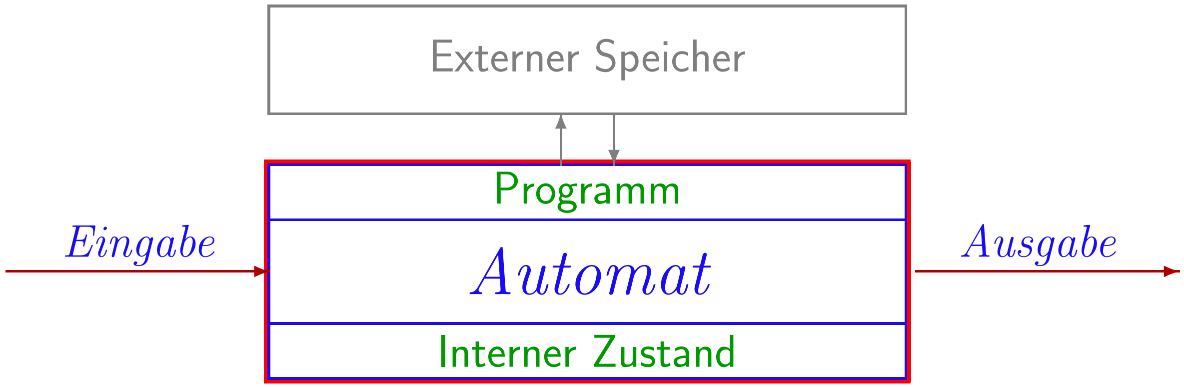
Theoretische Informatik I

Einheit 2

Endliche Automaten

1. Deterministische endliche Automaten
2. Nichtdeterministische endliche Automaten
3. Automaten mit ϵ-Übergängen

Automaten: das einfachste Maschinenmodell



Sichtweisen von Computern

- **Automaten stehen im Kern jeder Berechnung**
  - Schnelle, direkte Verarbeitung von Eingaben
  - Keine interne Speicherung von Daten
  - Speicher sind Teil der Umgebung
- **Endliche Automaten sind leicht zu analysieren**
  - Jede Berechnung endet nach einer festen Anzahl von Schritten
  - Keine Schleifen oder Seiteneffekte

Verwendungszwecke für endliche Automaten

Basismodell für Hardware und viele Arten von Software

- **Steuerungsautomaten**
  - Alle Formen rein Hardware-gesteuerter automatischer Maschinen

    Waschmaschinen, Autos, Unterhaltungselektronik, Ampelanlagen, Computerprozessoren
- **Entwurf und Überprüfung digitaler Schaltungen**
  - Entwicklungswerkzeuge und Testsoftware beschreiben endliches Verhalten
- **Lexikalische Analyse in Compilern**
  - Schnelle Identifizierung von Bezeichnern, Schlüsselwörtern, ...
- **Textsuche in umfangreichen Dokumenten**
  - Z.B. Suche nach Webeiten mithilfe von Schlüsselworten
- **Software mit endlichen Alternativen**
  - Kommunikationsprotokolle, Protokolle zum sicheren Datenaustausch ...

