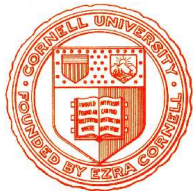


# Theoretische Informatik I



## Einheit 1

### Mathematische Methodik



1. Formale Modelle
2. Beweistechniken
3. Wichtige Grundbegriffe

## ● Klärung der Voraussetzungen

- Welche **Begriffe** sind zum Verständnis des Problems erforderlich?
- Erstellung eines **präzisen Modells**: abstrahiere von überflüssigen Details
- **Formulierung des Problems im Modell**: was genau ist zu tun?

## ● Lösungsweg konkretisieren

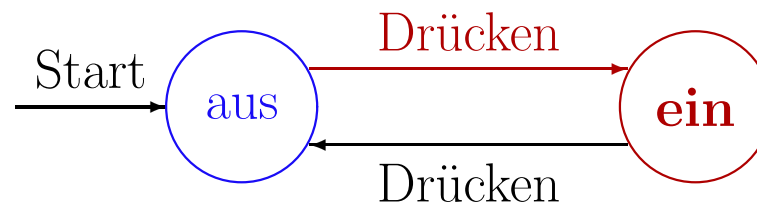
- Welche **Einzelschritte** benötigt man, um das Problem zu lösen?
- Welches **Gesamtergebnis** ergibt sich aus den Einzelschritten?
- Wie **beweist** man die Korrektheit des Gesamtergebnisses?

## ● Lösung zusammenfassen

- **Kurz und prägnant**: Argumente auf das Wesentliche beschränken
- Umgangssprache durch mathematisch präzise Formulierungen ersetzen

- **Automaten:** Abarbeitung von Eingaben

- z.B. Wechselschalter: Verarbeitung von “Drück”-Eingaben



- 2 Zustände: aus, ein – 1 Startzustand: aus
- 1 Eingabesymbol: Drücken
- 1 Endzustand: ein — wird erreicht bei ungerader Anzahl von Drücken

- **Grammatiken:** Vorschriften für Spracherzeugung

- z.B.:  $S \rightarrow \text{Drücken} \mid S\text{DrückenDrücken}$
- Erzeugt nur ungerade Anzahl von Drücken-Symbolen

- **Reguläre Ausdrücke:** algebraische Strukturen

- z.B.:  $(\text{DrückenDrücken})^*\text{Drücken}$

- **Testen von Programmen ist unzureichend**

- Nur hilfreich zur Entdeckung grober Fehler
- Viele kleine, aber gravierende Fehler fallen durch das Testraster
  - Pentium Bug (1994), Ariane 5 (1996), Mars Polar Lander (1999), ...

- **Kritische Programme müssen “bewiesen” werden**

- Erfolgreicher Beweis zeigt genau, wie das Programm arbeitet
- Erfolgloser Beweisversuch deutet auf mögliche Fehler im Programm
- Jeder Informatiker sollte die eigenen Programme beweisen

- **Jeder Informatiker muß Beweise verstehen**

- Deduktive Beweise für sequentielle Verarbeitung
- Induktionsbeweise für Rekursion / Schleifen
- Widerlegungsbeweise und Gegenbeispiele für Unmöglichkeitsaussagen

**Viele Informatiker wissen nicht, wie man stichhaltige Beweise führt**

# BEHAUPTUNGEN: AUSGANGSPUNKT JEDER BEWEISFÜHRUNG

## ● Wenn–Dann Aussagen:

- Eine **Konklusion** folgt aus einer oder mehreren **Hypothesen** (Annahmen)
- z.B. “*Wenn  $x \geq 4$ , dann  $2^x \geq x^2$* ”
- Auch:  *$H$  impliziert  $K$ , aus  $H$  folgt  $K$ ,  $K$  wenn  $H$ ,  $H \Rightarrow K$*
- Achtung: wenn  $K$  gilt, muß  $H$  nicht gelten ( $H$  muß nicht der Grund sein)

## Fast alle Behauptungen sind Wenn–Dann Aussagen

- Hypothesen sind zuweilen implizit oder ergeben sich aus dem Kontext
- z.B. “ *$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$* ” hat implizite Hypothese “ *$\theta$  ist ein Winkel*”

