SAT \leq_p DHC$
  - Gegeben ein gerichteter Graph G
  - Gibt es in G einen Hamilton'schen Kreis?

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Graphenprobleme

- **Directed Hamiltonian Circuit** $\quad 3SAT \leq_p DHC$
  - Gegeben ein gerichteter Graph G
  - Gibt es in G einen Hamilton'schen Kreis?

$$DHC = \{\, G \mid G = (V, E) \text{ gerichteter Graph} \\ \wedge\ \exists \pi{:}\{1..n\} \to \{1..n\}.\ \pi \text{ Hamilton'scher Kreis in } G \,\}$$

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Graphenprobleme

- **Directed Hamiltonian Circuit** $\quad 3SAT \leq_p DHC$
  - Gegeben ein gerichteter Graph G
  - Gibt es in G einen Hamilton'schen Kreis?

  $DHC = \{\, G \mid G = (V, E)$ gerichteter Graph
  $\wedge\ \exists \pi{:}\{1..n\} \to \{1..n\}.\ \pi$ Hamilton'scher Kreis in $G\ \}$

- **Hamiltonian Circuit** $\quad DHC \leq_p HC$
  - Gegeben ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
  - Gibt es in G einen Hamilton'schen Kreis?

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Graphenprobleme

- **Directed Hamiltonian Circuit** $\quad 3SAT \leq_p DHC$
  - Gegeben ein gerichteter Graph G
  - Gibt es in G einen Hamilton'schen Kreis?

  $DHC = \{ G \mid G = (V, E)$ gerichteter Graph
  $\wedge\ \exists \pi{:}\{1..n\} \to \{1..n\}.\ \pi$ Hamilton'scher Kreis in $G\ \}$

- **Hamiltonian Circuit** $\quad DHC \leq_p HC$
  - Gegeben ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
  - Gibt es in G einen Hamilton'schen Kreis?

  $HC = \{ G \mid G = (V, E)$ Graph $\wedge\ \exists \pi{:}\{1..n\} \to \{1..n\}.$
  π Hamilton'scher Kreis in $G\ \}$

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Graphenprobleme

- **Directed Hamiltonian Circuit** $\quad 3SAT \leq_p DHC$
  - Gegeben ein gerichteter Graph G
  - Gibt es in G einen Hamilton'schen Kreis?

  $DHC = \{ G \mid G = (V, E)$ gerichteter Graph
  $\wedge\ \exists \pi{:}\{1..n\} \to \{1..n\}.\ \pi$ Hamilton'scher Kreis in $G\ \}$

- **Hamiltonian Circuit** $\quad DHC \leq_p HC$
  - Gegeben ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
  - Gibt es in G einen Hamilton'schen Kreis?

  $HC = \{ G \mid G = (V, E)$ Graph $\wedge\ \exists \pi{:}\{1..n\} \to \{1..n\}.$
  π Hamilton'scher Kreis in $G\ \}$

- **Travelling Salesman Problem** $\quad HC \leq_p TSP$
  - Gegeben n Städte, Reisekostentabelle c_{ij}, Kostenbeschränkung B
  - Gibt es eine Rundreise durch alle n Städte, deren Kosten unter B liegt?

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Graphenprobleme

- **Directed Hamiltonian Circuit** $\quad 3SAT \leq_p DHC$
  - Gegeben ein gerichteter Graph G
  - Gibt es in G einen Hamilton'schen Kreis?

  $DHC = \{ G \mid G = (V, E)$ gerichteter Graph
  $\wedge\ \exists \pi{:}\{1..n\} \to \{1..n\}.\ \pi$ Hamilton'scher Kreis in $G\ \}$

- **Hamiltonian Circuit** $\quad DHC \leq_p HC$
  - Gegeben ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
  - Gibt es in G einen Hamilton'schen Kreis?

  $HC = \{ G \mid G = (V, E)$ Graph $\wedge\ \exists \pi{:}\{1..n\} \to \{1..n\}.$
  π Hamilton'scher Kreis in $G\ \}$

- **Travelling Salesman Problem** $\quad HC \leq_p TSP$
  - Gegeben n Städte, Reisekostentabelle c_{ij}, Kostenbeschränkung B
  - Gibt es eine Rundreise durch alle n Städte, deren Kosten unter B liegt?

  $TSP = \{ c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ B \mid B, c_{ij} \in \mathbb{N} \wedge\ \exists \pi{:}\{1..n\} \to \{1..n\}.\ \pi$ bijektiv
  $\wedge\ \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B\ \}$

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme

- **Knapsack: (Rucksack-Bepackung)** $\boldsymbol{3SAT \leq_p KP}$
  - Gegeben n Objekte mit Gewichten $g_1, ..., g_n$ und Nutzwerten $a_1, ...a_n$
  - Rucksack mit Gewichtsschranke G, Minimalnutzwert A.
  - Gibt es eine Bepackung mit Mindestnutzen A und Maximalgewicht G?

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme

- **Knapsack: (Rucksack-Bepackung)** $\boldsymbol{3SAT \leq_p KP}$
  - Gegeben n Objekte mit Gewichten $g_1, ..., g_n$ und Nutzwerten $a_1, ...a_n$
  - Rucksack mit Gewichtsschranke G, Minimalnutzwert A.
  - Gibt es eine Bepackung mit Mindestnutzen A und Maximalgewicht G?

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme

- **Knapsack: (Rucksack-Bepackung)** $\boldsymbol{3SAT \leq_p KP}$
  - Gegeben n Objekte mit Gewichten $g_1, ..., g_n$ und Nutzwerten $a_1, ...a_n$
  - Rucksack mit Gewichtsschranke G, Minimalnutzwert A.
  - Gibt es eine Bepackung mit Mindestnutzen A und Maximalgewicht G?

  $\boldsymbol{KP} = \{ (g_1..g_n, a_1..a_n, G, A) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}. \Sigma_{i \in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i \in J} a_i \geq A \}$

- **Partitionsproblem** $\boldsymbol{KP \leq_p PART}$
  - Gegeben n Objekte mit Wert $b_1, ..., b_n$.
  - Gibt es eine Aufteilung der Objekte in zwei gleichwertige Stapel?

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme

- **Knapsack: (Rucksack-Bepackung)** $\boldsymbol{3SAT \leq_p KP}$
  - Gegeben n Objekte mit Gewichten $g_1, ..., g_n$ und Nutzwerten $a_1, ...a_n$
  - Rucksack mit Gewichtsschranke G, Minimalnutzwert A.
  - Gibt es eine Bepackung mit Mindestnutzen A und Maximalgewicht G?

  $\boldsymbol{KP} = \{ (g_1..g_n, a_1..a_n, G, A) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}. \Sigma_{i \in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i \in J} a_i \geq A \}$

- **Partitionsproblem** $\boldsymbol{KP \leq_p PART}$
  - Gegeben n Objekte mit Wert $b_1, ..., b_n$.
  - Gibt es eine Aufteilung der Objekte in zwei gleichwertige Stapel?

  $\boldsymbol{PART} = \{ b_1, ..., b_n \mid b_i \in \mathbb{N} \wedge \exists I \subseteq \{1..n\}. \sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in \{1..n\} - I} b_i \}$

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme

- **Knapsack: (Rucksack-Bepackung)** $\boldsymbol{3SAT \leq_p KP}$
  - Gegeben n Objekte mit Gewichten $g_1, ..., g_n$ und Nutzwerten $a_1, ...a_n$
  - Rucksack mit Gewichtsschranke G, Minimalnutzwert A.
  - Gibt es eine Bepackung mit Mindestnutzen A und Maximalgewicht G?

  $\boldsymbol{KP} = \{ (g_1..g_n, a_1..a_n, G, A) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}. \Sigma_{i \in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i \in J} a_i \geq A \}$

- **Partitionsproblem** $\boldsymbol{KP \leq_p PART}$
  - Gegeben n Objekte mit Wert $b_1, ..., b_n$.
  - Gibt es eine Aufteilung der Objekte in zwei gleichwertige Stapel?

  $\boldsymbol{PART} = \{ b_1, ..., b_n \mid b_i \in \mathbb{N} \wedge \exists I \subseteq \{1..n\}. \sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in \{1..n\} - I} b_i \}$

- **Binpacking** $\boldsymbol{PART \leq_p BPP}$
  - Gegeben n Objekte der Größe $a_1, ...a_n$ und k Behälter der Größe b
  - Kann man alle Objekte in den Behältern unterbringen?

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme

- **Knapsack: (Rucksack-Bepackung)** $\boldsymbol{3SAT \leq_p KP}$
  - Gegeben n Objekte mit Gewichten $g_1, ..., g_n$ und Nutzwerten $a_1, ...a_n$
  - Rucksack mit Gewichtsschranke G, Minimalnutzwert A.
  - Gibt es eine Bepackung mit Mindestnutzen A und Maximalgewicht G?

  $\boldsymbol{KP} = \{ (g_1..g_n, a_1..a_n, G, A) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}. \Sigma_{i \in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i \in J} a_i \geq A \}$

- **Partitionsproblem** $\boldsymbol{KP \leq_p PART}$
  - Gegeben n Objekte mit Wert $b_1, ..., b_n$.
  - Gibt es eine Aufteilung der Objekte in zwei gleichwertige Stapel?

  $\boldsymbol{PART} = \{ b_1, ..., b_n \mid b_i \in \mathbb{N} \wedge \exists I \subseteq \{1..n\}. \sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in \{1..n\}-I} b_i \}$

- **Binpacking** $\boldsymbol{PART \leq_p BPP}$
  - Gegeben n Objekte der Größe $a_1, ...a_n$ und k Behälter der Größe b
  - Kann man alle Objekte in den Behältern unterbringen?

  $\boldsymbol{BPP} = \{ a_1, ...a_n, b, k) \mid a_i, b, k \in \mathbb{N} \wedge \exists f : \{1..n\} \rightarrow \{1..k\}. \forall j \leq k. \sum_{i \in \{i \mid f(i)=j\}} a_i \leq b \}$

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme

- **Graph Coloring** $\boldsymbol{3SAT \leq_p GC}$
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es eine Färbung von V mit k verschiedenen Farben, so daß verbundene Konten verschieden Farben haben?

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme

- **Graph Coloring** $\quad 3SAT \leq_p GC$
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es eine Färbung von V mit k verschiedenen Farben, so daß verbundene Konten verschieden Farben haben?

$$GC = \{ (G, k) \mid G=(V, E) \text{ Graph } \wedge \exists f_V : V \to \{1..k\}. \forall \{u, v\} \in E. f_V(u) \neq f_V(v) \}$$

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme

- **Graph Coloring** $\quad 3SAT \leq_p GC$
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es eine Färbung von V mit k verschiedenen Farben, so daß verbundene Konten verschieden Farben haben?

  $$GC = \{ (G, k) \mid G=(V, E) \text{ Graph } \wedge\ \exists f_V : V \to \{1..k\}. \forall \{u, v\} \in E. f_V(u) \neq f_V(v) \}$$

- **Multiprozessor-Scheduling** $\quad MSP \doteq BPP$
  - Gegeben n Prozesse j_i mit Laufzeit $t(j_i)$, m Prozessoren, Deadline t_D.
  - Gibt es eine Verteilung der Prozesse auf die Prozessoren, so daß bei Startzeit t_0 alle Prozesse vor der Zeit t_D beendet sind?

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme

- **Graph Coloring** $\quad 3SAT \leq_p GC$
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es eine Färbung von V mit k verschiedenen Farben, so daß verbundene Konten verschieden Farben haben?

  $$GC = \{ (G,k) \mid G=(V,E) \text{ Graph } \wedge\ \exists f_V : V \to \{1..k\}. \forall \{u,v\} \in E. f_V(u) \neq f_V(v) \}$$

- **Multiprozessor-Scheduling** $\quad MSP \mathrel{\hat{=}} BPP$
  - Gegeben n Prozesse j_i mit Laufzeit $t(j_i)$, m Prozessoren, Deadline t_D.
  - Gibt es eine Verteilung der Prozesse auf die Prozessoren, so daß bei Startzeit t_0 alle Prozesse vor der Zeit t_D beendet sind?

- **Integer Linear Programming** $\quad 3SAT \leq_p ILP$
  - Gegeben eine $k \times k$ Matrix A und einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{Z}^k$
  - Gibt es ein $\vec{x} \in \mathbb{Z}^k$, welches das lineare Ungleichungssystem $A * \vec{x} \geq \vec{b}$ löst?

Weitere $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme

- **Graph Coloring** $\quad 3SAT \leq_p GC$
  - Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ der Größe n und eine Zahl $k \leq n$.
  - Gibt es eine Färbung von V mit k verschiedenen Farben, so daß verbundene Konten verschieden Farben haben?

  $GC = \{ (G, k) \mid G=(V, E) \text{ Graph } \wedge\ \exists f_V : V \to \{1..k\}. \forall \{u, v\} \in E. f_V(u) \neq f_V(v) \}$

- **Multiprozessor-Scheduling** $\quad MSP \mathrel{\hat{=}} BPP$
  - Gegeben n Prozesse j_i mit Laufzeit $t(j_i)$, m Prozessoren, Deadline t_D.
  - Gibt es eine Verteilung der Prozesse auf die Prozessoren, so daß bei Startzeit t_0 alle Prozesse vor der Zeit t_D beendet sind?

- **Integer Linear Programming** $\quad 3SAT \leq_p ILP$
  - Gegeben eine $k \times k$ Matrix A und einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{Z}^k$
  - Gibt es ein $\vec{x} \in \mathbb{Z}^k$, welches das lineare Ungleichungssystem $A * \vec{x} \geq \vec{b}$ löst?

- **Zusammengesetztheit** (vermutlich nicht $\mathcal{NP}$-vollständig)
  - Gegeben eine n-stellige Zahl $x \in \mathbb{N}$
  - Gibt es zwei natürliche Zahlen p und q mit $x = p * q$?

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Rucksackproblems

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- $\boldsymbol{KP} \in \boldsymbol{\mathcal{NP}}$:

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Rucksackproblems

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- $\boldsymbol{KP \in \mathcal{NP}}$:
  - Rate Menge von Gegenständen Kantenmenge $J{\subseteq}\{1..n\}$

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Rucksackproblems

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- $\boldsymbol{KP \in \mathcal{NP}}$:
  - Rate Menge von Gegenständen Kantenmenge $J{\subseteq}\{1..n\}$
  - Prüfe $\Sigma_{i\in J} g_i \leq G$ und $\Sigma_{i\in J} a_i \geq A$ *maximal* $2|J|$ *Schritte*

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Rucksackproblems

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- $\boldsymbol{KP \in \mathcal{NP}}$**:**
  - Rate Menge von Gegenständen Kantenmenge $J{\subseteq}\{1..n\}$
  - Prüfe $\Sigma_{i\in J} g_i \leq G$ und $\Sigma_{i\in J} a_i \geq A$ *maximal* $2|J|$ *Schritte*
- **Zeige** $\boldsymbol{3SAT \leq_p KP}$

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Rucksackproblems

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- $\boldsymbol{KP \in \mathcal{NP}}$**:**
  - Rate Menge von Gegenständen Kantenmenge $J{\subseteq}\{1..n\}$
  - Prüfe $\Sigma_{i\in J} g_i \leq G$ und $\Sigma_{i\in J} a_i \geq A$ *maximal* $2|J|$ *Schritte*
- **Zeige** $\boldsymbol{3SAT \leq_p KP}$
  - Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Rucksackproblems

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- $\boldsymbol{KP \in \mathcal{NP}}$:
  - Rate Menge von Gegenständen Kantenmenge $J{\subseteq}\{1..n\}$
  - Prüfe $\Sigma_{i\in J} g_i \leq G$ und $\Sigma_{i\in J} a_i \geq A$ *maximal* $2|J|$ *Schritte*
- **Zeige** $\boldsymbol{3SAT \leq_p KP}$
  - Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$
  - Konstruiere Rucksackproblem $f(F) \equiv (g_1, ..g_{2m+2n}, a_1, ..a_{2m+2n}, G, A)$ wobei die a_j und g_j $m+n$-stellige Zahlen sind, welche die Anzahl der Vorkommen von Literalen in den Klauseln codieren

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Rucksackproblems

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- $\boldsymbol{KP \in \mathcal{NP}}$:
  - Rate Menge von Gegenständen Kantenmenge $J{\subseteq}\{1..n\}$
  - Prüfe $\Sigma_{i\in J} g_i \leq G$ und $\Sigma_{i\in J} a_i \geq A$ *maximal* $2|J|$ *Schritte*
- **Zeige** $\boldsymbol{3SAT \leq_p KP}$
  - Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$
  - Konstruiere Rucksackproblem $f(F) \equiv (g_1, ..g_{2m+2n}, a_1, ..a_{2m+2n}, G, A)$
    wobei die a_j und g_j $m+n$-stellige Zahlen sind, welche die Anzahl der Vorkommen von Literalen in den Klauseln codieren
    - a_j, $j{\leq}n$: Stelle $i{\leq}m$ ist Anzahl der x_j in k_i, Stelle $m{+}j$ ist 1, sonst 0
    - $b_j \equiv a_{n+j}$, $j{\leq}n$: Stelle $i{\leq}m$ ist Anzahl der $\bar{x}_j$ in k_i, Stelle $m{+}j$ ist 1, sonst 0
    - $c_i \equiv a_{2n+i}$, $i{\leq}m$: Stelle $m{+}i$ ist 1, sonst 0
    - $d_i \equiv a_{2n+m+i}$, $i{\leq}m$: Stelle $m{+}i$ ist 2, sonst 0
    - $g_j{=}a_j$ für alle j $\quad A \equiv G = \underbrace{4\ldots4}_{m-mal}\underbrace{1\ldots1}_{n-mal}$