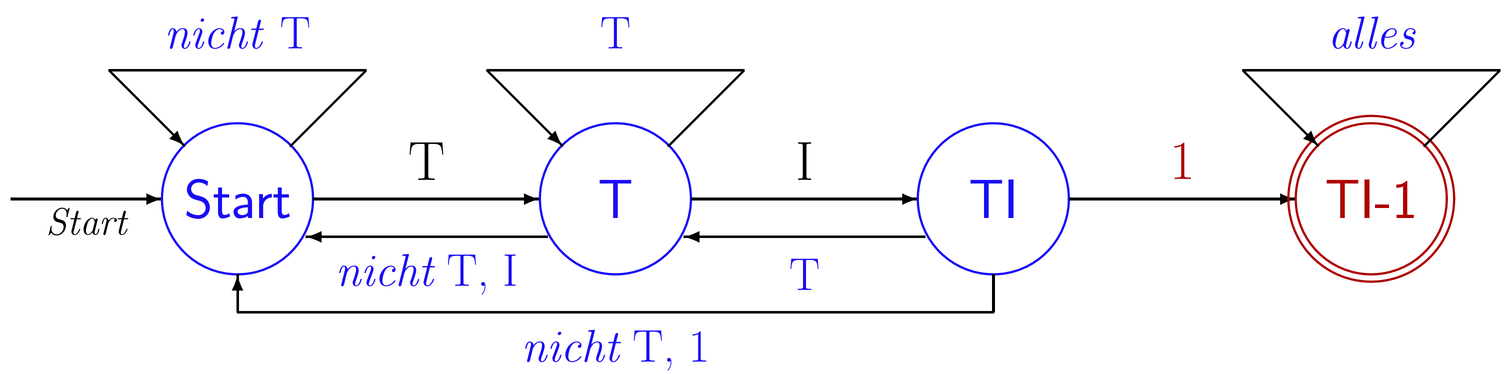
Theoretische Informatik I

Einheit 2.1

Deterministische Endliche Automaten

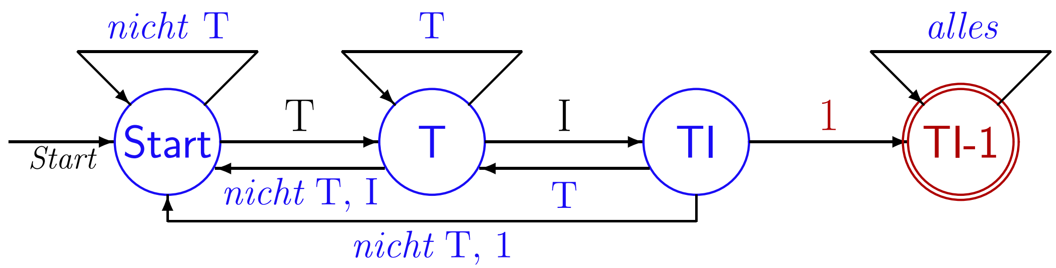
1. Arbeitsweise
2. Akzeptierte Sprache
3. Entwurf und Analyse

Erkennung von Worten mit Automaten



- **Endliche Anzahl von Zuständen**
- **Ein Startzustand**
- **Regeln für Zustandsübergänge**
- **Eingabealphabet**: $\{A, .., Z, a, .., z, \ \ , ?, !, ..\}$
- **Ein oder mehrere akzeptierende Endzustände**

ENDLICHE AUTOMATEN – MATHEMATISCH PRÄZISIERT

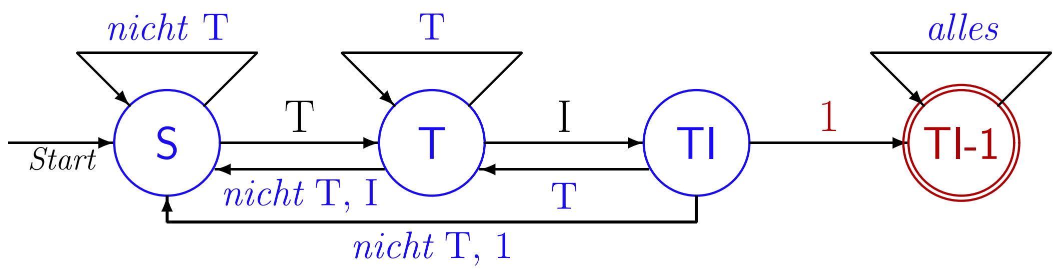


Ein **Deterministischer Endlicher Automat** (**DFA**)

ist ein 5-Tupel $\boldsymbol{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ **Eingabealphabet**
- $\delta{:}Q\times\Sigma \to Q$ **Zustandsüberführungsfunktion**
- $q_0{\in}Q$ **Startzustand** (Anfangszustand)
- $F{\subseteq}Q$ Menge von **akzeptierenden** (finalen) **Zuständen** (Endzustände)