## ● Genau dann, wenn Aussagen

- Zwei Aussagen  $A$  und  $B$  sind äquivalent ( $A \Leftrightarrow B$ ,  $A \equiv B$ ,  $A$  iff  $B$  (engl.))
- z.B. “ *$x^2 = 1$  genau dann, wenn  $x = 1$* ”
- Gleichwertig mit  $A \Rightarrow B$  und  $B \Rightarrow A$

# BEISPIEL EINES DEDUKTIVEN BEWEISES

Wenn  $x$  die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt  $2^x \geq x^2$

## ● Informaler Beweis

- Es sei  $x$  die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen
- Das Quadrat jeder positiven ganzen Zahl ist mindestens 1
- Aus der Annahme folgt damit, daß  $x \geq 4$  sein muß
- Wir benutzen den Satz “*Wenn  $x \geq 4$ , dann  $2^x \geq x^2$* ” HMU Satz 1.3, Folie 14 und schließen daraus, daß  $2^x \geq x^2$  gilt

## ● Formaler Beweis

Aussage	Begründung
1. $x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$	Gegeben
2. $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 1$	Gegeben
3. $a^2 \geq 1, b^2 \geq 1, c^2 \geq 1, d^2 \geq 1$	(2) und Gesetze der Arithmetik
4. $x \geq 4$	(1), (3) und Gesetze der Arithmetik
5. $2^x \geq x^2$	(4) und <span style="border: 1px solid green; padding: 2px;">HMU Satz 1.3, Folie 14</span>

## Logische Beweisschritte von Annahme zur Konklusion

### ● Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen

- Beginne mit (Menge der) Annahmen
- Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus (allen) vorhergehenden Aussagen
- Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt

### ● Zulässige Argumente in Beweisschritten

- Logischer Schluß: Sind  $A$  und  $A \Rightarrow B$  bekannt, kann  $B$  gefolgert werden
- Bekannte mathematische Grundgesetze (z.B. Arithmetik)
- Bereits bewiesene Sätze
- Auflösung von Definitionen
- Extensionalität von Mengen:  $M=M'$  genau dann wenn  $M \subseteq M' \wedge M' \subseteq M$   
 $M \subseteq M'$  genau dann wenn  $(\forall x) x \in M \Rightarrow x \in M'$
- Gleichheit von Zahlen:  $x=y$  genau dann wenn weder  $x < y$  noch  $x > y$

# BEISPIEL FÜR AUFLÖSUNG VON DEFINITIONEN

Wenn  $S$  endliche Teilmenge einer Menge  $U$  ist und das Komplement von  $S$  (bezüglich  $U$ ) endlich ist, dann ist  $U$  endlich

## ● Definitionen

$S$  endlich  $\equiv$  Es gibt eine ganze Zahl  $n$  mit  $||S|| = n$

$T$  Komplement von  $S \equiv T \cup S = U$  und  $T \cap S = \emptyset$

## ● Beweis

Aussage	Begründung
1. $S$ endlich	Gegeben
2. $T$ Komplement von $S$	Gegeben
3. $T$ endlich	Gegeben
4. $  S   = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$	Auflösen der Definition in (1)
5. $  T   = m$ für ein $m \in \mathbb{N}$	Auflösen der Definition in (3)
6. $T \cup S = U$	Auflösen der Definition in (2)
7. $T \cap S = \emptyset$	Auflösen der Definition in (2)
8. $  U   = m + n$ für $n, m \in \mathbb{N}$	(4),(5),(6), (7) und Gesetze der Kardinalität
9. $U$ endlich	Einsetzen der Definition in (8)



# BEWEIS EINER MENGENÄQUIVALENZ

Für beliebige Mengen  $R$  und  $S$  gilt  $R \cup S = S \cup R$

## • Definitionen

$$x \in R \cup S \equiv x \in R \text{ oder } x \in S$$

## • Zu zeigen:

- $R \cup S = S \cup R$  also
- $R \cup S \subseteq S \cup R$  und  $S \cup R \subseteq R \cup S$  also
- Wenn  $x \in R \cup S$  dann  $x \in S \cup R$  und wenn  $x \in S \cup R$  dann  $x \in R \cup S$