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Rucksackproblems

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- $\boldsymbol{KP \in \mathcal{NP}}$:
  - Rate Menge von Gegenständen Kantenmenge $J{\subseteq}\{1..n\}$
  - Prüfe $\Sigma_{i\in J} g_i \leq G$ und $\Sigma_{i\in J} a_i \geq A$ *maximal* $2|J|$ *Schritte*
- **Zeige** $\boldsymbol{3SAT \leq_p KP}$
  - Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$
  - Konstruiere Rucksackproblem $f(F) \equiv (g_1, ..g_{2m+2n}, a_1, ..a_{2m+2n}, G, A)$ wobei die a_j und g_j $m+n$-stellige Zahlen sind, welche die Anzahl der Vorkommen von Literalen in den Klauseln codieren
    - a_j, $j{\leq}n$: Stelle $i{\leq}m$ ist Anzahl der x_j in k_i, Stelle $m{+}j$ ist 1, sonst 0
    - $b_j \equiv a_{n+j}$, $j{\leq}n$: Stelle $i{\leq}m$ ist Anzahl der $\bar{x}_j$ in k_i, Stelle $m{+}j$ ist 1, sonst 0
    - $c_i \equiv a_{2n+i}$, $i{\leq}m$: Stelle $m{+}i$ ist 1, sonst 0
    - $d_i \equiv a_{2n+m+i}$, $i{\leq}m$: Stelle $m{+}i$ ist 2, sonst 0
    - $g_j{=}a_j$ für alle j $\quad A \equiv G = \underbrace{4\ldots4}_{m-mal}\underbrace{1\ldots1}_{n-mal}$
  - f ist in polynomieller Zeit berechenbar

Codierung einer Formel als Rucksackproblem

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$$

Codierung einer Formel als Rucksackproblem

$F = (k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$

$A = 444\,1111$

$a_1 = 100\,1000$	$b_1 = 011\,1000$	$c_1 = 100\,0000$	$d_1 = 200\,0000$
$a_2 = 010\,0100$	$b_2 = 101\,0100$	$c_2 = 010\,0000$	$d_2 = 020\,0000$
$a_3 = 100\,0010$	$b_3 = 001\,0010$	$c_3 = 001\,0000$	$d_3 = 002\,0000$
$a_4 = 000\,0001$	$b_4 = 010\,0001$		

Codierung einer Formel als Rucksackproblem

$F = (k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$

$A = 444\,1111$

$a_1 = 100\,1000$	$b_1 = 011\,1000$	$c_1 = 100\,0000$	$d_1 = 200\,0000$
$a_2 = 010\,0100$	$b_2 = 101\,0100$	$c_2 = 010\,0000$	$d_2 = 020\,0000$
$a_3 = 100\,0010$	$b_3 = 001\,0010$	$c_3 = 001\,0000$	$d_3 = 002\,0000$
$a_4 = 000\,0001$	$b_4 = 010\,0001$		

$(1, 1, 0, 0)$ ist erfüllende Belegung

Codierung einer Formel als Rucksackproblem

$F = (k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$

$A = 444\,1111$

$a_1 = 100\,1000$	$b_1 = 011\,1000$	$c_1 = 100\,0000$	$d_1 = 200\,0000$
$a_2 = 010\,0100$	$b_2 = 101\,0100$	$c_2 = 010\,0000$	$d_2 = 020\,0000$
$a_3 = 100\,0010$	$b_3 = 001\,0010$	$c_3 = 001\,0000$	$d_3 = 002\,0000$
$a_4 = 000\,0001$	$b_4 = 010\,0001$		

$(1, 1, 0, 0)$ ist erfüllende Belegung

$$a_1 + a_2 + b_3 + b_4 + c_1 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 = A$$

Korrektheit der Transformation

- a_j: Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der x_j in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
- b_j : Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der $\bar{x}_j$ in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
- c_i: Stelle $m+i$ ist 1, sonst 0 $\quad$ d_i: Stelle $m+i$ ist 2, sonst 0
- $g_j = a_j$ für alle j $\quad$ $A \equiv G = \underbrace{4 \ldots 4}_{m-mal} \underbrace{1 \ldots 1}_{n-mal}$

Korrektheit der Transformation

- a_j: Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der x_j in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
- b_j : Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der $\bar{x}_j$ in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
- c_i: Stelle $m+i$ ist 1, sonst 0 $\quad$ d_i: Stelle $m+i$ ist 2, sonst 0
- $g_j = a_j$ für alle j $\quad$ $A \equiv G = \underbrace{4 \ldots 4}_{m-mal} \underbrace{1 \ldots 1}_{n-mal}$

Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

Korrektheit der Transformation

- a_j: Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der x_j in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
- b_j : Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der $\bar{x}_j$ in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
- c_i: Stelle $m+i$ ist 1, sonst 0 $\quad$ d_i: Stelle $m+i$ ist 2, sonst 0
- $g_j = a_j$ für alle j $\quad$ $A \equiv G = \underbrace{4 \ldots 4}_{m-mal} \underbrace{1 \ldots 1}_{n-mal}$

Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

Für $j \leq n$ wähle a_j falls $x_j = 1$ und b_j sonst

Korrektheit der Transformation

- a_j: Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der x_j in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
- b_j : Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der $\bar{x}_j$ in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
- c_i: Stelle $m+i$ ist 1, sonst 0 $\quad$ d_i: Stelle $m+i$ ist 2, sonst 0
- $g_j = a_j$ für alle j $\quad$ $A \equiv G = \underbrace{4 \ldots 4}_{m-mal} \underbrace{1 \ldots 1}_{n-mal}$

Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

Für $j \leq n$ wähle a_j falls $x_j = 1$ und b_j sonst

$\mapsto$ In der Summe haben alle Stellen $m+j$ den Wert 1

$\mapsto$ Da k_i erfüllt wird, haben die Stellen $i \leq n$ einen Wert aus $\{1..3\}$

Korrektheit der Transformation

- a_j: Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der x_j in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
- b_j : Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der $\bar{x}_j$ in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
- c_i: Stelle $m+i$ ist 1, sonst 0 $\quad$ d_i: Stelle $m+i$ ist 2, sonst 0
- $g_j = a_j$ für alle j $\quad$ $A \equiv G = \underbrace{4 \ldots 4}_{m-mal} \underbrace{1 \ldots 1}_{n-mal}$

Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

Für $j \leq n$ wähle a_j falls $x_j = 1$ und b_j sonst

$\mapsto$ In der Summe haben alle Stellen $m+j$ den Wert 1

$\mapsto$ Da k_i erfüllt wird, haben die Stellen $i \leq n$ einen Wert aus $\{1..3\}$

Die Stellen $i \leq n$ können mit c_i und d_i zu 4 ergänzt werden

Korrektheit der Transformation

- a_j: Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der x_j in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
- b_j : Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der $\bar{x}_j$ in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
- c_i: Stelle $m+i$ ist 1, sonst 0 $\quad$ d_i: Stelle $m+i$ ist 2, sonst 0
- $g_j = a_j$ für alle j $\quad$ $A \equiv G = \underbrace{4 \ldots 4}_{m-mal} \underbrace{1 \ldots 1}_{n-mal}$

Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

Für $j \leq n$ wähle a_j falls $x_j = 1$ und b_j sonst

$\mapsto$ In der Summe haben alle Stellen $m+j$ den Wert 1

$\mapsto$ Da k_i erfüllt wird, haben die Stellen $i \leq n$ einen Wert aus $\{1..3\}$

Die Stellen $i \leq n$ können mit c_i und d_i zu 4 ergänzt werden Also $f(F) \in KP$

Korrektheit der Transformation

· a_j: Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der x_j in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0

· b_j : Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der $\bar{x}_j$ in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0

· c_i: Stelle $m+i$ ist 1, sonst 0 $\quad$ d_i: Stelle $m+i$ ist 2, sonst 0

· $g_j = a_j$ für alle j $\quad A \equiv G = \underbrace{4 \ldots 4}_{m-mal}\underbrace{1 \ldots 1}_{n-mal}$

Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

Für $j \leq n$ wähle a_j falls $x_j = 1$ und b_j sonst

$\mapsto$ In der Summe haben alle Stellen $m+j$ den Wert 1

$\mapsto$ Da k_i erfüllt wird, haben die Stellen $i \leq n$ einen Wert aus $\{1..3\}$

Die Stellen $i \leq n$ können mit c_i und d_i zu 4 ergänzt werden Also $f(F) \in KP$

Gilt $f(F) \in KP$, so gibt es eine Bepackung die genau den Wert A ergibt

Korrektheit der Transformation

· a_j: Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der x_j in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0

· b_j : Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der $\bar{x}_j$ in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0

· c_i: Stelle $m+i$ ist 1, sonst 0 $\quad$ d_i: Stelle $m+i$ ist 2, sonst 0

· $g_j = a_j$ für alle j $\quad A \equiv G = \underbrace{4 \ldots 4}_{m-mal}\underbrace{1 \ldots 1}_{n-mal}$

Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

Für $j \leq n$ wähle a_j falls $x_j = 1$ und b_j sonst

$\mapsto$ In der Summe haben alle Stellen $m+j$ den Wert 1

$\mapsto$ Da k_i erfüllt wird, haben die Stellen $i \leq n$ einen Wert aus $\{1..3\}$

Die Stellen $i \leq n$ können mit c_i und d_i zu 4 ergänzt werden Also $f(F) \in KP$

Gilt $f(F) \in KP$, so gibt es eine Bepackung die genau den Wert A ergibt

Die Bepackung enthält für $j \leq n$ entweder a_j (wähle $x_j := 1$) oder b_j ($x_j := 0$)

Korrektheit der Transformation

· a_j: Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der x_j in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
· b_j : Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der $\bar{x}_j$ in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
· c_i: Stelle $m+i$ ist 1, sonst 0 $\quad$ d_i: Stelle $m+i$ ist 2, sonst 0
· $g_j = a_j$ für alle j $\quad$ $A \equiv G = \underbrace{4 \ldots 4}_{m-mal}\underbrace{1 \ldots 1}_{n-mal}$

Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j
Für $j \leq n$ wähle a_j falls $x_j = 1$ und b_j sonst
$\mapsto$ In der Summe haben alle Stellen $m+j$ den Wert 1
$\mapsto$ Da k_i erfüllt wird, haben die Stellen $i \leq n$ einen Wert aus $\{1..3\}$
Die Stellen $i \leq n$ können mit c_i und d_i zu 4 ergänzt werden Also $f(F) \in KP$

Gilt $f(F) \in KP$, so gibt es eine Bepackung die genau den Wert A ergibt
Die Bepackung enthält für $j \leq n$ entweder a_j (wähle $x_j := 1$) oder b_j ($x_j := 0$)
Wegen $c_i + d_i = 3$ ist jede Stelle $i \leq m$ der Summe der a_j und b_j mindestens 1

Korrektheit der Transformation

· a_j: Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der x_j in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
· b_j : Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der $\bar{x}_j$ in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
· c_i: Stelle $m+i$ ist 1, sonst 0 $\quad$ d_i: Stelle $m+i$ ist 2, sonst 0
· $g_j = a_j$ für alle j $\quad$ $A \equiv G = \underbrace{4 \ldots 4}_{m-mal}\underbrace{1 \ldots 1}_{n-mal}$

Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j
Für $j \leq n$ wähle a_j falls $x_j = 1$ und b_j sonst
$\mapsto$ In der Summe haben alle Stellen $m+j$ den Wert 1
$\mapsto$ Da k_i erfüllt wird, haben die Stellen $i \leq n$ einen Wert aus $\{1..3\}$
Die Stellen $i \leq n$ können mit c_i und d_i zu 4 ergänzt werden Also $f(F) \in KP$

Gilt $f(F) \in KP$, so gibt es eine Bepackung die genau den Wert A ergibt
Die Bepackung enthält für $j \leq n$ entweder a_j (wähle $x_j := 1$) oder b_j ($x_j := 0$)
Wegen $c_i + d_i = 3$ ist jede Stelle $i \leq m$ der Summe der a_j und b_j mindestens 1
Also kommt in jeder Klausel k_i mindestens ein Literal mit dem Wert 1 vor

Korrektheit der Transformation

· a_j: Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der x_j in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
· b_j : Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der $\bar{x}_j$ in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
· c_i: Stelle $m+i$ ist 1, sonst 0 $\quad$ d_i: Stelle $m+i$ ist 2, sonst 0
· $g_j = a_j$ für alle j $\quad$ $A \equiv G = \underbrace{4 \ldots 4}_{m-mal}\underbrace{1 \ldots 1}_{n-mal}$

Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j
Für $j \leq n$ wähle a_j falls $x_j = 1$ und b_j sonst
$\mapsto$ In der Summe haben alle Stellen $m+j$ den Wert 1
$\mapsto$ Da k_i erfüllt wird, haben die Stellen $i \leq n$ einen Wert aus $\{1..3\}$
Die Stellen $i \leq n$ können mit c_i und d_i zu 4 ergänzt werden Also $f(F) \in KP$

Gilt $f(F) \in KP$, so gibt es eine Bepackung die genau den Wert A ergibt
Die Bepackung enthält für $j \leq n$ entweder a_j (wähle $x_j := 1$) oder b_j ($x_j := 0$)
Wegen $c_i + d_i = 3$ ist jede Stelle $i \leq m$ der Summe der a_j und b_j mindestens 1
Also kommt in jeder Klausel k_i mindestens ein Literal mit dem Wert 1 vor
Damit erfüllt die Belegung die Formel F, also $F \in 3SAT$

Korrektheit der Transformation

· a_j: Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der x_j in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
· b_j : Stelle $i \leq m$ ist Anzahl der $\bar{x}_j$ in k_i, Stelle $m+j$ ist 1, sonst 0
· c_i: Stelle $m+i$ ist 1, sonst 0 $\quad$ d_i: Stelle $m+i$ ist 2, sonst 0
· $g_j = a_j$ für alle j $\quad$ $A \equiv G = \underbrace{4 \ldots 4}_{m-mal}\underbrace{1 \ldots 1}_{n-mal}$

Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j
Für $j \leq n$ wähle a_j falls $x_j = 1$ und b_j sonst
$\mapsto$ In der Summe haben alle Stellen $m+j$ den Wert 1
$\mapsto$ Da k_i erfüllt wird, haben die Stellen $i \leq n$ einen Wert aus $\{1..3\}$
Die Stellen $i \leq n$ können mit c_i und d_i zu 4 ergänzt werden Also $f(F) \in KP$

Gilt $f(F) \in KP$, so gibt es eine Bepackung die genau den Wert A ergibt
Die Bepackung enthält für $j \leq n$ entweder a_j (wähle $x_j := 1$) oder b_j ($x_j := 0$)
Wegen $c_i + d_i = 3$ ist jede Stelle $i \leq m$ der Summe der a_j und b_j mindestens 1
Also kommt in jeder Klausel k_i mindestens ein Literal mit dem Wert 1 vor
Damit erfüllt die Belegung die Formel F, also $F \in 3SAT$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{3SAT \leq_p KP}$$

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Färbbarkeitsproblems

$$\boldsymbol{GC} = \{\ (G,k) \mid G{=}(V,E) \text{ Graph } \wedge\ \exists f_V{:}V{\to}\{1..k\}.\,\forall\{u,v\}{\in}E.f_V(u){\neq}f_V(v)\ \}$$

Zeige $\boldsymbol{3SAT \leq_p GC}$

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Färbbarkeitsproblems

$$\boldsymbol{GC} = \{\ (G,k) \mid G{=}(V,E) \text{ Graph } \wedge\ \exists f_V{:}V{\to}\{1..k\}.\,\forall\{u,v\}{\in}E.f_V(u){\neq}f_V(v)\ \}$$

Zeige $\boldsymbol{3SAT \leq_p GC}$

– Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Färbbarkeitsproblems

$$\boldsymbol{GC} = \{\ (G,k) \mid G{=}(V,E) \text{ Graph } \wedge\ \exists f_V{:}V{\to}\{1..k\}.\,\forall\{u,v\}{\in}E.f_V(u){\neq}f_V(v)\ \}$$

Zeige $\boldsymbol{3SAT \leq_p GC}$

– Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$

– Konstruiere Färbungsproblem $f(F) \equiv (G, 3)$ wie folgt

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Färbbarkeitsproblems

$$\boldsymbol{GC} = \{\ (G,k) \mid G{=}(V,E) \text{ Graph } \wedge\ \exists f_V{:}V{\to}\{1..k\}.\,\forall\{u,v\}{\in}E.f_V(u){\neq}f_V(v)\ \}$$

Zeige $\boldsymbol{3SAT \leq_p GC}$

– Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$

– Konstruiere Färbungsproblem $f(F) \equiv (G, 3)$ wie folgt

· Teilgraph für Codierung der Variablenbelegung

Wähle $V_{var} = \{u,\ x_1, ..., \underline{x_n}\}$

und $E_{var} = \{\{u, x_1\}, \{u, \underline{x_1}\}, \{x_1, \underline{x_1}\}, ..\{u, x_n\}, \{u, \underline{x_n}\}, \{x_n, \underline{x_n}\}\}$

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Färbbarkeitsproblems

$$\boldsymbol{GC} = \{\ (G,k) \mid G{=}(V,E) \text{ Graph } \wedge\ \exists f_V{:}V{\to}\{1..k\}.\,\forall\{u,v\}{\in}E.f_V(u){\neq}f_V(v)\ \}$$

Zeige $\boldsymbol{3SAT \leq_p GC}$

– Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$

– Konstruiere Färbungsproblem $f(F) \equiv (G, 3)$ wie folgt

· Teilgraph für Codierung der Variablenbelegung

Wähle $V_{var} = \{u, x_1, ..., \underline{x_n}\}$

und $E_{var} = \{\{u, x_1\}, \{u, \underline{x_1}\}, \{x_1, \underline{x_1}\}, ..\{u, x_n\}, \{u, \underline{x_n}\}, \{x_n, \underline{x_n}\}\}$

Bei 3-Färbbarkeit erhalten x_i und $\underline{x_i}$ verschiedene Farben aus 0 oder 1

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Färbbarkeitsproblems

$$\boldsymbol{GC} = \{\ (G,k) \mid G{=}(V,E) \text{ Graph } \wedge\ \exists f_V{:}V{\to}\{1..k\}.\,\forall\{u,v\}{\in}E.f_V(u){\neq}f_V(v)\ \}$$

Zeige $\boldsymbol{3SAT \leq_p GC}$

– Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$

– Konstruiere Färbungsproblem $f(F) \equiv (G, 3)$ wie folgt

· Teilgraph für Codierung der Variablenbelegung

Wähle $V_{var} = \{u,\ x_1, ..., \underline{x_n}\}$

und $E_{var} = \{\{u, x_1\}, \{u, \underline{x_1}\}, \{x_1, \underline{x_1}\}, ..\{u, x_n\}, \{u, \underline{x_n}\}, \{x_n, \underline{x_n}\}\}$

Bei 3-Färbbarkeit erhalten x_i und $\underline{x_i}$ verschiedene Farben aus 0 oder 1