Übergangsdiagramme



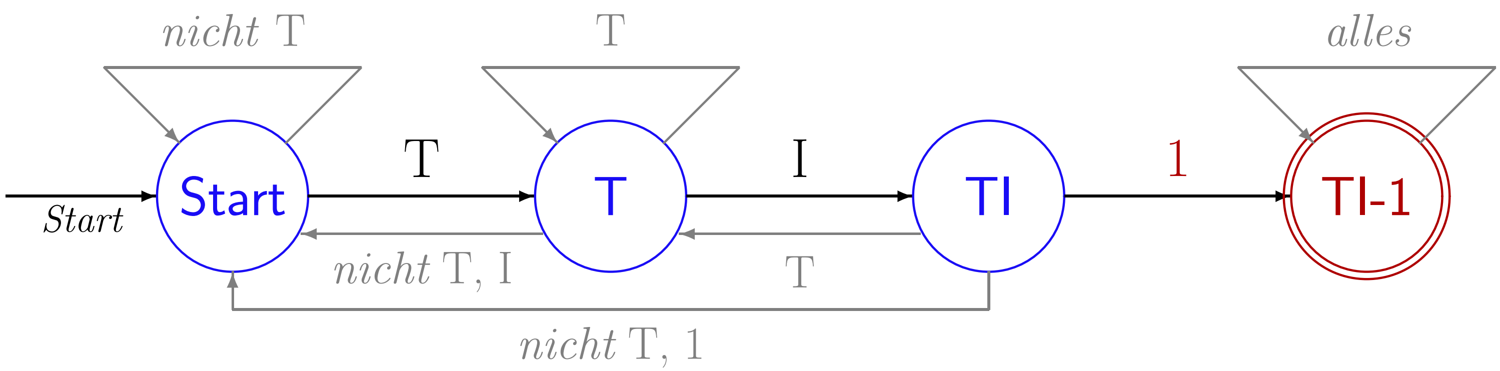
- Jeder Zustand in Q wird durch einen Knoten (Kreise) dargestellt
- Ist $\delta(q,a) = p$, so verläuft eine Kante von q nach p mit Beschriftung a (mehrere Beschriftungen derselben Kante möglich)
- q_0 wird durch einen mit *Start* beschrifteten Pfeil angezeigt
- Endzustände in F werden durch doppelte Kreise gekennzeichnet
- Σ meist implizit durch die Diagramm bestimmt

Übergangstabellen

- Tabellarische Darstellung der Funktion δ
- Kennzeichnung von q_0 durch einen Pfeil
- Kennzeichnung von F durch Sterne
- Σ und Q meist implizit durch die Tabelle bestimmt

		T	*I*	*1*	*sonst*
$\rightarrow$	S	T	S	S	S
	T	T	I	S	S
	I	T	I	1	S
*	1	1	1	1	1

Arbeitsweise von Endlichen Automaten



- **Anfangssituation**
  - Automat befindet sich im Startzustand q_0
- **Arbeitschritt**
  - Im Zustand q lese Eingabesymbol a,
  - Bestimme $\delta(s,a)=p$ und wechsele in neuen Zustand p
- **Terminierung**
  - Eingabewort $w = a_1..a_n$ ist komplett gelesen, Automat ist im Zustand q_n
- **Ergebnis**
  - Eingabewort w wird akzeptiert, wenn $q_n \in F$, sonst wird w abgewiesen

Arbeitsweise von DEAs – mathematisch präzisiert

- **Erweiterte Überführungsfunktion** $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ **:** $Q{\times}\Sigma^*{\to}Q$
  - Schrittweise Abarbeitung der Eingabe mit δ von links nach rechts
  - Formal: Induktive Definition

$$\hat{\delta}(q,w) = \begin{cases} q & \text{falls } w{=}\epsilon, \\ \delta(\hat{\delta}(q,v),a) & \text{falls } w{=}v\,a \;\; \text{für ein } a\in\Sigma \end{cases}$$

- **Von A akzeptierte Sprache**
  - Menge der Eingabeworte w für die $\hat{\delta}(q_0,w)$ akzeptierender Zustand ist

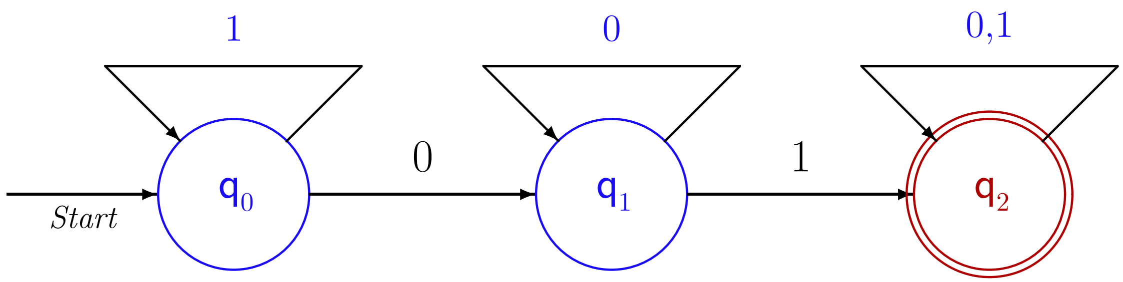
$$\boldsymbol{L(A)} = \{w\in\Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0,w)\in F\}$$

