Theoretische Informatik I

Einheit 3.2

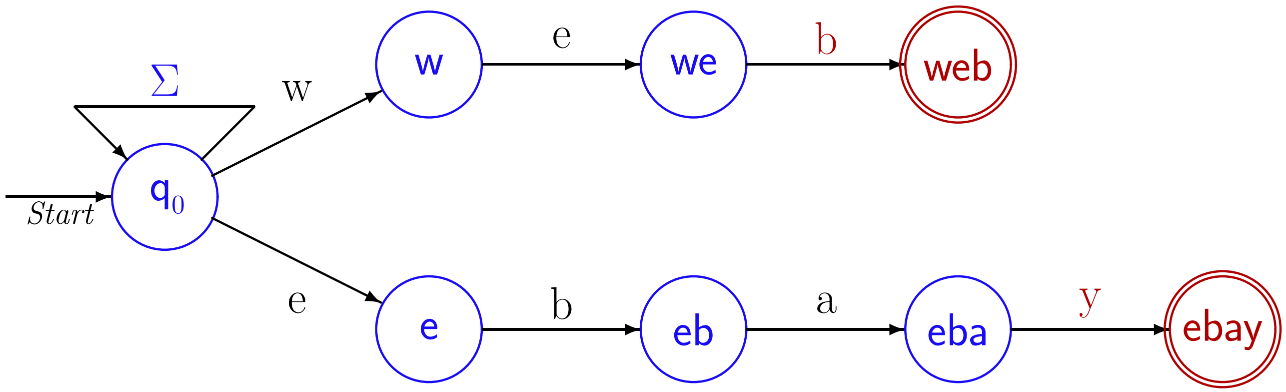
Nichtdeterministische Automaten

1. Arbeitsweise
2. Akzeptierte Sprache
3. Äquivalenz zu deterministischen Automaten

Warum Nichtdeterministische Endliche Automaten?

- **Elegante Form der Textsuche in Dokumenten**
  - Viele verschiedene Worte in großen Textsammlungen (Internet)
  - Leichte Beschreibung der Suchanfrage
  - Mühsame Beschreibung eines deterministischen Erkennungsverfahrens

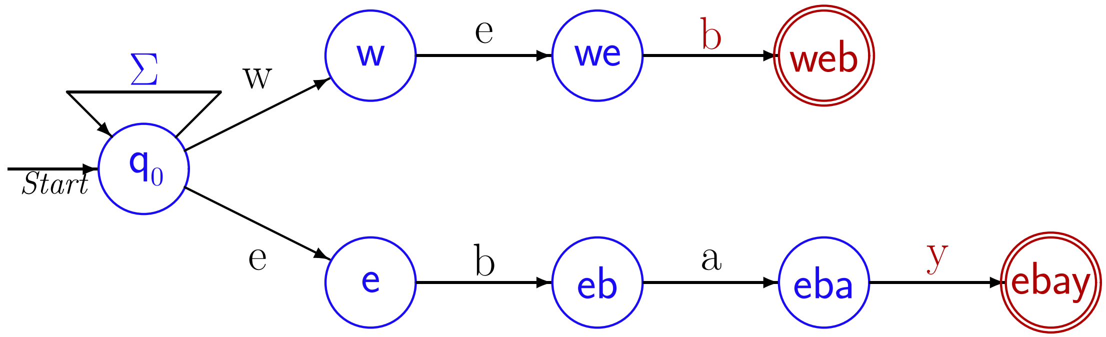
- **Idee: Simultane Verarbeitung von Alternativen**
  - z.B. Suche nach den Worten `web` und `ebay`



  - Ein `w` könnte der Anfang von `web` sein
  - Ein `e` könnte der Anfang von `ebay` sein
  - Aber vor den Worten könnte noch etwas anderes stehen