· Teilgraph für Codierung der Klauseln

Wähle $V_k = \{v,\ a_1, b_1, c_1, y_1, z_1, .., a_m, b_m, c_m, y_m, z_m\}$

und $E_k = \{\{v, y_1\}, \{v, z_1\}, \{a_1, y_1\}, \{a_1, z_1\}, \{b_1, y_1\}, \{c_1, z_1\}, \{b_1, c_1\},$
$...\{v, y_m\}, ..\{b_m, c_m\},\ \{u, v\}\}$

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Färbbarkeitsproblems

$$\boldsymbol{GC} = \{\ (G,k) \mid G{=}(V,E) \text{ Graph } \wedge\ \exists f_V{:}V{\to}\{1..k\}.\,\forall\{u,v\}{\in}E.f_V(u){\neq}f_V(v)\ \}$$

Zeige $\boldsymbol{3SAT \leq_p GC}$

– Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$

– Konstruiere Färbungsproblem $f(F) \equiv (G, 3)$ wie folgt

· Teilgraph für Codierung der Variablenbelegung

Wähle $V_{var} = \{u,\ x_1, ..., \underline{x_n}\}$

und $E_{var} = \{\{u, x_1\}, \{u, \underline{x_1}\}, \{x_1, \underline{x_1}\}, ..\{u, x_n\}, \{u, \underline{x_n}\}, \{x_n, \underline{x_n}\}\}$

Bei 3-Färbbarkeit erhalten x_i und $\underline{x_i}$ verschiedene Farben aus 0 oder 1

· Teilgraph für Codierung der Klauseln

Wähle $V_k = \{v,\ a_1, b_1, c_1, y_1, z_1, .., a_m, b_m, c_m, y_m, z_m\}$

und $E_k = \{\{v, y_1\}, \{v, z_1\}, \{a_1, y_1\}, \{a_1, z_1\}, \{b_1, y_1\}, \{c_1, z_1\}, \{b_1, c_1\},$
$...\{v, y_m\}, ..\{b_m, c_m\},\ \{u, v\}\}$

Knoten v erhält Farbe 0 oder 1

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Färbbarkeitsproblems

$$\boldsymbol{GC} = \{\ (G,k) \mid G{=}(V,E) \text{ Graph } \wedge\ \exists f_V{:}V{\to}\{1..k\}.\,\forall\{u,v\}{\in}E.f_V(u){\neq}f_V(v)\ \}$$

Zeige $\boldsymbol{3SAT \leq_p GC}$

– Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$

– Konstruiere Färbungsproblem $f(F) \equiv (G, 3)$ wie folgt

· Teilgraph für Codierung der Variablenbelegung

Wähle $V_{var} = \{u,\ x_1, ..., \underline{x_n}\}$

und $E_{var} = \{\{u, x_1\}, \{u, \underline{x_1}\}, \{x_1, \underline{x_1}\}, ..\{u, x_n\}, \{u, \underline{x_n}\}, \{x_n, \underline{x_n}\}\}$

Bei 3-Färbbarkeit erhalten x_i und $\underline{x_i}$ verschiedene Farben aus 0 oder 1

· Teilgraph für Codierung der Klauseln

Wähle $V_k = \{v,\ a_1, b_1, c_1, y_1, z_1, .., a_m, b_m, c_m, y_m, z_m\}$

und $E_k = \{\{v, y_1\}, \{v, z_1\}, \{a_1, y_1\}, \{a_1, z_1\}, \{b_1, y_1\}, \{c_1, z_1\}, \{b_1, c_1\},$
$...\{v, y_m\}, ..\{b_m, c_m\},\ \{u, v\}\}$

Knoten v erhält Farbe 0 oder 1

· Kanten zur Codierung der Klauselliterale

$E_{lit} = \{\ \{a_1, z_{11}\}, \{b_1, z_{12}\}, \{c_1, z_{13}\}, ...\{a_m, z_{m1}\}, \{b_m, z_{m2}\}, \{c_m, z_{m3}\}\ \}$

$\mathcal{NP}$-vollständigkeit des Färbbarkeitsproblems

$$\boldsymbol{GC} = \{\ (G,k) \mid G{=}(V,E) \text{ Graph } \wedge\ \exists f_V{:}V{\to}\{1..k\}.\,\forall\{u,v\}{\in}E.f_V(u){\neq}f_V(v)\ \}$$

Zeige $\boldsymbol{3SAT \leq_p GC}$

– Gegeben $F = (k_1, ..., k_m)$ mit $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$ und $z_{ij} \in \{x_1, ..., \underline{x_n}\}$

– Konstruiere Färbungsproblem $f(F) \equiv (G, 3)$ wie folgt

· Teilgraph für Codierung der Variablenbelegung

Wähle $V_{var} = \{u,\ x_1, ..., \underline{x_n}\}$

und $E_{var} = \{\{u, x_1\}, \{u, \underline{x_1}\}, \{x_1, \underline{x_1}\}, ..\{u, x_n\}, \{u, \underline{x_n}\}, \{x_n, \underline{x_n}\}\}$

Bei 3-Färbbarkeit erhalten x_i und $\underline{x_i}$ verschiedene Farben aus 0 oder 1

· Teilgraph für Codierung der Klauseln

Wähle $V_k = \{v,\ a_1, b_1, c_1, y_1, z_1, .., a_m, b_m, c_m, y_m, z_m\}$

und $E_k = \{\{v, y_1\}, \{v, z_1\}, \{a_1, y_1\}, \{a_1, z_1\}, \{b_1, y_1\}, \{c_1, z_1\}, \{b_1, c_1\},$
$...\{v, y_m\}, ..\{b_m, c_m\},\ \{u, v\}\}$

Knoten v erhält Farbe 0 oder 1

· Kanten zur Codierung der Klauselliterale

$E_{lit} = \{\ \{a_1, z_{11}\}, \{b_1, z_{12}\}, \{c_1, z_{13}\}, ...\{a_m, z_{m1}\}, \{b_m, z_{m2}\}, \{c_m, z_{m3}\}\ \}$

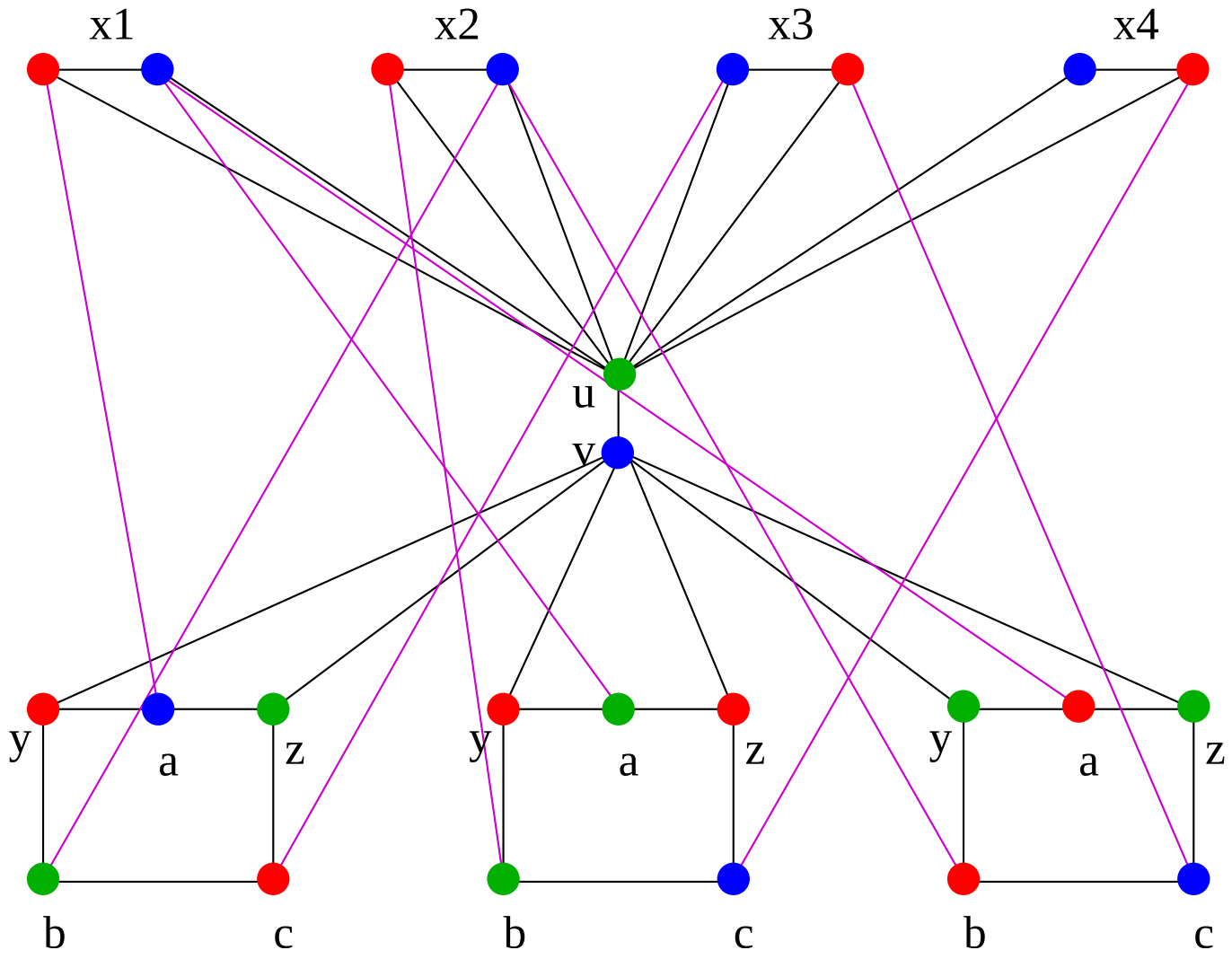
– $G{=}(V_{var}{\cup}V_k,\ E_{var}{\cup}E_k{\cup}E_{lit})$ ist in polynomieller Zeit berechenbar

Codierung einer Formel als Färbungsproblem

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4} \quad k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$$

Codierung einer Formel als Färbungsproblem

$F = (k_1, k_2, k_3)$ mit $k_1 = x_1 \vee \underline{x_2} \vee x_3$ $k_2 = \underline{x_1} \vee x_2 \vee \underline{x_4}$ $k_3 = \underline{x_1} \vee \underline{x_2} \vee \underline{x_3}$



Korrektheit der Transformation

- Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

Korrektheit der Transformation

- Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

  Wähle $f_v(x_i), f_v(\underline{x_i}) \in \{0,1\}$ entsprechend, $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$.

Korrektheit der Transformation

- Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

  Wähle $f_v(x_i), f_v(\underline{x_i}) \in \{0,1\}$ entsprechend, $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$.

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

Korrektheit der Transformation

- Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

  Wähle $f_v(x_i), f_v(\underline{x_i}) \in \{0,1\}$ entsprechend, $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$.

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

Korrektheit der Transformation

- Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

  Wähle $f_v(x_i), f_v(\underline{x_i}) \in \{0,1\}$ entsprechend, $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$.

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Die anderen 4 Knoten bilden eine Kette und werden abwechselnd gefärbt

Korrektheit der Transformation

- Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

  Wähle $f_v(x_i), f_v(\underline{x_i}) \in \{0,1\}$ entsprechend, $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$.

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Die anderen 4 Knoten bilden eine Kette und werden abwechselnd gefärbt

  Also $f(F) \in GC$

Korrektheit der Transformation

- Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

  Wähle $f_v(x_i), f_v(\underline{x_i}) \in \{0,1\}$ entsprechend, $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$.

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Die anderen 4 Knoten bilden eine Kette und werden abwechselnd gefärbt

  Also $f(F) \in GC$

- Ist $f(F) \in GC$ dann ist o.B.d.A. $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$

Korrektheit der Transformation

- Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

  Wähle $f_v(x_i), f_v(\underline{x_i}) \in \{0,1\}$ entsprechend, $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$.

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Die anderen 4 Knoten bilden eine Kette und werden abwechselnd gefärbt

  Also $f(F) \in GC$

- Ist $f(F) \in GC$ dann ist o.B.d.A. $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$

  Wähle Belegung der x_i entsprechend der Färbung von x_i

Korrektheit der Transformation

- Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

  Wähle $f_v(x_i), f_v(\underline{x_i}) \in \{0,1\}$ entsprechend, $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$.

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Die anderen 4 Knoten bilden eine Kette und werden abwechselnd gefärbt

  Also $f(F) \in GC$

- Ist $f(F) \in GC$ dann ist o.B.d.A. $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$

  Wähle Belegung der x_i entsprechend der Färbung von x_i

  Wäre Klausel k_i nicht erfüllt, so müßte die Farbe der a_i, b_i, c_i 1 oder 2 sein

Korrektheit der Transformation

- Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

  Wähle $f_v(x_i), f_v(\underline{x_i}) \in \{0,1\}$ entsprechend, $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$.

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Die anderen 4 Knoten bilden eine Kette und werden abwechselnd gefärbt

  Also $f(F) \in GC$

- Ist $f(F) \in GC$ dann ist o.B.d.A. $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$

  Wähle Belegung der x_i entsprechend der Färbung von x_i

  Wäre Klausel k_i nicht erfüllt, so müßte die Farbe der a_i, b_i, c_i 1 oder 2 sein

  Wegen $f_v(b_i) \neq f_v(c_i)$ und $f_v(v) = 0$ wäre dann $\{f_v(y_i), f_v(z_i)\} = \{1, 2\}$

Korrektheit der Transformation

- Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

  Wähle $f_v(x_i), f_v(\underline{x_i}) \in \{0,1\}$ entsprechend, $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$.

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Die anderen 4 Knoten bilden eine Kette und werden abwechselnd gefärbt

  Also $f(F) \in GC$

- Ist $f(F) \in GC$ dann ist o.B.d.A. $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$

  Wähle Belegung der x_i entsprechend der Färbung von x_i

  Wäre Klausel k_i nicht erfüllt, so müßte die Farbe der a_i, b_i, c_i 1 oder 2 sein

  Wegen $f_v(b_i) \neq f_v(c_i)$ und $f_v(v) = 0$ wäre dann $\{f_v(y_i), f_v(z_i)\} = \{1, 2\}$

  Dies widerspricht der Färbbarkeit, da a_i ebenfalls mit 1 oder 2 gefärbt ist.

Korrektheit der Transformation

- Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

  Wähle $f_v(x_i), f_v(\underline{x_i}) \in \{0,1\}$ entsprechend, $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$.

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Die anderen 4 Knoten bilden eine Kette und werden abwechselnd gefärbt

  Also $f(F) \in GC$

- Ist $f(F) \in GC$ dann ist o.B.d.A. $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$

  Wähle Belegung der x_i entsprechend der Färbung von x_i

  Wäre Klausel k_i nicht erfüllt, so müßte die Farbe der a_i, b_i, c_i 1 oder 2 sein

  Wegen $f_v(b_i) \neq f_v(c_i)$ und $f_v(v) = 0$ wäre dann $\{f_v(y_i), f_v(z_i)\} = \{1, 2\}$

  Dies widerspricht der Färbbarkeit, da a_i ebenfalls mit 1 oder 2 gefärbt ist.

  Also $F \in 3SAT$

Korrektheit der Transformation

- Ist $F \in 3SAT$, so gibt es eine erfüllende Belegung der x_j

  Wähle $f_v(x_i), f_v(\underline{x_i}) \in \{0,1\}$ entsprechend, $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$.

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Da jedes k_i erfüllbar ist, kann einer der a_i, b_i, c_i die Farbe 0 erhalten

  Die anderen 4 Knoten bilden eine Kette und werden abwechselnd gefärbt

  Also $f(F) \in GC$

- Ist $f(F) \in GC$ dann ist o.B.d.A. $f_v(u) = 2$ und $f_v(v) = 0$

  Wähle Belegung der x_i entsprechend der Färbung von x_i

  Wäre Klausel k_i nicht erfüllt, so müßte die Farbe der a_i, b_i, c_i 1 oder 2 sein

  Wegen $f_v(b_i) \neq f_v(c_i)$ und $f_v(v) = 0$ wäre dann $\{f_v(y_i), f_v(z_i)\} = \{1, 2\}$

  Dies widerspricht der Färbbarkeit, da a_i ebenfalls mit 1 oder 2 gefärbt ist.