## • Beweis der ersten Implikation

Aussage	Begründung
1. $x \in R \cup S$	Gegeben
2. $x \in R$ oder $x \in S$	Auflösen der Definition in (1)
3. $x \in S$ oder $x \in R$	Logische Umstellung von (2)
4. $x \in S \cup R$	Einsetzen der Definition in (3)

Beweis der zweiten Implikation genauso

# WIE GENAU/FORMAL MUSS EIN BEWEIS SEIN?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Zwischenschritte müssen mit “üblichen” Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details
- Gedankensprünge sind erlaubt, wenn Sie die Materie gut genug verstehen, daß Sie nichts mehr falsch machen können  
... es reicht nicht, daß Sie es einmal richtig gemacht haben

- 
- Tip: ausführliche Lösungen entwickeln, bis Sie genug Erfahrung haben.  
Bei Präsentation für andere zentrale Gedanken aus Lösung extrahieren
  - Test: verstehen Ihre Kommilitonen Ihre Lösung und warum sie funktioniert?

## Zeige, daß eine Aussage $A$ nicht gilt

### ● Beweis durch Widerspruch

- $A$  gilt nicht, wenn aus der Annahme von  $A$  ein Widerspruch folgt
- z.B. *Wenn  $S$  endliche Teilmenge einer unendlichen Menge  $U$  ist, dann ist das Komplement von  $S$  (bezüglich  $U$ ) unendlich*
- Beweis

Aussage	Begründung
1. $S$ endlich	Gegeben
2. $T$ Komplement von $S$	Gegeben
3. $U$ unendlich	Gegeben
4. $T$ endlich	Annahme
5. $U$ endlich	(1), (4) mit Satz auf Folie 7
6. Widerspruch	(3),(5)
7. $T$ unendlich	Annahme (4) muß falsch sein

## ● Beweis durch Gegenbeispiel

- $A$  ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
- z.B. *Wenn  $x$  eine Primzahl ist, dann ist  $x$  ungerade* ist falsch
- Beweis: 2 ist eine gerade Zahl, die eine Primzahl ist

## ● Beweis durch Kontraposition

- Statt *wenn  $H$  dann  $K$*  zeige *wenn nicht  $K$  dann nicht  $H$*
- Behauptungen sind aussagenlogisch äquivalent

## ● Spezielle Anwendung: Indirekte Beweisführung

- Zeige, daß aus  *$H$  und nicht  $K$*  ein Widerspruch folgt  
Aussagenlogisch äquivalent zu *wenn  $H$  dann  $K$*
- z.B. *Wenn für eine natürliche Zahl  $x$  gilt  $x^2 > 1$ , dann ist  $x \geq 2$*
- Beweis: *Sei  $x^2 > 1$ . Wenn  $x \geq 2$  nicht gilt, dann ist  $x = 1$  oder  $x = 0$ .  
Wegen  $1^2 = 1$  und  $0^2 = 0$  ist  $x^2 > 1$  in beiden Fällen falsch.  
Also muß  $x \geq 2$  sein*

## Gegenbeispielkonstruktion für unendliche Objekte

- **Terminierung** von Programmen ist “unentscheidbar”

*Es gibt kein Programm, das testen kann, ob eine beliebiges Programm bei einer bestimmten Eingabe überhaupt anhält*

- **Beweis stützt sich auf wenige Grundannahmen**

1. Programme und ihre Daten sind als Zahlen codierbar

2. Computer sind universelle Maschinen

- Bei Eingabe von Programm und Daten berechnen sie das Ergebnis

- Schreibweise:  $p_i(j) \hat{=}$  Anwendung des  $i$ -ten Programms auf die Zahl  $j$

3. Man kann Programme beliebig zu neuen Programmen zusammensetzen

... und die Nummer des neuen Programms berechnen

# TERMINIERUNG VON PROGRAMMEN IST UNENTSCHEIDBAR

- Annahme: es gibt ein Programm zum Test auf Terminierung
  - $\text{Term}(i,j)=1$  falls  $p_i(j)$  hält (sonst 0)