Nichtdeterministische Modelle verfolgen alle Möglichkeiten simultan

Nichtdeterministische Automaten – präzisiert



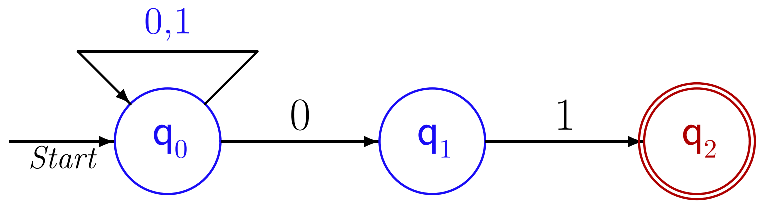
Ein **Nichtdeterministischer Endlicher Automat** (**NEA**)

ist ein 5-Tupel $\boldsymbol{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ **Eingabealphabet**
- $\delta{:}Q\times\Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ **Zustandsüberführungsfunktion**
  - $\delta(q', a)$ ist (möglicherweise leere) Menge von Zuständen
  - ($\mathcal{P}(Q) = \{S \mid S\subseteq Q\}$ Potenzmenge von Q)
- $q_0\in Q$ **Startzustand**
- $F\subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden** (finalen) **Zuständen**

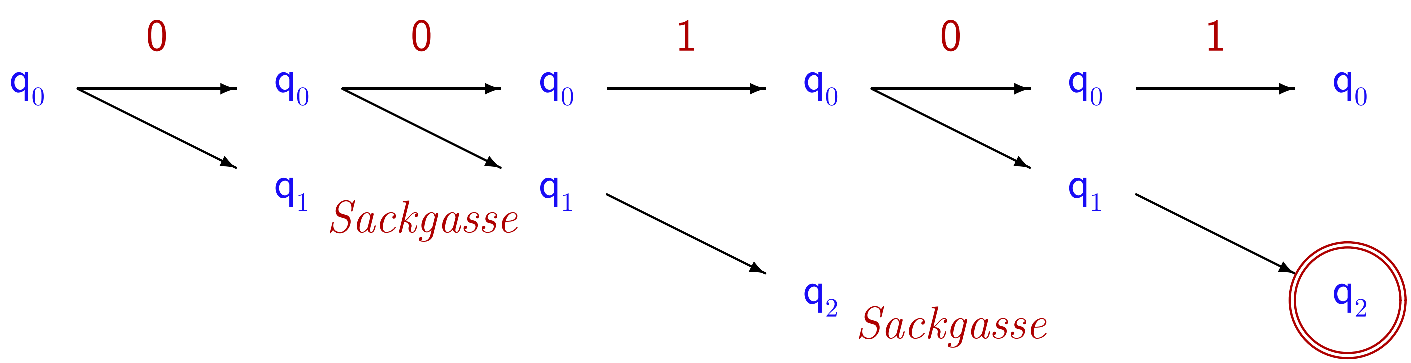
Arbeitsweise von NEAs

Erkenne Strings, die mit `01` enden



- Jedes Teilwort kann in q_0 bleiben
- Ein Teilwort muß mit `0` enden, um nach q_1 zu führen
- Ein Teilwort muß mit `01` enden, um nach q_2 zu führen
- In q_2 muß das Wort abgearbeitet sein

- Abarbeitung von `00101`



Ein Abarbeitungsweg führt zu einem akzeptierenden Zustand

Arbeitsweise von NEAs – mathematisch präzisiert

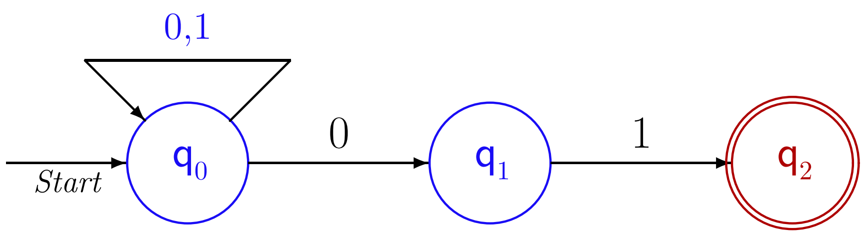
- **Erweiterte Überführungsfunktion $\hat{\boldsymbol{\delta}}$: $Q{\times}\Sigma^*{\to}Q$**
  – Schrittweise Abarbeitung der Eingabe mit δ von links nach rechts
  – Aufsammeln aller bei der Abarbeitung erreichbarer Zustände
  – Induktive Definition

$$\hat{\delta}(q,w) = \begin{cases} \{q\} & \text{falls } w{=}\epsilon, \\ \bigcup_{q'\in\hat{\delta}(q,v)} \delta(q',a) & \text{falls } w{=}v\,a \;\text{ für } v\in\Sigma^*,\, a\in\Sigma \end{cases}$$