  Also $F \in 3SAT$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{3SAT \leq_p GC}$$

Jenseits von $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **$co\text{-}\mathcal{NP}$: Probleme mit Komplement in $\mathcal{NP}$**

Jenseits von $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **$co\text{-}\mathcal{NP}$: Probleme mit Komplement in $\mathcal{NP}$**
  - Die Menge der gültigen Formeln ist in $co\text{-}\mathcal{NP}$ (Komplement von SAT)

Jenseits von $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **$co-\mathcal{NP}$: Probleme mit Komplement in $\mathcal{NP}$**
  - Die Menge der gültigen Formeln ist in $co-\mathcal{NP}$ (Komplement von SAT)
  - Das Primzahlproblem liegt in $co-\mathcal{NP}$

Jenseits von $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **$co-\mathcal{NP}$: Probleme mit Komplement in $\mathcal{NP}$**
  - Die Menge der gültigen Formeln ist in $co-\mathcal{NP}$ (Komplement von SAT)
  - Das Primzahlproblem liegt in $co-\mathcal{NP}$
  - Das Primzahlproblem liegt auch in $\mathcal{NP}$

Jenseits von $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **$co-\mathcal{NP}$: Probleme mit Komplement in $\mathcal{NP}$**
  - Die Menge der gültigen Formeln ist in $co-\mathcal{NP}$ (Komplement von SAT)
  - Das Primzahlproblem liegt in $co-\mathcal{NP}$
  - Das Primzahlproblem liegt auch in $\mathcal{NP}$
  - Ist ein $co-\mathcal{NP}$ Problem L $\mathcal{NP}$-vollständig, so gilt $\mathcal{NP} = co-\mathcal{NP}$

    Es würde folgen: $L' \leq_p \underline{L} \in \mathcal{NP}$ für jedes $L' \in co-\mathcal{NP}$

Jenseits von $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **$co\text{-}\mathcal{NP}$: Probleme mit Komplement in $\mathcal{NP}$**
  - Die Menge der gültigen Formeln ist in $co\text{-}\mathcal{NP}$ (Komplement von SAT)
  - Das Primzahlproblem liegt in $co\text{-}\mathcal{NP}$
  - Das Primzahlproblem liegt auch in $\mathcal{NP}$
  - Ist ein $co\text{-}\mathcal{NP}$ Problem L $\mathcal{NP}$-vollständig, so gilt $\mathcal{NP} = co\text{-}\mathcal{NP}$

    Es würde folgen: $L' \leq_p \underline{L} \in \mathcal{NP}$ für jedes $L' \in co\text{-}\mathcal{NP}$
  - Das Zusammengesetztheitsproblem ist vermutlich nicht $\mathcal{NP}$-vollständig sondern liegt zwischen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NPC}$ (sofern

Jenseits von $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **$co-\mathcal{NP}$: Probleme mit Komplement in $\mathcal{NP}$**
  - Die Menge der gültigen Formeln ist in $co-\mathcal{NP}$ (Komplement von SAT)
  - Das Primzahlproblem liegt in $co-\mathcal{NP}$
  - Das Primzahlproblem liegt auch in $\mathcal{NP}$
  - Ist ein $co-\mathcal{NP}$ Problem L $\mathcal{NP}$-vollständig, so gilt $\mathcal{NP} = co-\mathcal{NP}$

    Es würde folgen: $L' \leq_p \underline{L} \in \mathcal{NP}$ für jedes $L' \in co-\mathcal{NP}$
  - Das Zusammengesetztheitsproblem ist vermutlich nicht $\mathcal{NP}$-vollständig sondern liegt zwischen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NPC}$ (sofern
- **Es gibt $PSPACE$-vollständige Probleme**

Jenseits von $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **$co-\mathcal{NP}$: Probleme mit Komplement in $\mathcal{NP}$**
  - Die Menge der gültigen Formeln ist in $co-\mathcal{NP}$ (Komplement von SAT)
  - Das Primzahlproblem liegt in $co-\mathcal{NP}$
  - Das Primzahlproblem liegt auch in $\mathcal{NP}$
  - Ist ein $co-\mathcal{NP}$ Problem L $\mathcal{NP}$-vollständig, so gilt $\mathcal{NP} = co-\mathcal{NP}$

    Es würde folgen: $L' \leq_p \underline{L} \in \mathcal{NP}$ für jedes $L' \in co-\mathcal{NP}$
  - Das Zusammengesetztheitsproblem ist vermutlich nicht $\mathcal{NP}$-vollständig sondern liegt zwischen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NPC}$ (sofern

- **Es gibt $PSPACE$-vollständige Probleme**

  In-Place Acceptance
  - Gegeben DTM τ und $w \in X^*$: Gilt $h_\tau(w) = 1$ und $s_\tau(w) \leq |w|$?

Jenseits von $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **$co-\mathcal{NP}$: Probleme mit Komplement in $\mathcal{NP}$**
  - Die Menge der gültigen Formeln ist in $co-\mathcal{NP}$ (Komplement von SAT)
  - Das Primzahlproblem liegt in $co-\mathcal{NP}$
  - Das Primzahlproblem liegt auch in $\mathcal{NP}$
  - Ist ein $co-\mathcal{NP}$ Problem L $\mathcal{NP}$-vollständig, so gilt $\mathcal{NP} = co-\mathcal{NP}$

    Es würde folgen: $L' \leq_p \underline{L} \in \mathcal{NP}$ für jedes $L' \in co-\mathcal{NP}$
  - Das Zusammengesetztheitsproblem ist vermutlich nicht $\mathcal{NP}$-vollständig sondern liegt zwischen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NPC}$ (sofern

- **Es gibt $PSPACE$-vollständige Probleme**

  In-Place Acceptance
  - Gegeben DTM τ und $w \in X^*$: Gilt $h_\tau(w) = 1$ und $s_\tau(w) \leq |w|$?

  QBF: Ist eine gegebene quantifizierte boole'sche Formel wahr?

Jenseits von $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **$co-\mathcal{NP}$: Probleme mit Komplement in $\mathcal{NP}$**
  - Die Menge der gültigen Formeln ist in $co-\mathcal{NP}$ (Komplement von SAT)
  - Das Primzahlproblem liegt in $co-\mathcal{NP}$
  - Das Primzahlproblem liegt auch in $\mathcal{NP}$
  - Ist ein $co-\mathcal{NP}$ Problem L $\mathcal{NP}$-vollständig, so gilt $\mathcal{NP} = co-\mathcal{NP}$

    Es würde folgen: $L' \leq_p \underline{L} \in \mathcal{NP}$ für jedes $L' \in co-\mathcal{NP}$
  - Das Zusammengesetztheitsproblem ist vermutlich nicht $\mathcal{NP}$-vollständig sondern liegt zwischen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NPC}$ (sofern

- **Es gibt $PSPACE$-vollständige Probleme**

  In-Place Acceptance
  - Gegeben DTM τ und $w \in X^*$: Gilt $h_\tau(w) = 1$ und $s_\tau(w) \leq |w|$?

  QBF: Ist eine gegebene quantifizierte boole'sche Formel wahr?

Wie kann man unhandhabbare Probleme angehen?

Komplexitätsklassenhierarchie

- **Zeitkomplexitätsklassen**

$LOGTIME$	in logarithmischer Zeit lösbar
$NLOGTIME$	nichtdeterministisch in logarithmischer Zeit lösbar
$\mathcal{P}$	in polynomieller Zeit lösbar
$\mathcal{NP}$	nichtdeterministisch in polynomieller Zeit lösbar
$\mathcal{NPC}$	$\mathcal{NP}$-vollständige Probleme
$\mathcal{NPI}$	$\mathcal{NP}$-unvollständige Probleme: $\mathcal{NP}$ - $\mathcal{NPC}$ - $\mathcal{P}$
$co\text{-}\mathcal{NP}$	Komplement in $\mathcal{NP}$
$EXPTIME$	in exponentieller Zeit lösbar
$NEXPTIME$	nichtdeterministisch in exponentieller Zeit lösbar

Komplexitätsklassenhierarchie

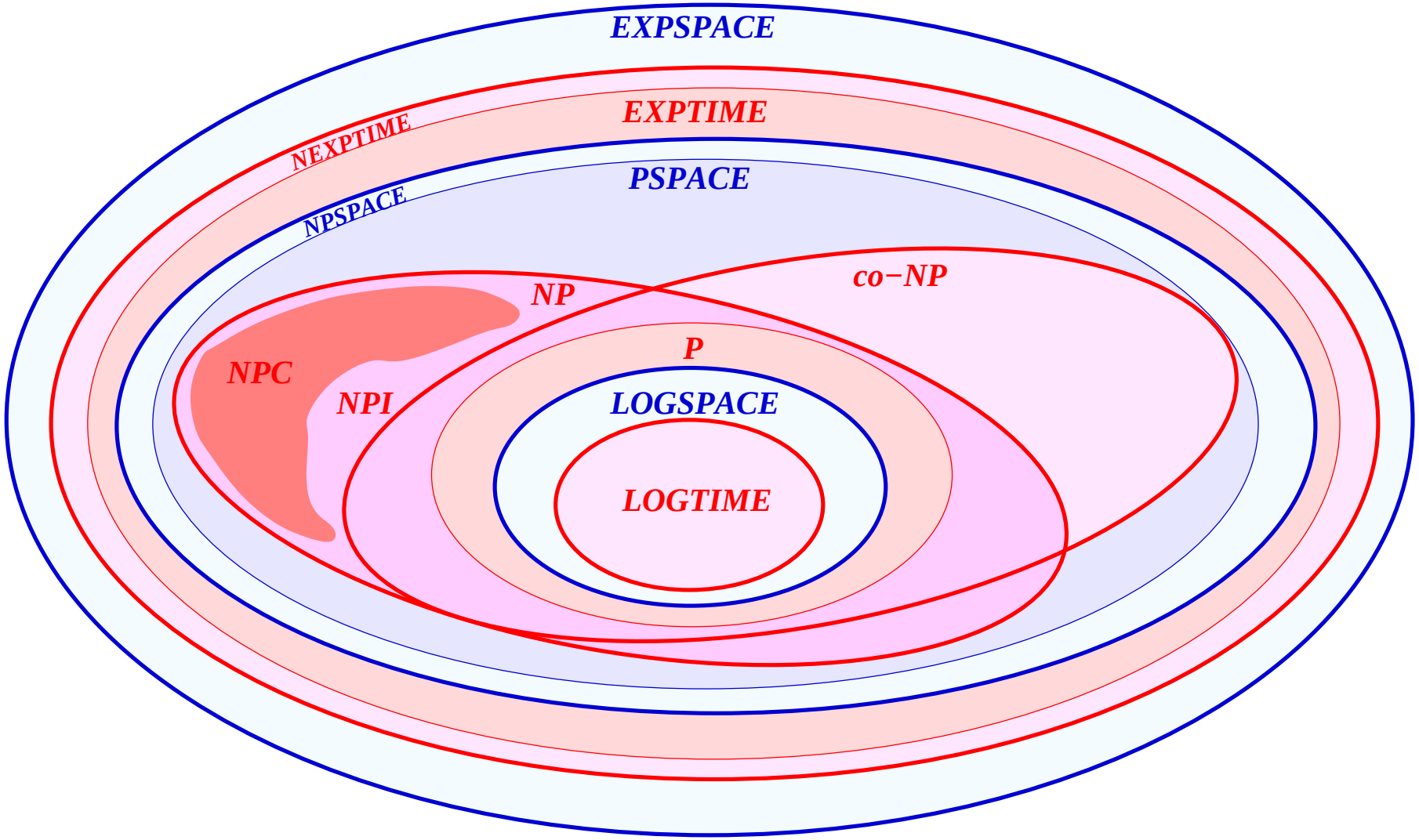
- **Zeitkomplexitätsklassen**

$LOGTIME$	in logarithmischer Zeit lösbar
$NLOGTIME$	nichtdeterministisch in logarithmischer Zeit lösbar
$\mathcal{P}$	in polynomieller Zeit lösbar
$\mathcal{NP}$	nichtdeterministisch in polynomieller Zeit lösbar
$\mathcal{NPC}$	$\mathcal{NP}$-vollständige Probleme
$\mathcal{NPI}$	$\mathcal{NP}$-unvollständige Probleme: $\mathcal{NP}$ - $\mathcal{NPC}$ - $\mathcal{P}$
$co\text{–}\mathcal{NP}$	Komplement in $\mathcal{NP}$
$EXPTIME$	in exponentieller Zeit lösbar
$NEXPTIME$	nichtdeterministisch in exponentieller Zeit lösbar

- **Platzkomplexitätsklassen**

$LOGSPACE$	mit logarithmischem Platzverbrauch lösbar
$NLOGSPACE$	nichtdeterministisch mit logarithmischem Platzverbrauch lösbar
$PSPACE$	mit polynomiellem Platzverbrauch lösbar
$NPSPACE$	nichtdeterministisch mit polynomiellem Platzverbrauch lösbar
$EXPSPACE$	mit exponentiellem Platzverbrauch lösbar

Sprachklassenhierarchie



Wichtige Vertreter verschiedener Klassen

- **Isomorphie ungerichteter Graphen** $\mathcal{NPI}$

Wichtige Vertreter verschiedener Klassen

- **Isomorphie ungerichteter Graphen** $\mathcal{NPI}$
- **Zuverlässigkeit von Netzwerken** $\mathcal{NP}$-hart, vermutlich nicht in $\mathcal{NP}$
  - Wahrscheinlichkeit für fehlerfreie Verbindung zwischen zwei Knoten

Wichtige Vertreter verschiedener Klassen

- **Isomorphie ungerichteter Graphen** $\mathcal{NPI}$
- **Zuverlässigkeit von Netzwerken** $\mathcal{NP}$-hart, vermutlich nicht in $\mathcal{NP}$
  - Wahrscheinlichkeit für fehlerfreie Verbindung zwischen zwei Knoten
- **Minimale äquivalente Schaltkreise** $\mathcal{NP}$-hart, nicht in $\mathcal{NP}$ ("Σ_2")
  - Bestimme optimale Größe einer Schaltung

Wichtige Vertreter verschiedener Klassen

- **Isomorphie ungerichteter Graphen** $\mathcal{NPI}$
- **Zuverlässigkeit von Netzwerken** $\mathcal{NP}$-hart, vermutlich nicht in $\mathcal{NP}$
  - Wahrscheinlichkeit für fehlerfreie Verbindung zwischen zwei Knoten
- **Minimale äquivalente Schaltkreise** $\mathcal{NP}$-hart, nicht in $\mathcal{NP}$ ("Σ_2")
  - Bestimme optimale Größe einer Schaltung
- **Quantifizierte boole'sche Formeln** $PSPACE$-vollständig
  - Gültigkeit aussagenlogischer Formeln mit boole'schen Quantoren

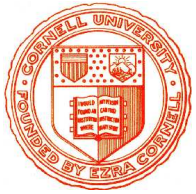
Wichtige Vertreter verschiedener Klassen

- **Isomorphie ungerichteter Graphen** $\mathcal{NPI}$
- **Zuverlässigkeit von Netzwerken** $\mathcal{NP}$-hart, vermutlich nicht in $\mathcal{NP}$
  - Wahrscheinlichkeit für fehlerfreie Verbindung zwischen zwei Knoten
- **Minimale äquivalente Schaltkreise** $\mathcal{NP}$-hart, nicht in $\mathcal{NP}$ ("Σ_2")
  - Bestimme optimale Größe einer Schaltung
- **Quantifizierte boole'sche Formeln** $PSPACE$-vollständig
  - Gültigkeit aussagenlogischer Formeln mit boole'schen Quantoren
- **Strategische Spiele** $PSPACE$-vollständig
  - Details in Garey/Johnson Seite 254ff

Wichtige Vertreter verschiedener Klassen

- **Isomorphie ungerichteter Graphen** $\mathcal{NPI}$
- **Zuverlässigkeit von Netzwerken** $\mathcal{NP}$-hart, vermutlich nicht in $\mathcal{NP}$
  - Wahrscheinlichkeit für fehlerfreie Verbindung zwischen zwei Knoten
- **Minimale äquivalente Schaltkreise** $\mathcal{NP}$-hart, nicht in $\mathcal{NP}$ ("Σ_2")
  - Bestimme optimale Größe einer Schaltung
- **Quantifizierte boole'sche Formeln** $PSPACE$-vollständig
  - Gültigkeit aussagenlogischer Formeln mit boole'schen Quantoren
- **Strategische Spiele** $PSPACE$-vollständig
  - Details in Garey/Johnson Seite 254ff
- **TSP*: Bestimmung aller Rundreisen mit gegebenen Kosten**
  - Unrealistische Problemstellung: zu viele Lösungen $EXPSPACE$

Theoretische Informatik



Einheit 3.5

Grenzen überwinden

1. Pseudopolynomielle Algorithmen
2. Approximationsalgorithmen
3. Probabilistische Algorithmen

Wie kann man "unlösbare" Probleme angehen?

- **Künstliche Intelligenz**
  - Heuristische Lösung unentscheidbarer Probleme (ohne Erfolgsgarantie)
  - Theorembeweisen, Programmverifikation und -synthese (unvollständig)

Wie kann man "unlösbare" Probleme angehen?

- **Künstliche Intelligenz**
  - Heuristische Lösung unentscheidbarer Probleme (ohne Erfolgsgarantie)
  - Theorembeweisen, Programmverifikation und -synthese (unvollständig)
- **Approximierende und probabilistische Algorithmen**
  - Effiziente Bestimmung von nahezu optimalen Lösungen
  - Z.B. Primzahltest mit geringem Fehler (logarithmisch statt linear)

Wie kann man "unlösbare" Probleme angehen?

- **Künstliche Intelligenz**
  - Heuristische Lösung unentscheidbarer Probleme (ohne Erfolgsgarantie)
  - Theorembeweisen, Programmverifikation und -synthese (unvollständig)
- **Approximierende und probabilistische Algorithmen**
  - Effiziente Bestimmung von nahezu optimalen Lösungen
  - Z.B. Primzahltest mit geringem Fehler (logarithmisch statt linear)
- **Selbstorganisation statt vorformulierter Lösungen**
  - Lernverfahren, Neuronale Netze, genetische Algorithmen, ...

Wie kann man "unlösbare" Probleme angehen?

- **Künstliche Intelligenz**
  - Heuristische Lösung unentscheidbarer Probleme (ohne Erfolgsgarantie)
  - Theorembeweisen, Programmverifikation und -synthese (unvollständig)
- **Approximierende und probabilistische Algorithmen**
  - Effiziente Bestimmung von nahezu optimalen Lösungen
  - Z.B. Primzahltest mit geringem Fehler (logarithmisch statt linear)
- **Selbstorganisation statt vorformulierter Lösungen**
  - Lernverfahren, Neuronale Netze, genetische Algorithmen, ...

Suche nach neuen Wegen liefert tieferes Verständnis der Materie

Pseudopolynomielle Algorithmen

Gibt es leichte $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme?

Pseudopolynomielle Algorithmen

Gibt es leichte $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme?

- **Was unterscheidet $CLIQUE$ von KP?**
  - Beide Probleme sind $\mathcal{NP}$-vollständig

Gibt es leichte $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme?

- **Was unterscheidet $CLIQUE$ von KP?**
  - Beide Probleme sind $\mathcal{NP}$-vollständig, aber
    - $3SAT \leq_p KP$ benutzt exponentiell große Zahlen als Codierung
    - $3SAT \leq_p CLIQUE$ codiert Formel durch gleichgroßen Graph

Gibt es leichte $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme?

- **Was unterscheidet $CLIQUE$ von KP?**
  - Beide Probleme sind $\mathcal{NP}$-vollständig, aber
    - $3SAT \leq_p KP$ benutzt exponentiell große Zahlen als Codierung
    - $3SAT \leq_p CLIQUE$ codiert Formel durch gleichgroßen Graph
  - Ist KP nur wegen der großen Zahlen $\mathcal{NP}$-vollständig?

Pseudopolynomielle Algorithmen

Gibt es leichte $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme?

- **Was unterscheidet $CLIQUE$ von KP?**
  - Beide Probleme sind $\mathcal{NP}$-vollständig, aber
    - $3SAT \leq_p KP$ benutzt exponentiell große Zahlen als Codierung
    - $3SAT \leq_p CLIQUE$ codiert Formel durch gleichgroßen Graph
  - Ist KP nur wegen der großen Zahlen $\mathcal{NP}$-vollständig?
- **Es gibt "bessere" Lösungen für KP**

  $KP = \{ (g_1..g_n, a_1..a_n, G, A) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}. \Sigma_{i \in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i \in J} a_i \geq A \}$

Gibt es leichte $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme?

