

Theoretische Informatik I



Einheit 2.3

Automaten mit ϵ -Übergängen

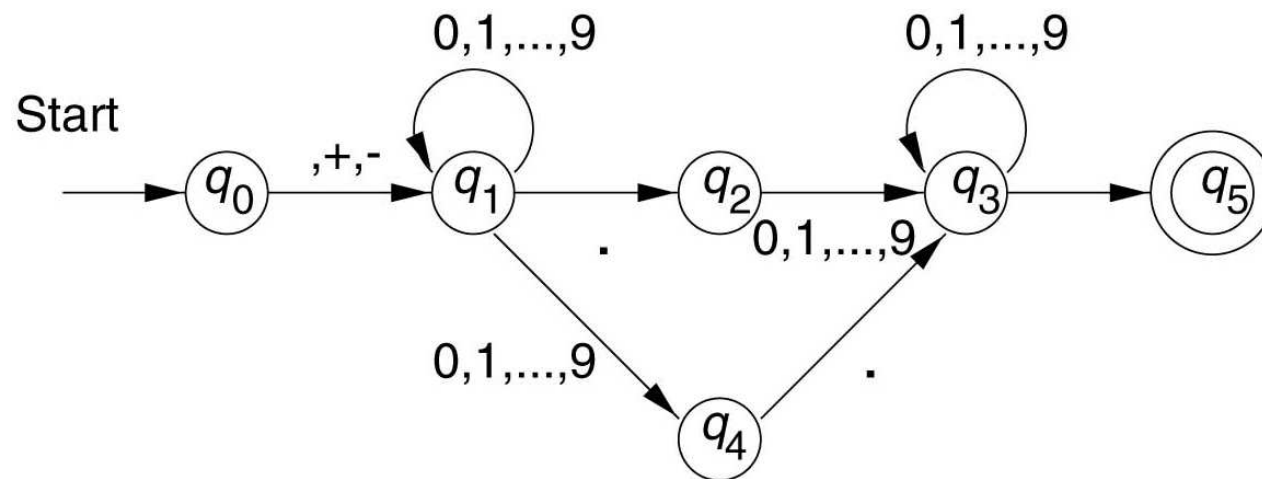


1. Arbeitsweise
2. Akzeptierte Sprache
3. Äquivalenz zu NEAs

WARUM ϵ -ÜBERGÄNGE?

● Erkennung von Dezimalzahlen

- Zwei Zeichenreihen von Ziffern getrennt durch Dezimalpunkt
- Eine der beiden Zeichenreihen darf leer sein, aber nicht beide
- Optionales Vorzeichen $+$ oder $-$

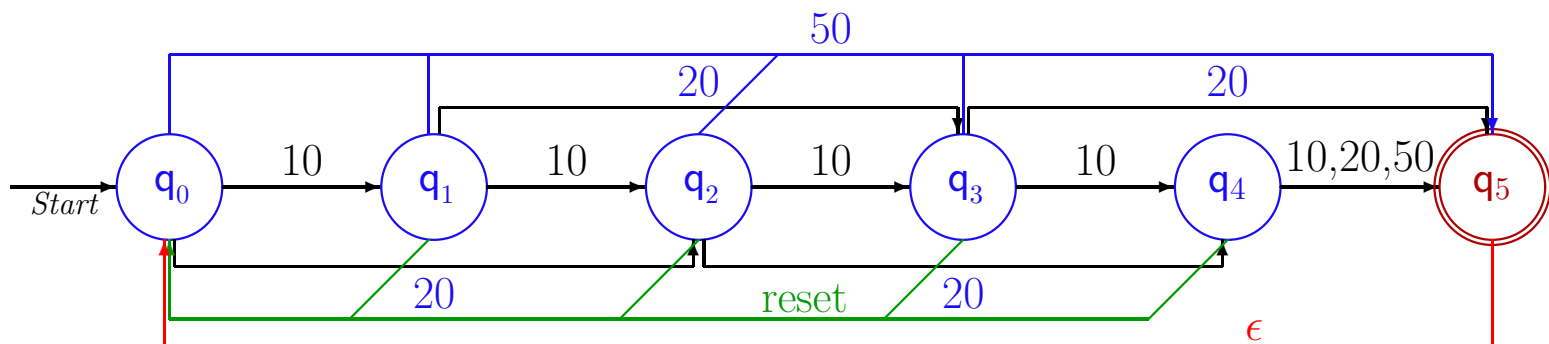


ϵ -Übergänge für Verarbeitung optionaler Symbole

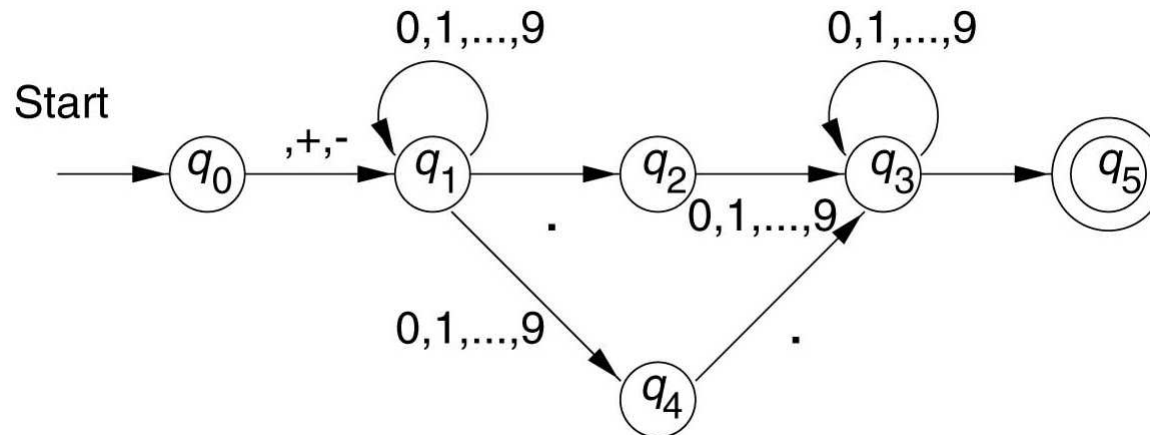
ϵ -ÜBERGÄNGE FÜR AUTOMATISCHE ZUSTANDSÄNDERUNGEN