- Konstruiere ein neues Programm

Unsinn wie folgt:

$$\text{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \text{Term}(i,i)=0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	1	2	3	4	...
$p_0$	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	...
$p_1$	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
$p_2$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
$p_3$	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\times$	$\perp$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times \hat{=}$  Terminierung,  $\perp \hat{=}$  hält nicht

- Unsinn ist ein Programm

Also muß Unsinn eine Nummer  $k$  haben

- Was macht  $p_k = \text{Unsinn}$  auf seiner eigenen Nummer?

- Wenn  $p_k(k)$  hält, dann  $\text{Term}(k,k)=1$ , also hält  $\text{Unsinn}(k)$  nicht an ???
- Wenn  $p_k(k)$  nicht hält, dann  $\text{Term}(k,k)=0$ , also hält  $\text{Unsinn}(k)$  an ???

- Dies ist ein Widerspruch,

Also kann es den Test auf Terminierung nicht geben

## Beweise eine Aussage $A$ für alle natürlichen Zahlen

### ● Standardinduktion

- Gilt  $A$  für  $i$  und folgt  $A$  für  $n+1$ , wenn  $A$  für  $n$  gilt dann gilt  $A$  für alle  $n \geq i$
- z.B. *Wenn  $x \geq 4$ , dann  $2^x \geq x^2$*

Induktionsanfang  $x=4$ : Es ist  $2^x = 16 \geq 16 = x^2$

Induktionsschritt: Es gelte  $2^n \geq n^2$  für ein beliebiges  $n \geq 4$

Dann ist  $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2$  aufgrund der Induktionsannahme  
und  $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n(n+2+1/n) \leq n(n+n) = 2n^2$  wegen  $n \geq 4$   
also gilt  $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

### ● Vollständige Induktion

- Folgt  $A$  für  $n$ , wenn  $A$  für alle  $j < n$  mit  $j \geq i$  gilt dann gilt  $A$  für alle  $n \geq i$
- Mächtiger, da man nicht den unmittelbaren Vorgänger benutzen muß

# STRUKTURELLE INDUKTION

## Zeige $A$ für alle Elemente einer rekursiven Datenstruktur

Gilt  $A$  für das Basiselement und folgt  $A$  für ein zusammengesetztes Element, wenn  $A$  für seine Unterelemente gilt, dann gilt  $A$  für alle Elemente

– z.B. *Die Summe einer Liste  $L$  von positiven ganzen Zahlen ist mindestens so groß wie ihre Länge*

Induktionsanfang  $L$  ist leer: Die Summe und die Länge von  $L$  ist 0

Induktionsschritt: Es gelte  $\text{sum}(L) \geq |L|$

Betrachte die Liste  $L \circ x$ , die durch Anhängen von  $x$  an  $L$  entsteht

Dann gilt  $\text{sum}(L \circ x) = \text{sum}(L) + x \geq \text{sum}(L) + 1 \geq |L| + 1 = |L \circ x|$

**Häufig eingesetzt für Analyse von**

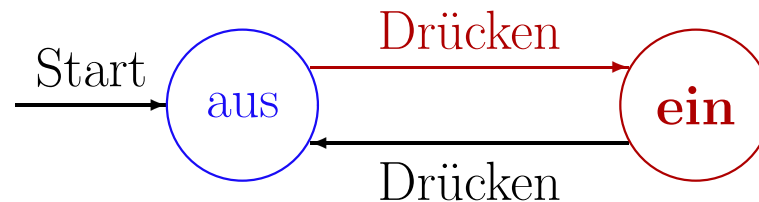
- **Baumstrukturen** (Suchen, Sortieren, ...)
- **Syntaktische Strukturen** (Formeln, Programmiersprachen, ...)