- **Was unterscheidet $CLIQUE$ von KP?**
  - Beide Probleme sind $\mathcal{NP}$-vollständig, aber
    - $3SAT \leq_p KP$ benutzt exponentiell große Zahlen als Codierung
    - $3SAT \leq_p CLIQUE$ codiert Formel durch gleichgroßen Graph
  - Ist KP nur wegen der großen Zahlen $\mathcal{NP}$-vollständig?
- **Es gibt "bessere" Lösungen für KP**

  $KP = \{ (g_1..g_n, a_1..a_n, G, A) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}. \Sigma_{i \in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i \in J} a_i \geq A \}$
  - Man muß nicht alle Kombinationen von $\{1..n\}$ einzeln auswerten

Pseudopolynomielle Algorithmen

Gibt es leichte $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme?

- **Was unterscheidet $CLIQUE$ von KP?**
  - Beide Probleme sind $\mathcal{NP}$-vollständig, aber
    - $3SAT \leq_p KP$ benutzt exponentiell große Zahlen als Codierung
    - $3SAT \leq_p CLIQUE$ codiert Formel durch gleichgroßen Graph
  - Ist KP nur wegen der großen Zahlen $\mathcal{NP}$-vollständig?
- **Es gibt "bessere" Lösungen für KP**

  $KP = \{ (g_1..g_n, a_1..a_n, G, A) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}. \Sigma_{i \in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i \in J} a_i \geq A \}$
  - Man muß nicht alle Kombinationen von $\{1..n\}$ einzeln auswerten
  - Man kann iterativ den optimalen Nutzen bestimmen, indem man die Anzahl der Gegenstände und das Gewicht erhöht

Gibt es leichte $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme?

- **Was unterscheidet $CLIQUE$ von KP?**
  - Beide Probleme sind $\mathcal{NP}$-vollständig, aber
    - $3SAT \leq_p KP$ benutzt exponentiell große Zahlen als Codierung
    - $3SAT \leq_p CLIQUE$ codiert Formel durch gleichgroßen Graph
  - Ist KP nur wegen der großen Zahlen $\mathcal{NP}$-vollständig?
- **Es gibt "bessere" Lösungen für KP**

  $KP = \{ (g_1..g_n, a_1..a_n, G, A) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}. \Sigma_{i \in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i \in J} a_i \geq A \}$
  - Man muß nicht alle Kombinationen von $\{1..n\}$ einzeln auswerten
  - Man kann iterativ den optimalen Nutzen bestimmen, indem man die Anzahl der Gegenstände und das Gewicht erhöht
  - Sehr effizient, wenn das maximale Gewicht nicht zu groß wird

Iterative Lösung für KP

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- **Betrachte Subprobleme** $KP(k, g)$
  - Verwende Gegenstände $1, .., k$ und Maximalgewicht $g{\leq}G$
  - Bestimme optimalen Nutzen $N(k, g)$

Iterative Lösung für KP

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- **Betrachte Subprobleme** $KP(k, g)$
  - Verwende Gegenstände $1, .., k$ und Maximalgewicht $g{\leq}G$
  - Bestimme optimalen Nutzen $N(k, g)$
    - $N(k, 0) = 0$ für alle k

Iterative Lösung für KP

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- **Betrachte Subprobleme** $KP(k, g)$
  - Verwende Gegenstände $1, .., k$ und Maximalgewicht $g{\leq}G$
  - Bestimme optimalen Nutzen $N(k, g)$
    - $N(k, 0) = 0$ für alle k
    - $N(0, g) = 0$ für alle g

Iterative Lösung für KP

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- **Betrachte Subprobleme** $KP(k, g)$
  - Verwende Gegenstände $1, .., k$ und Maximalgewicht $g{\leq}G$
  - Bestimme optimalen Nutzen $N(k, g)$
    - $N(k, 0) = 0$ für alle k
    - $N(0, g) = 0$ für alle g
    - $N(k, g) = max\{N(k{-}1, g{-}g_k) + a_k,\ N(k{-}1, g)\}$

Iterative Lösung für KP

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- **Betrachte Subprobleme** $KP(k, g)$
  - Verwende Gegenstände $1, .., k$ und Maximalgewicht $g{\leq}G$
  - Bestimme optimalen Nutzen $N(k, g)$
    - $N(k, 0) = 0$ für alle k
    - $N(0, g) = 0$ für alle g
    - $N(k, g) = max\{N(k{-}1, g{-}g_k) + a_k,\ N(k{-}1, g)\}$
- **Löse Rucksackproblem** $\boldsymbol{KP}$
  - Es gilt $(g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A)\ \in\ KP\ \Leftrightarrow\ N(n, G){\geq}A$

Iterative Lösung für KP

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- **Betrachte Subprobleme** $KP(k, g)$
  - Verwende Gegenstände $1, .., k$ und Maximalgewicht $g{\leq}G$
  - Bestimme optimalen Nutzen $N(k, g)$
    - $N(k, 0) = 0$ für alle k
    - $N(0, g) = 0$ für alle g
    - $N(k, g) = max\{N(k{-}1, g{-}g_k) + a_k,\ N(k{-}1, g)\}$
- **Löse Rucksackproblem** $\boldsymbol{KP}$
  - Es gilt $(g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A)\ \in\ KP\ \Leftrightarrow\ N(n, G){\geq}A$
  - Gleichungen beschreiben rekursiven Algorithmus für $N(n, G)$

Iterative Lösung für KP

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- **Betrachte Subprobleme $KP(k, g)$**
  - Verwende Gegenstände $1, .., k$ und Maximalgewicht $g{\leq}G$
  - Bestimme optimalen Nutzen $N(k, g)$
    - $N(k, 0) = 0$ für alle k
    - $N(0, g) = 0$ für alle g
    - $N(k, g) = max\{N(k{-}1, g{-}g_k) + a_k,\ N(k{-}1, g)\}$
- **Löse Rucksackproblem $\boldsymbol{KP}$**
  - Es gilt $(g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A)\ \in\ KP\ \Leftrightarrow\ N(n, G){\geq}A$
  - Gleichungen beschreiben rekursiven Algorithmus für $N(n, G)$
  - Tabellarischer Algorithmus bestimmt alle $N(k, g)$ mit $k{\leq}n$ und $g{\leq}G$

Iterative Lösung für KP

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- **Betrachte Subprobleme** $KP(k, g)$
  - Verwende Gegenstände $1, .., k$ und Maximalgewicht $g{\leq}G$
  - Bestimme optimalen Nutzen $N(k, g)$
    - $N(k, 0) = 0$ für alle k
    - $N(0, g) = 0$ für alle g
    - $N(k, g) = max\{N(k{-}1, g{-}g_k) + a_k,\ N(k{-}1, g)\}$
- **Löse Rucksackproblem** $\boldsymbol{KP}$
  - Es gilt $(g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A)\ \in\ KP\ \Leftrightarrow\ N(n, G){\geq}A$
  - Gleichungen beschreiben rekursiven Algorithmus für $N(n, G)$
  - Tabellarischer Algorithmus bestimmt alle $N(k, g)$ mit $k{\leq}n$ und $g{\leq}G$
  - Laufzeit ist $\mathcal{O}(n * G)$

Iterative Lösung für KP

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- **Betrachte Subprobleme $KP(k, g)$**
  - Verwende Gegenstände $1, .., k$ und Maximalgewicht $g{\leq}G$
  - Bestimme optimalen Nutzen $N(k, g)$
    - $N(k, 0) = 0$ für alle k
    - $N(0, g) = 0$ für alle g
    - $N(k, g) = max\{N(k{-}1, g{-}g_k) + a_k,\ N(k{-}1, g)\}$
- **Löse Rucksackproblem $\boldsymbol{KP}$**
  - Es gilt $(g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A)\ \in\ KP\ \Leftrightarrow\ N(n, G){\geq}A$
  - Gleichungen beschreiben rekursiven Algorithmus für $N(n, G)$
  - Tabellarischer Algorithmus bestimmt alle $N(k, g)$ mit $k{\leq}n$ und $g{\leq}G$
  - Laufzeit ist $\mathcal{O}(n * G)$

$$\Downarrow$$

$(g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A)\ \in\ KP$ ist IN $\mathcal{O}(n * G)$ Schritten lösbar

Pseudopolynomielle Algorithmen

Liegt das Rucksackproblem KP etwa in $\mathcal{P}$?

Pseudopolynomielle Algorithmen

Liegt das Rucksackproblem KP etwa in $\mathcal{P}$?

- **Lösung für KP ist nicht wirklich polynomiell**
  - $n * G$ kann exponentiell wachsen relativ zur Größe der Eingabe

Pseudopolynomielle Algorithmen

Liegt das Rucksackproblem KP etwa in $\mathcal{P}$?

- **Lösung für KP ist nicht wirklich polynomiell**
  - $n * G$ kann exponentiell wachsen relativ zur Größe der Eingabe
  - Größe von $(g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A)$ ist $\mathcal{O}(n * (logG + logA))$

Pseudopolynomielle Algorithmen

Liegt das Rucksackproblem KP etwa in $\mathcal{P}$?

- **Lösung für KP ist nicht wirklich polynomiell**
  - $n * G$ kann exponentiell wachsen relativ zur Größe der Eingabe
  - Größe von $(g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A)$ ist $\mathcal{O}(n * (logG + logA))$
- **KP ist ein Zahlproblem**
  - $M \subseteq X^*$ ist **Zahlproblem**, wenn es kein Polynom p gibt mit $MAX(w) \leq p(|w|)$ für alle $w \in X^*$

    $MAX(w)$ ist die größte im Wort w codierte Zahl

Pseudopolynomielle Algorithmen

Liegt das Rucksackproblem KP etwa in $\mathcal{P}$?

- **Lösung für KP ist nicht wirklich polynomiell**
  - $n * G$ kann exponentiell wachsen relativ zur Größe der Eingabe
  - Größe von $(g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A)$ ist $\mathcal{O}(n * (logG + logA))$
- **KP ist ein Zahlproblem**
  - $M \subseteq X^*$ ist **Zahlproblem**, wenn es kein Polynom p gibt mit $MAX(w) \leq p(|w|)$ für alle $w \in X^*$

    $MAX(w)$ ist die größte im Wort w codierte Zahl
  - Weitere Zahlprobleme: $PARTITION$, BPP, TSP, MSP, ...

Pseudopolynomielle Algorithmen

Liegt das Rucksackproblem KP etwa in $\mathcal{P}$?

- **Lösung für KP ist nicht wirklich polynomiell**
  - $n * G$ kann exponentiell wachsen relativ zur Größe der Eingabe
  - Größe von $(g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A)$ ist $\mathcal{O}(n * (logG + logA))$
- **KP ist ein Zahlproblem**
  - $M \subseteq X^*$ ist **Zahlproblem**, wenn es kein Polynom p gibt mit $MAX(w) \leq p(|w|)$ für alle $w \in X^*$

    $MAX(w)$ ist die größte im Wort w codierte Zahl
  - Weitere Zahlprobleme: $PARTITION$, BPP, TSP, MSP, ...
  - Keine Zahlprobleme: $CLIQUE$, VC, IS, SGI, LCS, DHC, HC, GC,...

Pseudopolynomielle Algorithmen

Liegt das Rucksackproblem KP etwa in $\mathcal{P}$?

- **Lösung für KP ist nicht wirklich polynomiell**
  - $n * G$ kann exponentiell wachsen relativ zur Größe der Eingabe
  - Größe von $(g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A)$ ist $\mathcal{O}(n * (logG + logA))$
- **KP ist ein Zahlproblem**
  - $M \subseteq X^*$ ist **Zahlproblem**, wenn es kein Polynom p gibt mit $MAX(w) \leq p(|w|)$ für alle $w \in X^*$

    $MAX(w)$ ist die größte im Wort w codierte Zahl
  - Weitere Zahlprobleme: $PARTITION$, BPP, TSP, MSP, ...
  - Keine Zahlprobleme: $CLIQUE$, VC, IS, SGI, LCS, DHC, HC, GC,...
- **KP hat pseudopolynomielle Lösung**
  - Ein Algorithmus für ein Zahlproblem $M \subseteq X^*$ ist pseudopolynomiell, wenn seine Rechenzeit durch ein Polynom in $|w|$ und $MAX(w)$ beschränkt ist

Starke $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **Pseudopolynomiell $\hat{=}$ effizient bei kleinen Zahlen**
  - Ist $M \subseteq X^*$ pseudopolynomiell lösbar, so ist für jedes Polynom p
    $M_p \equiv \{w \in M \mid MAX(w) \leq p(|w|)\} \in \mathcal{P}$

Starke $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **Pseudopolynomiell $\hat{=}$ effizient bei kleinen Zahlen**
  - Ist $M \subseteq X^*$ pseudopolynomiell lösbar, so ist für jedes Polynom p
    $M_p \equiv \{w \in M \mid MAX(w) \leq p(|w|)\} \in \mathcal{P}$
  - Die Restriktion von KP auf polynomiell große Gewichte liegt in $\mathcal{P}$

Starke $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **Pseudopolynomiell $\hat{=}$ effizient bei kleinen Zahlen**
  - Ist $M \subseteq X^*$ pseudopolynomiell lösbar, so ist für jedes Polynom p
    $M_p \equiv \{w \in M \mid MAX(w) \leq p(|w|)\} \in \mathcal{P}$
  - Die Restriktion von KP auf polynomiell große Gewichte liegt in $\mathcal{P}$
  - Hat jedes Zahlproblem eine pseudopolynomielle Lösung?

Starke $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **Pseudopolynomiell $\hat{=}$ effizient bei kleinen Zahlen**
  - Ist $M \subseteq X^*$ pseudopolynomiell lösbar, so ist für jedes Polynom p
    $M_p \equiv \{w \in M \mid MAX(w) \leq p(|w|)\} \in \mathcal{P}$
  - Die Restriktion von KP auf polynomiell große Gewichte liegt in $\mathcal{P}$
  - Hat jedes Zahlproblem eine pseudopolynomielle Lösung?
- ***TSP* ohne pseudopolynomielle Lösung** (falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$)

Starke $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **Pseudopolynomiell $\hat{=}$ effizient bei kleinen Zahlen**
  - Ist $M \subseteq X^*$ pseudopolynomiell lösbar, so ist für jedes Polynom p
    $M_p \equiv \{w \in M \mid MAX(w) \leq p(|w|)\} \in \mathcal{P}$
  - Die Restriktion von KP auf polynomiell große Gewichte liegt in $\mathcal{P}$
  - Hat jedes Zahlproblem eine pseudopolynomielle Lösung?
- ***TSP* ohne pseudopolynomielle Lösung** (falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$)
  - Der Reduktionsbeweis $HC \leq_p TSP$ zeigt $HC \leq_p TSP_n$

Starke $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **Pseudopolynomiell $\hat{=}$ effizient bei kleinen Zahlen**
  - Ist $M \subseteq X^*$ pseudopolynomiell lösbar, so ist für jedes Polynom p
    $M_p \equiv \{w \in M \mid MAX(w) \leq p(|w|)\} \in \mathcal{P}$
  - Die Restriktion von KP auf polynomiell große Gewichte liegt in $\mathcal{P}$
  - Hat jedes Zahlproblem eine pseudopolynomielle Lösung?
- ***TSP* ohne pseudopolynomielle Lösung** (falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$)
  - Der Reduktionsbeweis $HC \leq_p TSP$ zeigt $HC \leq_p TSP_n$
  - Eine Restriktion von TSP auf kleine Zahlen bleibt $\mathcal{NP}$-vollständig

Starke $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **Pseudopolynomiell $\hat{=}$ effizient bei kleinen Zahlen**
  - Ist $M \subseteq X^*$ pseudopolynomiell lösbar, so ist für jedes Polynom p
    $M_p \equiv \{w \in M \mid MAX(w) \leq p(|w|)\} \in \mathcal{P}$
  - Die Restriktion von KP auf polynomiell große Gewichte liegt in $\mathcal{P}$
  - Hat jedes Zahlproblem eine pseudopolynomielle Lösung?
- ***TSP* ohne pseudopolynomielle Lösung** (falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$)
  - Der Reduktionsbeweis $HC \leq_p TSP$ zeigt $HC \leq_p TSP_n$
  - Eine Restriktion von TSP auf kleine Zahlen bleibt $\mathcal{NP}$-vollständig
- ***TSP* ist stark $\mathcal{NP}$-vollständig**
  - $M \subseteq X^*$ stark $\mathcal{NP}$-vollständig $\equiv$ M_p $\mathcal{NP}$-vollständig für ein Polynom p

Starke $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **Pseudopolynomiell $\hat{=}$ effizient bei kleinen Zahlen**
  - Ist $M \subseteq X^*$ pseudopolynomiell lösbar, so ist für jedes Polynom p
    $M_p \equiv \{w \in M \mid MAX(w) \leq p(|w|)\} \in \mathcal{P}$
  - Die Restriktion von KP auf polynomiell große Gewichte liegt in $\mathcal{P}$
  - Hat jedes Zahlproblem eine pseudopolynomielle Lösung?
- ***TSP* ohne pseudopolynomielle Lösung** (falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$)
  - Der Reduktionsbeweis $HC \leq_p TSP$ zeigt $HC \leq_p TSP_n$
  - Eine Restriktion von TSP auf kleine Zahlen bleibt $\mathcal{NP}$-vollständig
- ***TSP* ist stark $\mathcal{NP}$-vollständig**
  - $M \subseteq X^*$ stark $\mathcal{NP}$-vollständig $\equiv$ M_p $\mathcal{NP}$-vollständig für ein Polynom p
  - M stark $\mathcal{NP}$-vollständig $\Rightarrow$ M hat keine pseudopolynomielle Lösung

Starke $\mathcal{NP}$-vollständigkeit

- **Pseudopolynomiell $\hat{=}$ effizient bei kleinen Zahlen**
  - Ist $M \subseteq X^*$ pseudopolynomiell lösbar, so ist für jedes Polynom p
    $M_p \equiv \{w \in M \mid MAX(w) \leq p(|w|)\} \in \mathcal{P}$
  - Die Restriktion von KP auf polynomiell große Gewichte liegt in $\mathcal{P}$
  - Hat jedes Zahlproblem eine pseudopolynomielle Lösung?