- **Von A akzeptierte Sprache**
  – Menge der Eingaben w für die $\hat{\delta}(q_0,w)$ einen akzeptierender Zustand enthält

$$\boldsymbol{L(A)} = \{w\in\Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0,w){\cap}F{\neq}\emptyset\}$$

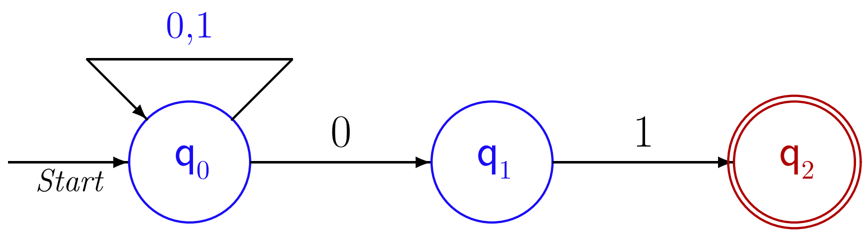
Erweiterte Überführungsfunktion am Beispiel



- **Abarbeitung von** `00101`
  - $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$

  $\boldsymbol{\hat{\delta}(q_0, 00101) \cap F = \{q_2\}}$

Nachweis der erkannten Sprache

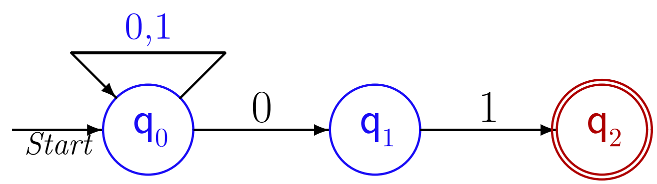


$$L(A) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ endet mit } 01\}$$

- **Zeige durch simultane Induktion für alle $w \in \{0,1\}^*$**
  a) $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$
  b) $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ **genau dann, wenn w mit 0 endet**
  c) $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ **genau dann, wenn w mit 01 endet**
  Es folgt $w \in L(A) \;\Leftrightarrow\; \hat{\delta}(q_0, w) \cap \{q_2\} \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; w$ endet mit 01

- **Induktionsanfang $w = \epsilon$**
  – Per Definition ist $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$. Also gilt Aussage a)
  – w endet weder mit 0 noch mit 01. Aussagen b) und c) gelten trivialerweise

Nachweis der erkannten Sprache II



- **Induktionsschritt:** $\boldsymbol{w = va}$ **für** $\boldsymbol{v \in \{0,1\}^*, a \in \{0,1\}}$
  - Die Aussagen a), b), und c) seien für v gültig

    a) Wegen $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ und $q_0 \in \delta(q_0, a)$ für $a \in \{0,1\}$ folgt $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

    b) Sei $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$. Wegen $q_1 \in \delta(q, a) \Leftrightarrow q{=}q_0 \wedge a{=}0$ muß w mit 0 enden

    Wenn umgekehrt w mit 0 endet, dann ist $a{=}0$.
    Wegen $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ und $q_1 \in \delta(q_0, a)$ folgt $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

    c) Sei $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$. Wegen $q_2 \in \delta(q, a) \Leftrightarrow q{=}q_1 \wedge a{=}1$ muß w mit 1 enden und $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ gelten. Wegen b) für v endet v mit 0, also w mit 01

    Wenn umgekehrt w mit 01 endet, dann ist $a{=}1$ und v endet mit 0.
    Wegen $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ nach b) und $q_2 \in \delta(q_1, a)$ folgt $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