  - Auch: die von A erkannte Sprache

Entwurf und Analyse endlicher Automaten

Entwerfe DEA für $L = \{u01v \mid u, v \in \{0,1\}^* \}$

- **Entwurf eines Automaten mit Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$**
  - Zustand q_0: A hat noch keine 0 gelesen — 1^i bleibt in q_0
  - Zustand q_1: A hat eine 0 aber noch keine 1 gelesen — 1^i0^{j+1} bleibt in q_1
  - Zustand q_2: A hat eine Zeichenkette 01 gelesen — 1^i0^j01v bleibt in q_2



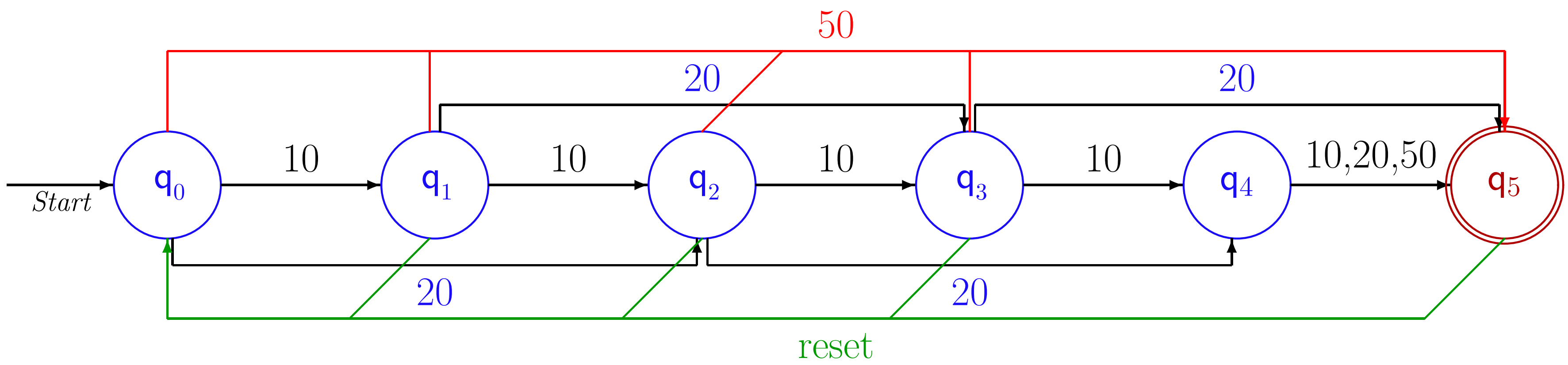
- **Analyse der erweiterten Überführungsfunktion**
  - Zeige durch Induktion für alle $i, j \in \mathbb{N}$ und alle $v \in \Sigma^*$

    $$\hat\delta(q_0, 1^i) = q_0 \qquad \hat\delta(q_0, 1^i0^{j+1}) = q_1 \qquad \hat\delta(q_0, 1^i0^j01v) = q_2$$

  - Es gilt: $w \in L$ g.d.w. es gibt $i, j \in \mathbb{N}, v \in \Sigma^*$ mit $w = 1^i0^j01v$ (Beweis?)
  - Es folgt $\boldsymbol{L = \{w \in \Sigma^* \mid \hat\delta(q_0, w) = q_2 \in F\} = L(A)}$

Beispiele endlicher Automaten

- **50c Kaffeeautomat**
  - Akzeptiert 10,20,50c Münzen, gibt kein Geld zurück, mit Reset-Taste



- $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ enthält gerade Anzahl von 0 und 1$\}$
  - 4 Zustände codieren Anzahl der Vorkommen von Nullen und Einsen

q_0=(gerade,gerade)

q_1=(gerade,ungerade)

q_2=(ungerade,gerade)

q_3=(ungerade,ungerade)