- **TSP ohne pseudopolynomielle Lösung** (falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$)
  - Der Reduktionsbeweis $HC \leq_p TSP$ zeigt $HC \leq_p TSP_n$
  - Eine Restriktion von TSP auf kleine Zahlen bleibt $\mathcal{NP}$-vollständig

- **TSP ist stark $\mathcal{NP}$-vollständig**
  - $M \subseteq X^*$ stark $\mathcal{NP}$-vollständig $\equiv$ M_p $\mathcal{NP}$-vollständig für ein Polynom p
  - M stark $\mathcal{NP}$-vollständig $\Rightarrow$ M hat keine pseudopolynomielle Lösung

$\Downarrow$

Einschränkung auf kleine Zahlen ist nur zuweilen eine Antwort auf das $\mathcal{P}-\mathcal{NP}$ Dilemma

Approximationsalgorithmen für Optimierungsprobleme

- **Viele Probleme haben Optimierungsvariante**

Approximationsalgorithmen für Optimierungsprobleme

- **Viele Probleme haben Optimierungsvariante**
  - $CLIQUE_{opt}$: bestimme die größte Clique im Graphen
  - TSP_{opt}: bestimme die kostengünstigste Rundreise
  - BPP_{opt}: bestimme die kleinste Anzahl der nötigen Behälter
  - KP_{opt}: bestimme das geringstmögliche Gewicht für einen festen Nutzen

Approximationsalgorithmen für Optimierungsprobleme

- **Viele Probleme haben Optimierungsvariante**
  - $CLIQUE_{opt}$: bestimme die größte Clique im Graphen
  - TSP_{opt}: bestimme die kostengünstigste Rundreise
  - BPP_{opt}: bestimme die kleinste Anzahl der nötigen Behälter
  - KP_{opt}: bestimme das geringstmögliche Gewicht für einen festen Nutzen

  Alle Probleme sind $\mathcal{NP}$-hart

Approximationsalgorithmen für Optimierungsprobleme

- **Viele Probleme haben Optimierungsvariante**
  - $CLIQUE_{opt}$: bestimme die größte Clique im Graphen
  - TSP_{opt}: bestimme die kostengünstigste Rundreise
  - BPP_{opt}: bestimme die kleinste Anzahl der nötigen Behälter
  - KP_{opt}: bestimme das geringstmögliche Gewicht für einen festen Nutzen

  Alle Probleme sind $\mathcal{NP}$-hart

  Wie effizient kann man eine optimale Lösung annähern?

Approximationsalgorithmen für Optimierungsprobleme

- **Viele Probleme haben Optimierungsvariante**
  - $CLIQUE_{opt}$: bestimme die größte Clique im Graphen
  - TSP_{opt}: bestimme die kostengünstigste Rundreise
  - BPP_{opt}: bestimme die kleinste Anzahl der nötigen Behälter
  - KP_{opt}: bestimme das geringstmögliche Gewicht für einen festen Nutzen

  Alle Probleme sind $\mathcal{NP}$-hart

  Wie effizient kann man eine optimale Lösung annähern?

- **Optimierungsproblem $M \subseteq X^*$**
  - Für $w \in X^*$ gibt es ggf. mehrere (akzeptable) Lösungen x mit $(w, x) \in M$

Approximationsalgorithmen für Optimierungsprobleme

- **Viele Probleme haben Optimierungsvariante**
  - $CLIQUE_{opt}$: bestimme die größte Clique im Graphen
  - TSP_{opt}: bestimme die kostengünstigste Rundreise
  - BPP_{opt}: bestimme die kleinste Anzahl der nötigen Behälter
  - KP_{opt}: bestimme das geringstmögliche Gewicht für einen festen Nutzen

  Alle Probleme sind $\mathcal{NP}$-hart

  Wie effizient kann man eine optimale Lösung annähern?

- **Optimierungsproblem $M \subseteq X^*$**
  - Für $w \in X^*$ gibt es ggf. mehrere (akzeptable) Lösungen x mit $(w, x) \in M$
  - $OPT_M(w)$: Wert einer optimalen (maxi-/minimalen) Lösung für $w \in X^*$

Approximationsalgorithmen für Optimierungsprobleme

- **Viele Probleme haben Optimierungsvariante**
  - $CLIQUE_{opt}$: bestimme die größte Clique im Graphen
  - TSP_{opt}: bestimme die kostengünstigste Rundreise
  - BPP_{opt}: bestimme die kleinste Anzahl der nötigen Behälter
  - KP_{opt}: bestimme das geringstmögliche Gewicht für einen festen Nutzen

  Alle Probleme sind $\mathcal{NP}$-hart

  Wie effizient kann man eine optimale Lösung annähern?

- **Optimierungsproblem $M \subseteq X^*$**
  - Für $w \in X^*$ gibt es ggf. mehrere (akzeptable) Lösungen x mit $(w, x) \in M$
  - $OPT_M(w)$: Wert einer optimalen (maxi-/minimalen) Lösung für $w \in X^*$

- **Approximationsalgorithmus A für $M \subseteq X^*$**
  - A berechnet für $w \in X^*$ ein $x = A(w)$ mit $(w, x) \in M$

Approximationsalgorithmen für Optimierungsprobleme

- **Viele Probleme haben Optimierungsvariante**
  - $CLIQUE_{opt}$: bestimme die größte Clique im Graphen
  - TSP_{opt}: bestimme die kostengünstigste Rundreise
  - BPP_{opt}: bestimme die kleinste Anzahl der nötigen Behälter
  - KP_{opt}: bestimme das geringstmögliche Gewicht für einen festen Nutzen

  Alle Probleme sind $\mathcal{NP}$-hart

  Wie effizient kann man eine optimale Lösung annähern?

- **Optimierungsproblem $M \subseteq X^*$**
  - Für $w \in X^*$ gibt es ggf. mehrere (akzeptable) Lösungen x mit $(w, x) \in M$
  - $OPT_M(w)$: Wert einer optimalen (maxi-/minimalen) Lösung für $w \in X^*$

- **Approximationsalgorithmus A für $M \subseteq X^*$**
  - A berechnet für $w \in X^*$ ein $x = A(w)$ mit $(w, x) \in M$
  - $R_A(w)$: Güte des Algorithmus A (normiertes Verhältnis $OPT_M(w)$ zu $A(w)$)

Approximationsalgorithmen für Optimierungsprobleme

- **Viele Probleme haben Optimierungsvariante**
  - $CLIQUE_{opt}$: bestimme die größte Clique im Graphen
  - TSP_{opt}: bestimme die kostengünstigste Rundreise
  - BPP_{opt}: bestimme die kleinste Anzahl der nötigen Behälter
  - KP_{opt}: bestimme das geringstmögliche Gewicht für einen festen Nutzen

  Alle Probleme sind $\mathcal{NP}$-hart

  Wie effizient kann man eine optimale Lösung annähern?

- **Optimierungsproblem $M \subseteq X^*$**
  - Für $w \in X^*$ gibt es ggf. mehrere (akzeptable) Lösungen x mit $(w, x) \in M$
  - $OPT_M(w)$: Wert einer optimalen (maxi-/minimalen) Lösung für $w \in X^*$

- **Approximationsalgorithmus A für $M \subseteq X^*$**
  - A berechnet für $w \in X^*$ ein $x = A(w)$ mit $(w, x) \in M$
  - $R_A(w)$: Güte des Algorithmus A (normiertes Verhältnis $OPT_M(w)$ zu $A(w)$)
  - R_A^∞: asymptotische worst-case Güte von A $\left(\inf\{r \geq 1 \mid \forall^\infty\, w \in X^*. R_A(w) \leq r\}\right)$

Approximationsalgorithmen für Optimierungsprobleme

- **Viele Probleme haben Optimierungsvariante**
  - $CLIQUE_{opt}$: bestimme die größte Clique im Graphen
  - TSP_{opt}: bestimme die kostengünstigste Rundreise
  - BPP_{opt}: bestimme die kleinste Anzahl der nötigen Behälter
  - KP_{opt}: bestimme das geringstmögliche Gewicht für einen festen Nutzen

  Alle Probleme sind $\mathcal{NP}$-hart

  Wie effizient kann man eine optimale Lösung annähern?

- **Optimierungsproblem $M \subseteq X^*$**
  - Für $w \in X^*$ gibt es ggf. mehrere (akzeptable) Lösungen x mit $(w, x) \in M$
  - $OPT_M(w)$: Wert einer optimalen (maxi-/minimalen) Lösung für $w \in X^*$

- **Approximationsalgorithmus A für $M \subseteq X^*$**
  - A berechnet für $w \in X^*$ ein $x = A(w)$ mit $(w, x) \in M$
  - $R_A(w)$: Güte des Algorithmus A (normiertes Verhältnis $OPT_M(w)$ zu $A(w)$)
  - R_A^∞: asymptotische worst-case Güte von A $\left(\inf\{r \geq 1 \mid \forall^\infty\, w \in X^*. R_A(w) \leq r\}\right)$
  - $R_{min}(M, w) := \inf\{R_A^\infty(w) \mid A \text{ approximiert } M \text{ in polynomieller Zeit}\}$

Approximationsschemata für das Rucksackproblem

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

Approximationsschemata für das Rucksackproblem

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- **Beliebig guter multiplikativer Fehler**
  - Für jedes ϵ gibt es einen Approximationsalgorithmus A mit Laufzeit $\mathcal{O}(n^3 * \epsilon^{-1})$ und Güte $R_A(w){\leq}1{+}\epsilon$ für alle w

Approximationsschemata für das Rucksackproblem

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- **Beliebig guter multiplikativer Fehler**
  - Für jedes ϵ gibt es einen Approximationsalgorithmus A mit Laufzeit $\mathcal{O}(n^3 * \epsilon^{-1})$ und Güte $R_A(w) \leq 1+\epsilon$ für alle w
- **Kein konstanter additiver Fehler möglich**
  - Für kein k gibt es einen polynomiellen Algorithmus A_{KP} mit der Eigenschaft $|OPT_{KP}(w) - A_{KP}(w)| \leq k$ für alle w

Approximationsschemata für das Rucksackproblem

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- **Beliebig guter multiplikativer Fehler**
  - Für jedes ϵ gibt es einen Approximationsalgorithmus A mit Laufzeit $\mathcal{O}(n^3 * \epsilon^{-1})$ und Güte $R_A(w){\leq}1{+}\epsilon$ für alle w
- **Kein konstanter additiver Fehler möglich**
  - Für kein k gibt es einen polynomiellen Algorithmus A_{KP} mit der Eigenschaft $|OPT_{KP}(w) - A_{KP}(w)|{\leq}k$ für alle w

  Wenn es A_{KP} geben würde, dann entscheiden wir KP polynomiell wie folgt

Approximationsschemata für das Rucksackproblem

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- **Beliebig guter multiplikativer Fehler**
  - Für jedes ϵ gibt es einen Approximationsalgorithmus A mit Laufzeit $\mathcal{O}(n^3 * \epsilon^{-1})$ und Güte $R_A(w){\leq}1{+}\epsilon$ für alle w
- **Kein konstanter additiver Fehler möglich**
  - Für kein k gibt es einen polynomiellen Algorithmus A_{KP} mit der Eigenschaft $|OPT_{KP}(w) - A_{KP}(w)|{\leq}k$ für alle w

  Wenn es A_{KP} geben würde, dann entscheiden wir KP polynomiell wie folgt
  - Transformiere $w = (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A)$ in
    $$w' = (g_1..g_n,\ a_1{*}(k{+}1)..a_n{*}(k{+}1),\ G,\ A{*}(k{+}1))$$

Approximationsschemata für das Rucksackproblem

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- **Beliebig guter multiplikativer Fehler**
  - Für jedes ϵ gibt es einen Approximationsalgorithmus A mit Laufzeit $\mathcal{O}(n^3 * \epsilon^{-1})$ und Güte $R_A(w){\leq}1{+}\epsilon$ für alle w
- **Kein konstanter additiver Fehler möglich**
  - Für kein k gibt es einen polynomiellen Algorithmus A_{KP} mit der Eigenschaft $|OPT_{KP}(w) - A_{KP}(w)|{\leq}k$ für alle w

  Wenn es A_{KP} geben würde, dann entscheiden wir KP polynomiell wie folgt
  - Transformiere $w = (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A)$ in
    $$w' = (g_1..g_n,\ a_1{*}(k{+}1)..a_n{*}(k{+}1),\ G,\ A{*}(k{+}1))$$
  - Wegen $|OPT_{KP}(w') - A_{KP}(w')|{\leq}k$ folgt
    $$|OPT_{KP}(w) - \lfloor A_{KP}(w')/(k{+}1)\rfloor\ | \leq \lfloor k/(k{+}1)\rfloor = 0$$

Approximationsschemata für das Rucksackproblem

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- **Beliebig guter multiplikativer Fehler**
  - Für jedes ϵ gibt es einen Approximationsalgorithmus A mit Laufzeit $\mathcal{O}(n^3 * \epsilon^{-1})$ und Güte $R_A(w){\leq}1{+}\epsilon$ für alle w
- **Kein konstanter additiver Fehler möglich**
  - Für kein k gibt es einen polynomiellen Algorithmus A_{KP} mit der Eigenschaft $|OPT_{KP}(w) - A_{KP}(w)|{\leq}k$ für alle w

  Wenn es A_{KP} geben würde, dann entscheiden wir KP polynomiell wie folgt
  - Transformiere $w = (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A)$ in
    $$w' = (g_1..g_n,\ a_1{*}(k{+}1)..a_n{*}(k{+}1),\ G,\ A{*}(k{+}1))$$
  - Wegen $|OPT_{KP}(w') - A_{KP}(w')|{\leq}k$ folgt
    $$|OPT_{KP}(w) - \lfloor A_{KP}(w')/(k{+}1)\rfloor\ | \leq \lfloor k/(k{+}1)\rfloor = 0$$
  - Also gilt $w \in KP \Leftrightarrow \lfloor A_{KP}(w')/(k{+}1)\rfloor{\geq}A$

Approximationsschemata für das Rucksackproblem

$$\boldsymbol{KP} = \{\ (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A) \mid \exists J{\subseteq}\{1..n\}.\ \Sigma_{i\in J} g_i \leq G \wedge \Sigma_{i\in J} a_i \geq A\ \}$$

- **Beliebig guter multiplikativer Fehler**
  - Für jedes ϵ gibt es einen Approximationsalgorithmus A mit Laufzeit $\mathcal{O}(n^3 * \epsilon^{-1})$ und Güte $R_A(w){\leq}1{+}\epsilon$ für alle w
- **Kein konstanter additiver Fehler möglich**
  - Für kein k gibt es einen polynomiellen Algorithmus A_{KP} mit der Eigenschaft $|OPT_{KP}(w) - A_{KP}(w)|{\leq}k$ für alle w

  Wenn es A_{KP} geben würde, dann entscheiden wir KP polynomiell wie folgt
  - Transformiere $w = (g_1..g_n,\ a_1..a_n,\ G,\ A)$ in
    $$w' = (g_1..g_n,\ a_1{*}(k{+}1)..a_n{*}(k{+}1),\ G,\ A{*}(k{+}1))$$
  - Wegen $|OPT_{KP}(w') - A_{KP}(w')|{\leq}k$ folgt
    $$|OPT_{KP}(w) - \lfloor A_{KP}(w')/(k{+}1)\rfloor\ | \leq \lfloor k/(k{+}1)\rfloor = 0$$
  - Also gilt $w \in KP \Leftrightarrow \lfloor A_{KP}(w')/(k{+}1)\rfloor{\geq}A$

Beweistechnik: Multiplikation des Problems, nachträgliche Division des Fehlers

Approximationsschemata für Binpacking

$$\boldsymbol{BPP} = \{\, a_1, \ldots a_n,\ b,\ k) \mid \exists f : \{1..n\} \rightarrowtail \{1..k\}.\ \forall j \leq k.\ \textstyle\sum_{i \in \{i \mid f(i)=j\}} a_i \leq b \,\}$$

- **Asymptotische Güte 11/9 erreichbar**

Approximationsschemata für Binpacking

$$\boldsymbol{BPP} = \{\, a_1, \ldots a_n,\ b,\ k) \mid \exists f : \{1..n\} \rightarrowtail \{1..k\}.\ \forall j \leq k.\ \textstyle\sum_{i \in \{i \mid f(i)=j\}} a_i \leq b \,\}$$

- **Asymptotische Güte 11/9 erreichbar**
  - FIRST-FIT DECREASING: Sortiere Objekte in absteigender Reihenfolge und packe sie jeweils in die erste freie Kiste, in der genügend Platz ist

Approximationsschemata für Binpacking

$$\boldsymbol{BPP} = \{\, a_1, \ldots a_n,\ b,\ k) \mid \exists f : \{1..n\} \rightarrowtail \{1..k\}.\ \forall j \leq k.\ \textstyle\sum_{i \in \{i \mid f(i)=j\}} a_i \leq b \,\}$$

- **Asymptotische Güte 11/9 erreichbar**
  - FIRST-FIT DECREASING: Sortiere Objekte in absteigender Reihenfolge und packe sie jeweils in die erste freie Kiste, in der genügend Platz ist
  - Es gilt $FFD(w) = 11/9 * OPT_{BPP}(w) + 4$ für alle w

  $\mapsto$ Polynomielle Approximation mit $R_A^\infty = 11/9$

Approximationsschemata für Binpacking

$$\boldsymbol{BPP} = \{\, a_1, \ldots a_n,\ b,\ k) \mid \exists f : \{1..n\} \rightarrowtail \{1..k\}.\ \forall j \leq k.\ \textstyle\sum_{i \in \{i \mid f(i)=j\}} a_i \leq b \,\}$$

- **Asymptotische Güte 11/9 erreichbar**
  - FIRST-FIT DECREASING: Sortiere Objekte in absteigender Reihenfolge und packe sie jeweils in die erste freie Kiste, in der genügend Platz ist
  - Es gilt $FFD(w) = 11/9 * OPT_{BPP}(w) + 4$ für alle w

  $\mapsto$ Polynomielle Approximation mit $R_A^\infty = 11/9$
- **Keine absolute Güte besser als 3/2** (falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$)
  - Kein polynomieller Approximationsalgorithmus mit $R_A < 3/2$ möglich