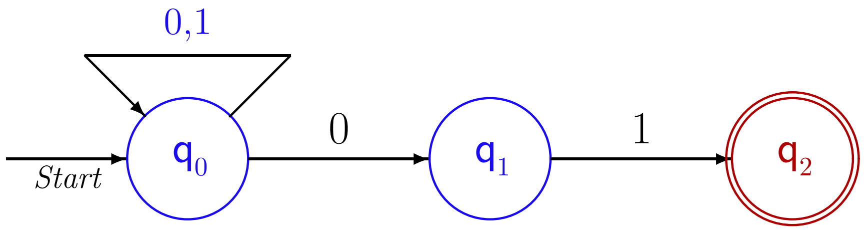
Beziehung zu deterministischen Automaten

- **Nichtdeterministische Automaten sind flexibler**
  – Man muß sich nicht auf eine genaue Verarbeitungsfolge festlegen

- **DEAs sind genauso ausdruckstark wie NEAs**
  – Man kann Mengen von NEA-Zuständen als DEA Zustände codieren
  – Man kann mengenwertige Zustandsüberführungsfunktionen codieren

- **(Potenzmengen- oder) Teilmengenkonstruktion**
  – Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein nichtdeterministischer Automat
  – Konstruiere äquivalenten DEA $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ mit
    · $Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$
    · $F_D = \{S \in Q_D \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$
    · $\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta_N(q, a)$
  – Dann gilt $\boldsymbol{L(A_D) = L(A_N)}$
  – Konstruktion benötigt $\mathbf{2^{|Q_N|}}$ **Zustände** (Optimierung möglich)

Teilmengenkonstruktion am Beispiel



Konstruierter deterministischer Automat

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_2\}$
$* \{q_0,q_2\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
$* \{q_1,q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_2\}$

Viele überflüssige Zustände (nur 3 von $\{q_0\}$ erreichbar)

Optimierte Teilmengenkonstruktion

HMU §Satz 2.11 / 2.12

- **Iterative Konstruktion ohne überflüssige Zustände**
  - Start: $Q_0 := \{\{q_0\}\}$
  - Schritt: $Q_{i+1} := Q_i \cup \{\delta_D(S,a) \mid S \in Q_i, a \in \Sigma\}$
  - Abschluß: Wenn $Q_{i+1} = Q_i$, dann halte an und setze $Q_D := Q_i$

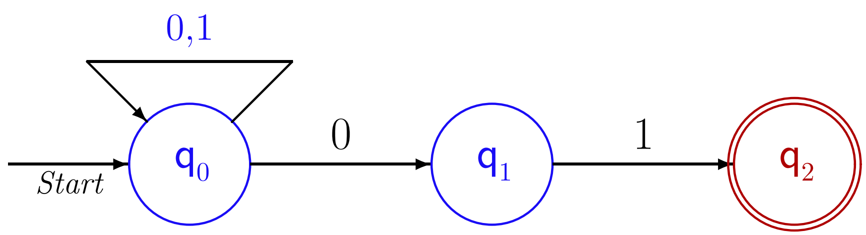
- **Korrektheit: $L(A_D) = L(A_N)$**
  - Zeige durch Induktion: $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$ für alle $w \in \Sigma^*$
  - $w = \epsilon$: $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, \epsilon) = \{q_0\} = \hat{\delta}_N(q_0, w)$
  - $w = va$: Es gelte $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, v) = \hat{\delta}_N(q_0, v) = \{p_1, .., p_k\}$

    Dann gilt $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w)$

$$
\begin{aligned}
&= \delta_D(\hat{\delta}_D(\{q_0\}, v), a) && \text{(Definition } \hat{\delta}_D\text{)}\\
&= \delta_D(\hat{\delta}_N(q_0, v), a) && \text{(Induktionsannahme)}\\
&= \bigcup_{q' \in \hat{\delta}_N(q_0,v)} \delta_N(q', a) && \text{(Konstruktion von } \delta_D\text{)}\\
&= \hat{\delta}_N(q_0, w) && \text{(Definition } \hat{\delta}_N\text{)}
\end{aligned}
$$

- **NEAs und DEAs akzeptieren dieselben Sprachen**
  - Jeder DEA ist als “eindeutiger” NEA beschreibbar