⋮



# GEGENSEITIGE INDUKTION

## Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



### Zeige: Automat ist ein Wechselschalter

- $S_1(n)$ : Ist  $n$  gerade, so ist der Automat nach  $n$ -fachem Drücken ausgeschaltet
- $S_2(n)$ : Ist  $n$  ungerade, so ist der Automat nach  $n$ -fachem Drücken eingeschaltet

Induktionsanfang  $n=0$ :  $n$  ist gerade also gilt  $S_2(0)$

der Automat ist ausgeschaltet, also gilt  $S_1(0)$

Induktionsschritt: Es gelte  $S_1(n)$  und  $S_2(n)$ . Betrachte  $n+1$

- Falls  $n+1$  ungerade, dann gilt  $S_1(n+1)$  und  $n$  ist gerade.

Wegen  $S_1(n)$  war der Automat “aus” und wechselt auf “ein”. Es gilt  $S_2(n)$

- Falls  $n+1$  gerade, dann gilt  $S_2(n+1)$  und  $n$  ist ungerade.

Wegen  $S_2(n)$  war der Automat “ein” und wechselt auf “aus”. Es gilt  $S_1(n)$

# MATHEMATISCHES VOKABULAR I: WORTE UND SPRACHEN

- **Alphabet  $\Sigma$** : endliche Menge von Symbolen,  
z.B.  $\Sigma = \{0, 1\}$ ,  $\Sigma = \{0, \dots, 9\}$ ,  $\Sigma = \{A, \dots, Z, a, \dots, z, \ , ?, !, \dots\}$
- **Worte**: endliche Folge  $w$  von Symbolen eines Alphabets  
Auch **Zeichenreihen** oder **Strings** genannt
- **$\epsilon$** : Leeres Wort (ohne jedes Symbol)
- **$wv$** : **Konkatenation** (Aneinanderhängung) der Worte  $w$  und  $v$
- **$u^i$** :  $i$ -fache Konkatenation des Wortes (oder Symbols)  $u$
- **$|w|$** : **Länge** des Wortes  $w$  (Anzahl der Symbole)
- **$v \sqsubseteq w$** :  $v$  **Präfix von  $w$** , wenn  $w = vu$  für ein Wort  $u$
- **$\Sigma^k$** : Menge der Worte der Länge  $k$  mit Symbolen aus  $\Sigma$
- **$\Sigma^*$** : Menge aller Worte über  $\Sigma$
- **$\Sigma^+$** : Menge aller nichtleeren Worte über  $\Sigma$
- **Sprache  $L$** : Beliebige Menge von Worten über einem Alphabet  $\Sigma$   
Üblicherweise in abstrakter Mengennotation gegeben  
z.B.  $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w| \text{ ist gerade}\} \quad \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- **Problem  $P$** : Menge von Worten über einem Alphabet  $\Sigma$   
Das “Problem” ist, Zugehörigkeit zur Menge  $P$  zu testen

## MATHEMATISCHES VOKABULAR II: FUNKTIONEN

- **Funktion  $f : S \rightarrow S'$** : Abbildung zwischen den Grundmengen  $S$  und  $S'$   
nicht unbedingt auf allen Elementen von  $S$  definiert
- **Domain von  $f$** :  $\text{domain}(f) = \{x \in S \mid f(x) \text{ definiert}\}$  (Definitionsbereich)
- **Range von  $f$** :  $\text{range}(f) = \{y \in S' \mid \exists x \in S \ f(x) = y\}$  (Wertebereich)
- **$f$  total**:  $\text{domain}(f) = S$  (andernfalls ist  **$f$  partiell**)
- **$f$  injektiv**:  $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- **$f$  surjektiv**:  $\text{range}(f) = S'$
- **$f$  bijektiv**:  $f$  injektiv und surjektiv
- **Umkehrfunktion  $f^{-1}: S' \rightarrow S$** :  $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$  ( $f$  injektiv!)
- **Urbild  $f^{-1}(L)$** : Die Menge  $\{x \in S \mid f(x) \in L\}$
- **Charakteristische Funktion  $\chi_L$  von  $L \subseteq S$** :  $\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- **Partiell-charakteristische Funktion  $\psi_L$** :  $\psi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Mehr Vokabular wird bei Bedarf vorgestellt