Approximationsschemata für Binpacking

$$\boldsymbol{BPP} = \{\, a_1, \ldots a_n,\ b,\ k) \mid \exists f : \{1..n\} \rightarrowtail \{1..k\}.\ \forall j \leq k.\ \textstyle\sum_{i \in \{i \mid f(i)=j\}} a_i \leq b \,\}$$

- **Asymptotische Güte 11/9 erreichbar**
  - FIRST-FIT DECREASING: Sortiere Objekte in absteigender Reihenfolge und packe sie jeweils in die erste freie Kiste, in der genügend Platz ist
  - Es gilt $FFD(w) = 11/9 * OPT_{BPP}(w) + 4$ für alle w

  $\mapsto$ Polynomielle Approximation mit $R_A^\infty = 11/9$
- **Keine absolute Güte besser als 3/2** (falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$)
  - Kein polynomieller Approximationsalgorithmus mit $R_A < 3/2$ möglich
  - Die Reduktion $PARTITION \leq_p BPP$ benutzt 2 Behälter der Größe $S := \sum_{i=1}^{n} a_i/2$, auf die Zahlen verteilt werden

Approximationsschemata für Binpacking

$$\boldsymbol{BPP} = \{\, a_1, \ldots a_n,\ b,\ k) \mid \exists f : \{1..n\} \rightarrowtail \{1..k\}.\ \forall j \leq k.\ \textstyle\sum_{i \in \{i \mid f(i)=j\}} a_i \leq b \,\}$$

- **Asymptotische Güte 11/9 erreichbar**
  - FIRST-FIT DECREASING: Sortiere Objekte in absteigender Reihenfolge und packe sie jeweils in die erste freie Kiste, in der genügend Platz ist
  - Es gilt $FFD(w) = 11/9 * OPT_{BPP}(w) + 4$ für alle w

  $\mapsto$ Polynomielle Approximation mit $R_A^\infty = 11/9$

- **Keine absolute Güte besser als 3/2** (falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$)
  - Kein polynomieller Approximationsalgorithmus mit $R_A < 3/2$ möglich
  - Die Reduktion $PARTITION \leq_p BPP$ benutzt 2 Behälter der Größe $S := \sum_{i=1}^{n} a_i/2$, auf die Zahlen verteilt werden
  - Jeder Approximationsalgorithmus A mit $R_A < 3/2$ liefert $A(w) = 2$, falls $w \in PARTITION$ und sonst $A(w) \geq 3$

Approximationsschemata für Binpacking

$$\boldsymbol{BPP} = \{\, a_1, \ldots a_n,\ b,\ k) \mid \exists f : \{1..n\} \rightarrowtail \{1..k\}.\ \forall j \leq k.\ \textstyle\sum_{i \in \{i \mid f(i)=j\}} a_i \leq b \,\}$$

- **Asymptotische Güte 11/9 erreichbar**
  - FIRST-FIT DECREASING: Sortiere Objekte in absteigender Reihenfolge und packe sie jeweils in die erste freie Kiste, in der genügend Platz ist
  - Es gilt $FFD(w) = 11/9 * OPT_{BPP}(w) + 4$ für alle w

  $\mapsto$ Polynomielle Approximation mit $R_A^\infty = 11/9$
- **Keine absolute Güte besser als 3/2** (falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$)
  - Kein polynomieller Approximationsalgorithmus mit $R_A < 3/2$ möglich
  - Die Reduktion $PARTITION \leq_p BPP$ benutzt 2 Behälter der Größe $S := \sum_{i=1}^{n} a_i/2$, auf die Zahlen verteilt werden
  - Jeder Approximationsalgorithmus A mit $R_A < 3/2$ liefert $A(w) = 2$, falls $w \in PARTITION$ und sonst $A(w) \geq 3$
  - Wegen $PARTITION \in \mathcal{NPC}$ kann A nicht polynomiell sein

Approximationsschemata für Binpacking

$$\boldsymbol{BPP} = \{\, a_1, \ldots a_n,\ b,\ k) \mid \exists f : \{1..n\} \rightarrowtail \{1..k\}.\ \forall j \leq k.\ \textstyle\sum_{i \in \{i \mid f(i)=j\}} a_i \leq b \,\}$$

- **Asymptotische Güte 11/9 erreichbar**
  - FIRST-FIT DECREASING: Sortiere Objekte in absteigender Reihenfolge und packe sie jeweils in die erste freie Kiste, in der genügend Platz ist
  - Es gilt $FFD(w) = 11/9 * OPT_{BPP}(w) + 4$ für alle w

  $\mapsto$ Polynomielle Approximation mit $R_A^\infty = 11/9$

- **Keine absolute Güte besser als 3/2** (falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$)
  - Kein polynomieller Approximationsalgorithmus mit $R_A < 3/2$ möglich
  - Die Reduktion $PARTITION \leq_p BPP$ benutzt 2 Behälter der Größe $S := \sum_{i=1}^{n} a_i/2$, auf die Zahlen verteilt werden
  - Jeder Approximationsalgorithmus A mit $R_A < 3/2$ liefert $A(w) = 2$, falls $w \in PARTITION$ und sonst $A(w) \geq 3$
  - Wegen $PARTITION \in \mathcal{NPC}$ kann A nicht polynomiell sein

Beweistechnik: Einbettung eines $\mathcal{NP}$-vollständigen Entscheidungsproblems

Approximation des Traveling Salesman Problems

$$\boldsymbol{TSP} = \{\, c_{12}, \ldots, c_{n-1,n},\ B \mid \exists \pi{:}\{1..n\}\to\{1..n\}.\ \pi \text{ bijektiv} \wedge \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B \,\}$$

Approximation des Traveling Salesman Problems

$$\boldsymbol{TSP} = \{\, c_{12}, \ldots, c_{n-1,n},\ B \mid \exists \pi{:}\{1..n\}\to\{1..n\}.\ \pi \text{ bijektiv} \wedge \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B \,\}$$

- $\boldsymbol{R_A^\infty = 3/2}$ **erreichbar bei Dreiecksungleichung**
  - Direkte Verbindung ist kürzer als ein Umweg: $\forall i, j, k.\ c_{i,j} \leq c_{i,k} + c_{k,j}$

Approximation des Traveling Salesman Problems

$$\boldsymbol{TSP} = \{\, c_{12}, \ldots, c_{n-1,n},\ B \mid \exists \pi{:}\{1..n\}\to\{1..n\}.\ \pi \text{ bijektiv} \wedge \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B \,\}$$

- **$R_A^\infty = 3/2$ erreichbar bei Dreiecksungleichung**
  - Direkte Verbindung ist kürzer als ein Umweg: $\forall i, j, k.\ c_{i,j} \leq c_{i,k} + c_{k,j}$
- **Keine endliche Grenze für multiplikativen Fehler**
  - Es gibt keinen polynomiellen Algorithmus A mit $R_A^\infty = r$ für ein $r \in \mathbb{N}$

Approximation des Traveling Salesman Problems

$$\boldsymbol{TSP} = \{\, c_{12}, \ldots, c_{n-1,n},\ B \mid \exists \pi{:}\{1..n\}\to\{1..n\}.\ \pi \text{ bijektiv} \wedge \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B \,\}$$

- **$R_A^\infty = 3/2$ erreichbar bei Dreiecksungleichung**
  - Direkte Verbindung ist kürzer als ein Umweg: $\forall i, j, k.\ c_{i,j} \leq c_{i,k} + c_{k,j}$
- **Keine endliche Grenze für multiplikativen Fehler**
  - Es gibt keinen polynomiellen Algorithmus A mit $R_A^\infty = r$ für ein $r \in \mathbb{N}$

  Wenn es A geben würde, dann entscheiden wir HC polynomiell wie folgt

Approximation des Traveling Salesman Problems

$$\boldsymbol{TSP} = \{\, c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ B \mid \exists \pi{:}\{1..n\}\to\{1..n\}.\ \pi \text{ bijektiv} \wedge \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B \,\}$$

- $\boldsymbol{R_A^\infty = 3/2}$ **erreichbar bei Dreiecksungleichung**
  - Direkte Verbindung ist kürzer als ein Umweg: $\forall i, j, k.\ c_{i,j} \leq c_{i,k} + c_{k,j}$
- **Keine endliche Grenze für multiplikativen Fehler**
  - Es gibt keinen polynomiellen Algorithmus A mit $R_A^\infty = r$ für ein $r \in \mathbb{N}$

  Wenn es A geben würde, dann entscheiden wir HC polynomiell wie folgt
  - Transformiere einen Graphen $G = (V, E)$ in $w = c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ |V|$ mit $c_{ij} = 1$ falls $\{i, j\} \in E$ und $c_{ij} = r|V| + 1$ sonst

Approximation des Traveling Salesman Problems

$$\boldsymbol{TSP} = \{\, c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ B \mid \exists \pi{:}\{1..n\}\to\{1..n\}.\ \pi \text{ bijektiv} \wedge \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B \,\}$$

- **$R_A^\infty = 3/2$ erreichbar bei Dreiecksungleichung**
  - Direkte Verbindung ist kürzer als ein Umweg: $\forall i, j, k.\ c_{i,j} \leq c_{i,k} + c_{k,j}$
- **Keine endliche Grenze für multiplikativen Fehler**
  - Es gibt keinen polynomiellen Algorithmus A mit $R_A^\infty = r$ für ein $r \in \mathbb{N}$

  Wenn es A geben würde, dann entscheiden wir HC polynomiell wie folgt
  - Transformiere einen Graphen $G = (V, E)$ in $w = c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ |V|$ mit $c_{ij} = 1$ falls $\{i, j\} \in E$ und $c_{ij} = r|V| + 1$ sonst
  - Dann $G \in HC \Rightarrow OPT_{TSP}(w) = |V|$ und $G \notin HC \Rightarrow OPT_{TSP}(w) > (r+1) * |V|$

Approximation des Traveling Salesman Problems

$$\boldsymbol{TSP} = \{\, c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ B \mid \exists \pi{:}\{1..n\}\to\{1..n\}.\ \pi \text{ bijektiv} \wedge \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B \,\}$$

- **$R_A^\infty = 3/2$ erreichbar bei Dreiecksungleichung**
  - Direkte Verbindung ist kürzer als ein Umweg: $\forall i, j, k.\ c_{i,j} \leq c_{i,k} + c_{k,j}$
- **Keine endliche Grenze für multiplikativen Fehler**
  - Es gibt keinen polynomiellen Algorithmus A mit $R_A^\infty = r$ für ein $r \in \mathbb{N}$

  Wenn es A geben würde, dann entscheiden wir HC polynomiell wie folgt
  - Transformiere einen Graphen $G = (V, E)$ in $w = c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ |V|$ mit $c_{ij} = 1$ falls $\{i, j\} \in E$ und $c_{ij} = r|V| + 1$ sonst
  - Dann $G \in HC \Rightarrow OPT_{TSP}(w) = |V|$ und $G \notin HC \Rightarrow OPT_{TSP}(w) > (r+1) * |V|$
  - Für große Graphen: $A(w) \leq r * OPT_{TSP}(w)$ also $G \in HC \Leftrightarrow A(w) \leq r * |V|$

    (Für kleine Graphen verwende den exponentiellen Entscheidungsalgorithmus)

Approximation des Traveling Salesman Problems

$$\boldsymbol{TSP} = \{\, c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ B \mid \exists \pi{:}\{1..n\}\to\{1..n\}.\ \pi \text{ bijektiv} \wedge \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B \,\}$$

- **$R_A^\infty = 3/2$ erreichbar bei Dreiecksungleichung**
  - Direkte Verbindung ist kürzer als ein Umweg: $\forall i,j,k.\ c_{i,j} \leq c_{i,k} + c_{k,j}$
- **Keine endliche Grenze für multiplikativen Fehler**
  - Es gibt keinen polynomiellen Algorithmus A mit $R_A^\infty = r$ für ein $r \in \mathbb{N}$

  Wenn es A geben würde, dann entscheiden wir HC polynomiell wie folgt
  - Transformiere einen Graphen $G = (V, E)$ in $w = c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ |V|$ mit $c_{ij} = 1$ falls $\{i,j\} \in E$ und $c_{ij} = r|V| + 1$ sonst
  - Dann $G \in HC \Rightarrow OPT_{TSP}(w) = |V|$ und $G \notin HC \Rightarrow OPT_{TSP}(w) > (r+1) * |V|$
  - Für große Graphen: $A(w) \leq r * OPT_{TSP}(w)$ also $G \in HC \Leftrightarrow A(w) \leq r * |V|$

    (Für kleine Graphen verwende den exponentiellen Entscheidungsalgorithmus)

Beweistechnik: Reduktion auf $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem mit Multiplikation des Kostenunterschieds zwischen positiver und negativer Antwort

Travelling Salesman mit Dreiecksungleichung

$$\boldsymbol{TSP_\Delta} = \{\, c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ B \mid \forall i,j,k.\ c_{i,j} \leq c_{i,k} + c_{k,j} \ \wedge\ \exists \pi : \{1..n\} \to \{1..n\}.\ \pi \text{ bijektiv } \wedge \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B \,\}$$

- **Approximationsalgorithmus**
  - Zu $w = c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ B$ konstruiere vollständigen Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, .., v_n\}$ und Gewichten $c_{i,j}$ für $\{v_i, v_j\} \in E$

Travelling Salesman mit Dreiecksungleichung

$$\boldsymbol{TSP_\Delta} = \{\ c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ B \mid\ \forall i,j,k.\ c_{i,j} \leq c_{i,k} + c_{k,j}\ \wedge\ \exists \pi : \{1..n\} \to \{1..n\}.\ \pi \text{ bijektiv } \wedge \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B\ \}$$

- **Approximationsalgorithmus**
  - Zu $w = c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ B$ konstruiere vollständigen Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, .., v_n\}$ und Gewichten $c_{i,j}$ für $\{v_i, v_j\} \in E$
  - Konstruiere spannenden Baum $T = (V, E_T)$ mit minimaler Kantensumme

    Beginnend mit $E_T = \emptyset$, $V_T = \{v_1\}$ wiederhole bis $V_T = V$
    - Wähle Kante $\{v_i, v_j\}$ mit minimalem Gewicht, so daß $v_i \in V_T$, $v_j \notin V_T$
    - Setze $V_T := V_T \cup \{v_j\}$ und $E_T := E_T \cup \{v_i, v_j\}$

Travelling Salesman mit Dreiecksungleichung

$$\boldsymbol{TSP_\Delta} = \{\ c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ B \mid\ \forall i,j,k.\ c_{i,j} \leq c_{i,k} + c_{k,j}\ \wedge\ \exists \pi : \{1..n\} \to \{1..n\}.\ \pi \text{ bijektiv } \wedge \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B\ \}$$

- **Approximationsalgorithmus**
  - Zu $w = c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ B$ konstruiere vollständigen Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, .., v_n\}$ und Gewichten $c_{i,j}$ für $\{v_i, v_j\} \in E$
  - Konstruiere spannenden Baum $T = (V, E_T)$ mit minimaler Kantensumme

    Beginnend mit $E_T = \emptyset$, $V_T = \{v_1\}$ wiederhole bis $V_T = V$
    - Wähle Kante $\{v_i, v_j\}$ mit minimalem Gewicht, so daß $v_i \in V_T$, $v_j \notin V_T$
    - Setze $V_T := V_T \cup \{v_j\}$ und $E_T := E_T \cup \{v_i, v_j\}$
  - Durchlaufe T so, daß jede Kante genau zweimal benutzt wird

Travelling Salesman mit Dreiecksungleichung

$$\boldsymbol{TSP_\Delta} = \{\ c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ B \mid\ \forall i,j,k.\ c_{i,j} \leq c_{i,k} + c_{k,j}\ \wedge\ \exists \pi : \{1..n\} \to \{1..n\}.\ \pi \text{ bijektiv } \wedge \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B\ \}$$

- **Approximationsalgorithmus**
  - Zu $w = c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ B$ konstruiere vollständigen Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, .., v_n\}$ und Gewichten $c_{i,j}$ für $\{v_i, v_j\} \in E$
  - Konstruiere spannenden Baum $T = (V, E_T)$ mit minimaler Kantensumme

    Beginnend mit $E_T = \emptyset$, $V_T = \{v_1\}$ wiederhole bis $V_T = V$
    - Wähle Kante $\{v_i, v_j\}$ mit minimalem Gewicht, so daß $v_i \in V_T$, $v_j \notin V_T$
    - Setze $V_T := V_T \cup \{v_j\}$ und $E_T := E_T \cup \{v_i, v_j\}$
  - Durchlaufe T so, daß jede Kante genau zweimal benutzt wird
  - Verkürze den entstandenen Rundweg so, daß einem Knoten zum nächsten noch nicht angesteuerten Knoten verzweigt wird

Travelling Salesman mit Dreiecksungleichung

$$\boldsymbol{TSP_\Delta} = \{\, c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ B \mid \forall i,j,k.\ c_{i,j} \leq c_{i,k} + c_{k,j} \ \wedge\ \exists \pi : \{1..n\} \to \{1..n\}.\ \pi \text{ bijektiv } \wedge \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B \,\}$$

- **Approximationsalgorithmus**
  - Zu $w = c_{12}, ..., c_{n-1,n},\ B$ konstruiere vollständigen Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, .., v_n\}$ und Gewichten $c_{i,j}$ für $\{v_i, v_j\} \in E$
  - Konstruiere spannenden Baum $T = (V, E_T)$ mit minimaler Kantensumme

    Beginnend mit $E_T = \emptyset$, $V_T = \{v_1\}$ wiederhole bis $V_T = V$
    - Wähle Kante $\{v_i, v_j\}$ mit minimalem Gewicht, so daß $v_i \in V_T$, $v_j \notin V_T$
    - Setze $V_T := V_T \cup \{v_j\}$ und $E_T := E_T \cup \{v_i, v_j\}$
  - Durchlaufe T so, daß jede Kante genau zweimal benutzt wird
  - Verkürze den entstandenen Rundweg so, daß einem Knoten zum nächsten noch nicht angesteuerten Knoten verzweigt wird
- **Laufzeit des Algorithmus ist $\boldsymbol{O(n^3)}$**

Travelling Salesman mit Dreiecksungleichung

$$\boldsymbol{TSP_\Delta} = \{\, c_{12}, \ldots, c_{n-1,n},\ B \mid \forall i,j,k.\ c_{i,j} \leq c_{i,k} + c_{k,j} \ \wedge\ \exists \pi : \{1..n\} \to \{1..n\}.\ \pi \text{ bijektiv} \ \wedge\ \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B \,\}$$