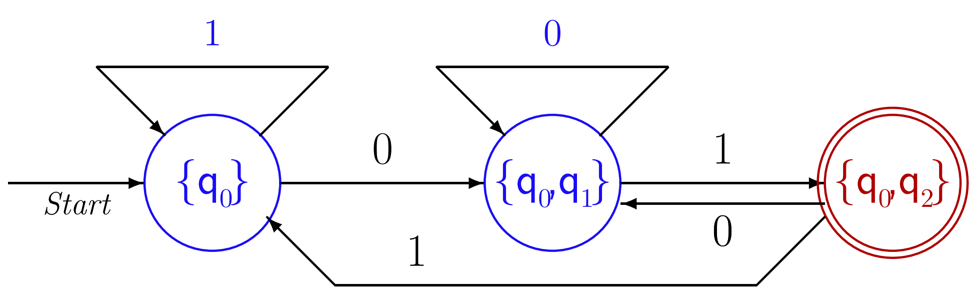
Optimierte Teilmengenkonstruktion am Beispiel



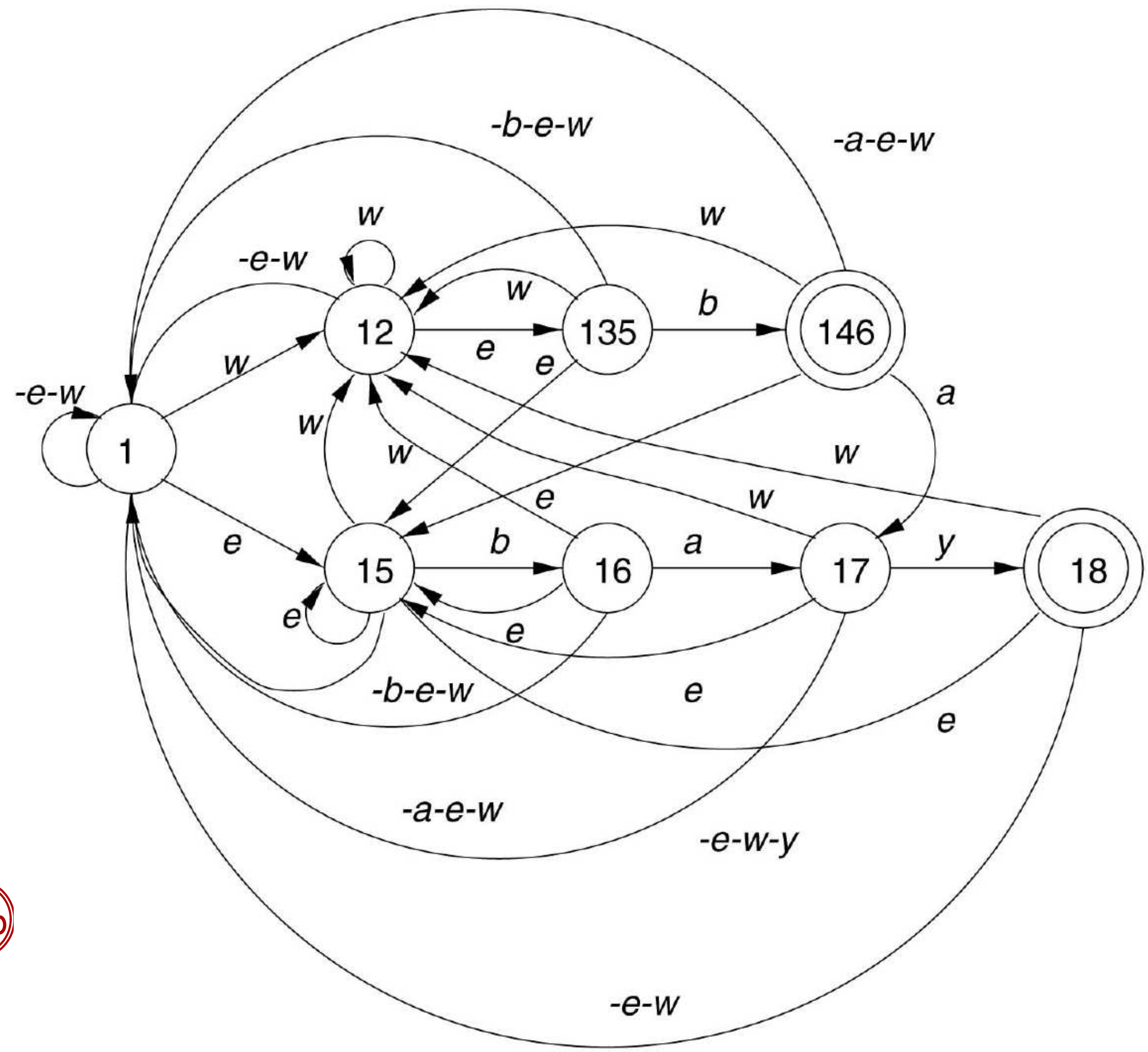
- **Konstruktion der Zustandsmengen**
  - $Q_0 := \{\{q_0\}\}$
  - $Q_1 := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}\}$
  - $Q_2 := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}\}$
  - $Q_3 = Q_2$