- **Approximationsalgorithmus**
  - Zu $w = c_{12}, \ldots, c_{n-1,n},\ B$ konstruiere vollständigen Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, .., v_n\}$ und Gewichten $c_{i,j}$ für $\{v_i, v_j\} \in E$
  - Konstruiere spannenden Baum $T = (V, E_T)$ mit minimaler Kantensumme

    Beginnend mit $E_T = \emptyset$, $V_T = \{v_1\}$ wiederhole bis $V_T = V$
    - Wähle Kante $\{v_i, v_j\}$ mit minimalem Gewicht, so daß $v_i \in V_T$, $v_j \notin V_T$
    - Setze $V_T := V_T \cup \{v_j\}$ und $E_T := E_T \cup \{v_i, v_j\}$
  - Durchlaufe T so, daß jede Kante genau zweimal benutzt wird
  - Verkürze den entstandenen Rundweg so, daß einem Knoten zum nächsten noch nicht angesteuerten Knoten verzweigt wird
- **Laufzeit des Algorithmus ist $\boldsymbol{O(n^3)}$**
- **Güte des Algorithmus ist $\boldsymbol{R_A^\infty \leq 3/2}$** (aufwendig)

"Approximation" einer Entscheidung

- **Verhalten gesteuert durch Zufallszahlen**
  - Falsche Entscheidung kann nicht ausgeschlossen werden

"Approximation" einer Entscheidung

- **Verhalten gesteuert durch Zufallszahlen**
  - Falsche Entscheidung kann nicht ausgeschlossen werden
  - Approximation $\equiv$ Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeit
  - Fehlerwahrscheinlichkeit unter 2^{-100} besser als die von Hardwarefehlern

"Approximation" einer Entscheidung

- **Verhalten gesteuert durch Zufallszahlen**
  - Falsche Entscheidung kann nicht ausgeschlossen werden
  - Approximation $\equiv$ Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeit
  - Fehlerwahrscheinlichkeit unter 2^{-100} besser als die von Hardwarefehlern
- **Anwendungen**
  - Primzahltest in linearer Zeit
  - Optimierung von Quicksort auf $\mathcal{O}(n*logn)$ (Bestimmung Pivotelement)

"Approximation" einer Entscheidung

- **Verhalten gesteuert durch Zufallszahlen**
  - Falsche Entscheidung kann nicht ausgeschlossen werden
  - Approximation $\equiv$ Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeit
  - Fehlerwahrscheinlichkeit unter 2^{-100} besser als die von Hardwarefehlern
- **Anwendungen**
  - Primzahltest in linearer Zeit
  - Optimierung von Quicksort auf $\mathcal{O}(n*logn)$ (Bestimmung Pivotelement)
- **Wie weist man gut Eigenschaften nach?**

"Approximation" einer Entscheidung

- **Verhalten gesteuert durch Zufallszahlen**
  - Falsche Entscheidung kann nicht ausgeschlossen werden
  - Approximation $\equiv$ Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeit
  - Fehlerwahrscheinlichkeit unter 2^{-100} besser als die von Hardwarefehlern
- **Anwendungen**
  - Primzahltest in linearer Zeit
  - Optimierung von Quicksort auf $\mathcal{O}(n*logn)$ (Bestimmung Pivotelement)
- **Wie weist man gut Eigenschaften nach?**
  - Einfaches Modell für probabilistische Algorithmen formulieren

"Approximation" einer Entscheidung

- **Verhalten gesteuert durch Zufallszahlen**
  - Falsche Entscheidung kann nicht ausgeschlossen werden
  - Approximation $\equiv$ Verringerung der Fehlerwahrscheinlichkeit
  - Fehlerwahrscheinlichkeit unter 2^{-100} besser als die von Hardwarefehlern
- **Anwendungen**
  - Primzahltest in linearer Zeit
  - Optimierung von Quicksort auf $\mathcal{O}(n*logn)$ (Bestimmung Pivotelement)
- **Wie weist man gut Eigenschaften nach?**
  - Einfaches Modell für probabilistische Algorithmen formulieren
  - Eigenschaften abstrakter probabilistischer Sprachklassen analysieren

Probabilistische Berechnungsmodelle

- **Probabilistische Turingmaschine**
  - Struktur: $\boldsymbol{\tau} = (S, X, \Gamma, \delta, s_0, b)$
  - Zustandsüberführungsfunktion: $\delta{:}S{\times}\Gamma \rightarrow (S{\times}\Gamma{\times}\{r,l,h\})^2$

    Jede Alternative wird mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ ausgewählt

Probabilistische Berechnungsmodelle

- **Probabilistische Turingmaschine**
  - Struktur: $\boldsymbol{\tau} = (S, X, \Gamma, \delta, s_0, b)$
  - Zustandsüberführungsfunktion: $\delta{:}S{\times}\Gamma \rightarrow (S{\times}\Gamma{\times}\{r,l,h\})^2$

    Jede Alternative wird mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ ausgewählt
  - Ausgabe: $h_\tau(w) \in \{0, 1, ?\}$ (Akzeptieren – Verwerfen – keine Aussage)

Probabilistische Berechnungsmodelle

- **Probabilistische Turingmaschine**
  - Struktur: $\boldsymbol{\tau} = (S, X, \Gamma, \delta, s_0, b)$
  - Zustandsüberführungsfunktion: $\delta: S \times \Gamma \rightarrow (S \times \Gamma \times \{r, l, h\})^2$

    Jede Alternative wird mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ ausgewählt
  - Ausgabe: $h_\tau(w) \in \{0, 1, ?\}$ (Akzeptieren – Verwerfen – keine Aussage)
  - Rechenzeit: maximale Rechenzeit aller möglichen Rechenwege

Probabilistische Berechnungsmodelle

- **Probabilistische Turingmaschine**
  - Struktur: $\boldsymbol{\tau} = (S, X, \Gamma, \delta, s_0, b)$
  - Zustandsüberführungsfunktion: $\delta: S \times \Gamma \rightarrow (S \times \Gamma \times \{r, l, h\})^2$

    Jede Alternative wird mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ ausgewählt
  - Ausgabe: $h_\tau(w) \in \{0, 1, ?\}$ (Akzeptieren – Verwerfen – keine Aussage)
  - Rechenzeit: maximale Rechenzeit aller möglichen Rechenwege
  - PTM: polynomiell zeitbeschränkte probabilistische Turingmaschine

Probabilistische Berechnungsmodelle

- **Probabilistische Turingmaschine**
  - Struktur: $\boldsymbol{\tau} = (S, X, \Gamma, \delta, s_0, b)$
  - Zustandsüberführungsfunktion: $\delta: S \times \Gamma \to (S \times \Gamma \times \{r, l, h\})^2$

    Jede Alternative wird mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ ausgewählt
  - Ausgabe: $h_\tau(w) \in \{0, 1, ?\}$ (Akzeptieren – Verwerfen – keine Aussage)
  - Rechenzeit: maximale Rechenzeit aller möglichen Rechenwege
  - PTM: polynomiell zeitbeschränkte probabilistische Turingmaschine
- **Abstrakteres Modell: Probabilistische Algorithmen**
  - Programme mit zufälligen Entscheidungen
  - Abstrakte Komplexität wie bisher

Probabilistische Berechnungsmodelle

- **Probabilistische Turingmaschine**
  - Struktur: $\boldsymbol{\tau} = (S, X, \Gamma, \delta, s_0, b)$
  - Zustandsüberführungsfunktion: $\delta: S \times \Gamma \to (S \times \Gamma \times \{r, l, h\})^2$

    Jede Alternative wird mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ ausgewählt
  - Ausgabe: $h_\tau(w) \in \{0, 1, ?\}$ (Akzeptieren – Verwerfen – keine Aussage)
  - Rechenzeit: maximale Rechenzeit aller möglichen Rechenwege
  - PTM: polynomiell zeitbeschränkte probabilistische Turingmaschine
- **Abstrakteres Modell: Probabilistische Algorithmen**
  - Programme mit zufälligen Entscheidungen
  - Abstrakte Komplexität wie bisher

Was kann man mit polynomiell zeitbeschränkten probabilistischen Algorithmen erreichen?

Wichtige Probabilistische Sprachklassen

- **PP: Probabilistic Polynomial** Monte-Carlo-Algorithmen
  - Wahrscheinlichkeit für korrekte Antwort größer als 1/2
  - PP $= \{L \mid \exists \text{ PTM } \tau.\ \forall w.\ Prob(\ h_\tau(w) = \chi_L(w)\ ) > 1/2\}$

Wichtige Probabilistische Sprachklassen

- **PP: Probabilistic Polynomial** Monte-Carlo-Algorithmen
  - Wahrscheinlichkeit für korrekte Antwort größer als 1/2
  - PP $= \{L \mid \exists \text{ PTM } \tau.\ \forall w.\ Prob(\ h_\tau(w)=\chi_L(w)\ ) > 1/2\}$
- **BPP: Bounded error Probabilistic Polynomial**
  - Wahrscheinlichkeit für korrekte Antwort größer als $1/2+\epsilon$
  - BPP $= \{L \mid \exists \text{ PTM } \tau.\ \exists \epsilon > 0\ \forall w.\ Prob(\ h_\tau(w)=\chi_L(w)\ ) > 1/2+\epsilon\}$

Wichtige Probabilistische Sprachklassen

- **PP: Probabilistic Polynomial** Monte-Carlo-Algorithmen
  - Wahrscheinlichkeit für korrekte Antwort größer als 1/2
  - PP $= \{L \mid \exists \text{ PTM } \tau.\ \forall w.\ Prob(\ h_\tau(w)=\chi_L(w)\ ) > 1/2\}$
- **BPP: Bounded error Probabilistic Polynomial**
  - Wahrscheinlichkeit für korrekte Antwort größer als $1/2+\epsilon$
  - BPP $= \{L \mid \exists \text{ PTM } \tau.\ \exists \epsilon > 0\ \forall w.\ Prob(\ h_\tau(w)=\chi_L(w)\ ) > 1/2+\epsilon\}$
- **RP: Random Polynomial**
  - Nichtzugehörige korrekt identifiziert, andere mit Wahrscheinlichkeit $> 1/2$
  - RP $= \{L \mid \exists \text{ PTM } \tau.\ \forall w \in L.\ Prob(\ h_\tau(w)=1\ ) > 1/2$
    $\wedge\ \forall w \notin L.\ Prob(\ h_\tau(w)=0\ ) = 1\}$

Wichtige Probabilistische Sprachklassen

- **PP: Probabilistic Polynomial** Monte-Carlo-Algorithmen
  - Wahrscheinlichkeit für korrekte Antwort größer als 1/2
  - PP $= \{L \mid \exists \text{ PTM } \tau.\ \forall w.\ Prob(\ h_\tau(w)=\chi_L(w)\ ) > 1/2\}$
- **BPP: Bounded error Probabilistic Polynomial**
  - Wahrscheinlichkeit für korrekte Antwort größer als $1/2+\epsilon$
  - BPP $= \{L \mid \exists \text{ PTM } \tau.\ \exists \epsilon > 0\ \forall w.\ Prob(\ h_\tau(w)=\chi_L(w)\ ) > 1/2+\epsilon\}$
- **RP: Random Polynomial**
  - Nichtzugehörige korrekt identifiziert, andere mit Wahrscheinlichkeit $> 1/2$
  - RP $= \{L \mid \exists \text{ PTM } \tau.\ \forall w \in L.\ Prob(\ h_\tau(w)=1\ ) > 1/2$
    $\wedge\ \forall w \notin L.\ Prob(\ h_\tau(w)=0\ ) = 1\}$
- **ZPP: Zero error PP** Las-Vegas-Algorithmen
  - Wahrscheinlichkeit für korrekte Antwort $> 1/2$, keine falschen Antworten
  - ZPP $= \{L \mid \exists \text{ PTM } \tau.$
    $\forall w \in L.\ (\ Prob(\ h_\tau(w)=1\ ) > 1/2\ \wedge\ Prob(\ h_\tau(w)=0\ ) = 0\ )$
    $\wedge\ \forall w \notin L.\ Prob(\ h_\tau(w)=0\ ) > 1/2\ \wedge\ Prob(\ h_\tau(w)=1\ ) = 0\ )\}$

Probabilistischer Primzahltest für $n \geq 3$

1. Wenn n gerade ist: Antwort "keine Primzahl"

Probabilistischer Primzahltest für $n \geq 3$

1. Wenn n gerade ist: Antwort "keine Primzahl"
2. Ansonsten wähle $a \in \{1 \ldots n\}$ zufällig

Probabilistischer Primzahltest für $n \geq 3$

1. Wenn n gerade ist: Antwort "keine Primzahl"
2. Ansonsten wähle $a \in \{1 \ldots n\}$ zufällig
3. Falls $gcd(n, a) \neq 1$: Antwort "keine Primzahl"

Probabilistischer Primzahltest für $n \geq 3$

1. Wenn n gerade ist: Antwort "keine Primzahl"
2. Ansonsten wähle $a \in \{1 \ldots n\}$ zufällig
3. Falls $gcd(n, a) \neq 1$: Antwort "keine Primzahl"
4. Ansonsten setze $\epsilon := a^{(n-1)/2} (mod\ n)$

$$\delta := J(a, n)$$ *(Jacobi Symbol)*

Probabilistischer Primzahltest für $n \geq 3$

1. Wenn n gerade ist: Antwort "keine Primzahl"
2. Ansonsten wähle $a \in \{1 \ldots n\}$ zufällig
3. Falls $gcd(n, a) \neq 1$: Antwort "keine Primzahl"
4. Ansonsten setze $\epsilon := a^{(n-1)/2} (mod\ n)$

   $\delta := J(a, n)$ *(Jacobi Symbol)*
5. Falls $\epsilon = \delta$: Antwort "Primzahl"

Probabilistischer Primzahltest für $n \geq 3$

1. Wenn n gerade ist: Antwort "keine Primzahl"
2. Ansonsten wähle $a \in \{1 \ldots n\}$ zufällig
3. Falls $gcd(n, a) \neq 1$: Antwort "keine Primzahl"
4. Ansonsten setze $\epsilon := a^{(n-1)/2} (mod\ n)$

   $\delta := J(a, n)$ *(Jacobi Symbol)*
5. Falls $\epsilon = \delta$: Antwort "Primzahl"
6. Ansonsten: Antwort "keine Primzahl"

Probabilistischer Primzahltest für $n \geq 3$

1. Wenn n gerade ist: Antwort "keine Primzahl"
2. Ansonsten wähle $a \in \{1 \ldots n\}$ zufällig
3. Falls $gcd(n, a) \neq 1$: Antwort "keine Primzahl"
4. Ansonsten setze $\epsilon := a^{(n-1)/2} (mod\ n)$

   $\delta := J(a, n)$ *(Jacobi Symbol)*
5. Falls $\epsilon = \delta$: Antwort "Primzahl"
6. Ansonsten: Antwort "keine Primzahl"

RP-Algorithmus

– Korrekte Ausgabe, falls n Primzahl

– Fehlerwahrscheinlichkeit unter $1/2$, falls n keine Primzahl

Probabilistischer Primzahltest für $n \geq 3$

1. Wenn n gerade ist: Antwort "keine Primzahl"
2. Ansonsten wähle $a \in \{1 \ldots n\}$ zufällig
3. Falls $gcd(n, a) \neq 1$: Antwort "keine Primzahl"
4. Ansonsten setze $\epsilon := a^{(n-1)/2} (mod\ n)$

   $\delta := J(a, n)$ *(Jacobi Symbol)*
5. Falls $\epsilon = \delta$: Antwort "Primzahl"
6. Ansonsten: Antwort "keine Primzahl"

RP-Algorithmus

– Korrekte Ausgabe, falls n Primzahl

– Fehlerwahrscheinlichkeit unter $1/2$, falls n keine Primzahl

Rechenzeit $\leq 6 * \log n$

Eigenschaften probabilistischer Sprachklassen

- **k-fache Iteration von RP Algorithmen verringert die Wahrscheinlichkeit einer falschen Antwort auf 2^{-k}**

Eigenschaften probabilistischer Sprachklassen

- **k-fache Iteration von RP Algorithmen verringert die Wahrscheinlichkeit einer falschen Antwort auf 2^{-k}**
  - Ist τ die k-fache statistisch unabhängige Iteration einer PTM für $L \in RP$, so gilt

$$\forall w \in L.Prob(\ h_\tau(w)=1\ ) > 1-2^{-k} \ \wedge\ \forall w \notin L.Prob(\ h_\tau(w)=0\ ) = 1$$

Eigenschaften probabilistischer Sprachklassen

- **k-fache Iteration von RP Algorithmen verringert die Wahrscheinlichkeit einer falschen Antwort auf 2^{-k}**
  - Ist τ die k-fache statistisch unabhängige Iteration einer PTM für $L \in RP$, so gilt

$$\forall w \in L.Prob(\ h_\tau(w)=1\ ) > 1-2^{-k} \ \wedge\ \forall w \notin L.Prob(\ h_\tau(w)=0\ ) = 1$$

- **t-fache Iteration eines BPP Algorithmus für $t > \frac{k}{-\log(1-4\epsilon^2)}$ verringert die Wahrscheinlichkeit der falschen Antwort auf 2^{-k}**

Eigenschaften probabilistischer Sprachklassen

- **k-fache Iteration von RP Algorithmen verringert die Wahrscheinlichkeit einer falschen Antwort auf 2^{-k}**
  - Ist τ die k-fache statistisch unabhängige Iteration einer PTM für $L \in RP$, so gilt

    $$\forall w \in L. Prob(\ h_\tau(w)=1\ ) > 1-2^{-k} \ \wedge\ \forall w \notin L. Prob(\ h_\tau(w)=0\ ) = 1$$

- **t-fache Iteration eines BPP Algorithmus für $t > \frac{k}{-\log(1-4\epsilon^2)}$ verringert die Wahrscheinlichkeit der falschen Antwort auf 2^{-k}**
  - Sei τ^t die $(2t+1)$-fache statistisch unabhängige Iteration einer PTM τ für $L \in BPP$, die genau dann akzeptiert, wenn τ mindestens $t+1$-mal akzeptiert, so gilt für $t > \frac{k-1}{-\log(1-4\epsilon^2)}$

    $$\forall w.\ Prob(\ h_{\tau^t}(w)=\chi_L(w)\ ) > 1-2^{-k}$$

Sprachklassenhierarchie