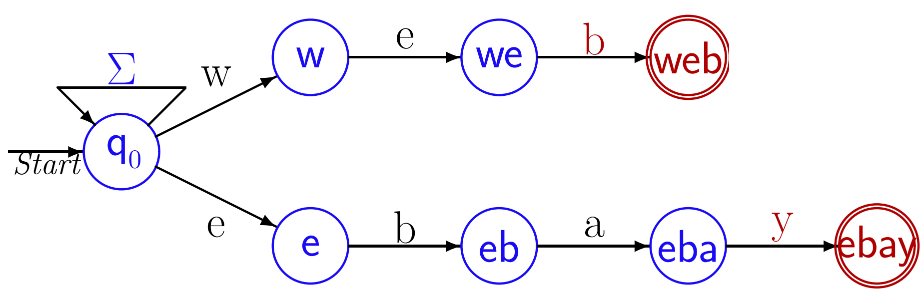
	0	1
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$* \{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

- **Reduzierte Überführungsfunktion**
- **Resultierender deterministischer Automat**



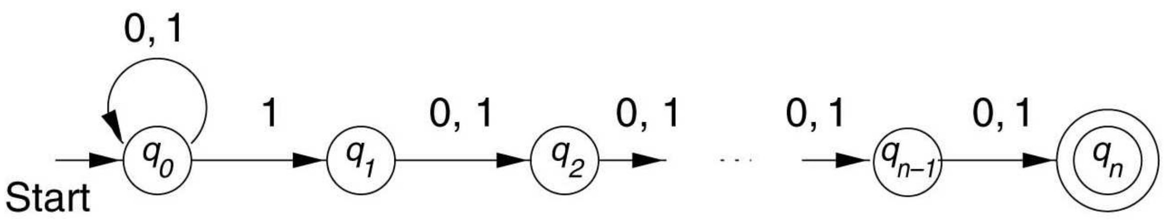
Deterministische Automaten für Textanalyse





Analyse der optimierten Teilmengenkonstruktion

- **A_D kann so klein sein wie A_N**
  – Nur wenige Teilmengen von Q_N werden wirklich erreicht
- **A_D kann exponentiell größer werden**



– $L(A_N) = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{das } n\text{-te Zeichen vor dem Ende ist eine } 1\}$

– **Jeder DEA A für $L(A_N)$ benötigt mindestens 2^n Zustände**

– **Beweis:** Es gibt 2^n Worte der Länge n in $\{0,1\}^*$

Hat A weniger als 2^n Zustände, so gibt es $w = a_1..a_n$ und $v = b_1..b_n$ mit $w{\neq}v$ und $\hat{\delta}_A(q_0,w) = \hat{\delta}_A(q_0,v)$ **(Schubfachprinzip)**

Sei $a_i{\neq}b_i$. Für $q = \delta_A(q_0, w0^{i-1}) = \delta_A(q_0, v0^{i-1})$ folgt $q \in F$ und $q \notin F$