● 50c Kaffeeautomat

- Akzeptiert 10c, 20c, 50c Münzen
- Gibt kein Geld zurück
- Mit Reset-Taste
- Automatische Rücksetzung möglich



ϵ -NEAs, PRÄZISIERT

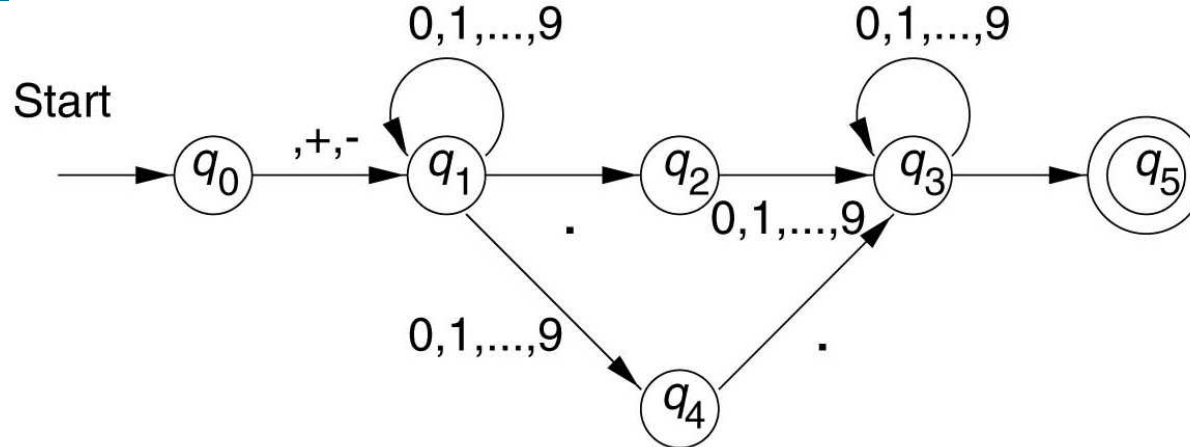


Ein **ϵ -NEA** (nichtdeterministischer endlicher Automat mit ϵ -Übergängen) ist ein 5-Tupel **$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$** mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ **Eingabealphabet** mit $\epsilon \notin \Sigma$
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ **Zustandsüberföhrungsfunktion**
- $q_0 \in Q$ **Startzustand**
- $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden** (finalen) **Zuständen**

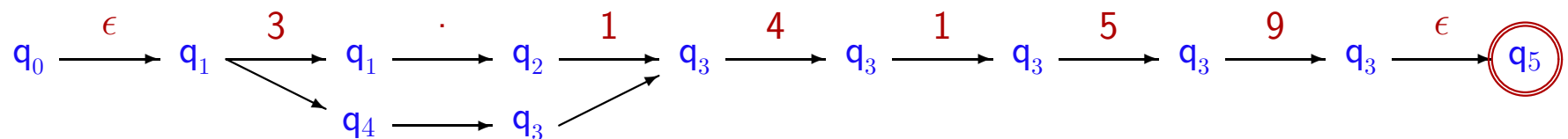
Alle formalen Details sehr ähnlich zu NEAs

ARBEITSWEISE VON ϵ -NEAS



- Die Teilworte $+$, $-$, und ϵ führen nach q_1
- Teilworte der Form $v\{0..9\}^+$ führen nach q_1 oder q_4 , wobei $v \in \{+, -, \epsilon\}$
- Teilworte der Form $v\{0..9\}^+.$ führen nach q_2 oder q_3
- Teilworte der Form $v\{0..9\}^*.\{0..9\}^+$ führen nach q_3
- Worte die nach q_3 führen, führen auch zum Endzustand q_5

• Abarbeitung von 3.14159



Ein Abarbeitungsweg führt zu einem akzeptierenden Zustand

Ergänze NEA-Überföhrungsfunktion um ϵ -Übergänge

- **ϵ -Hölle** eines Zustands q

- Die von q mit ϵ -Übergängen (ohne Eingaben) erreichbaren Zustände
- Iterative Definition: Kleinste Menge mit der Eigenschaft
$$q \in \epsilon\text{-Hölle}(q) \text{ und } p \in \epsilon\text{-Hölle}(q) \wedge r \in \delta(p, \epsilon) \Rightarrow r \in \epsilon\text{-Hölle}(q)$$

- **Erweiterte Überföhrungsfunktion** $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$

- Aufsammeln **aller** bei der Abarbeitung erreichbarer Zustände einschließlich derjenigen, die ohne Eingabe erreicht werden
- Induktive Definition (kaskadisches Aufsammeln von Zuständen)

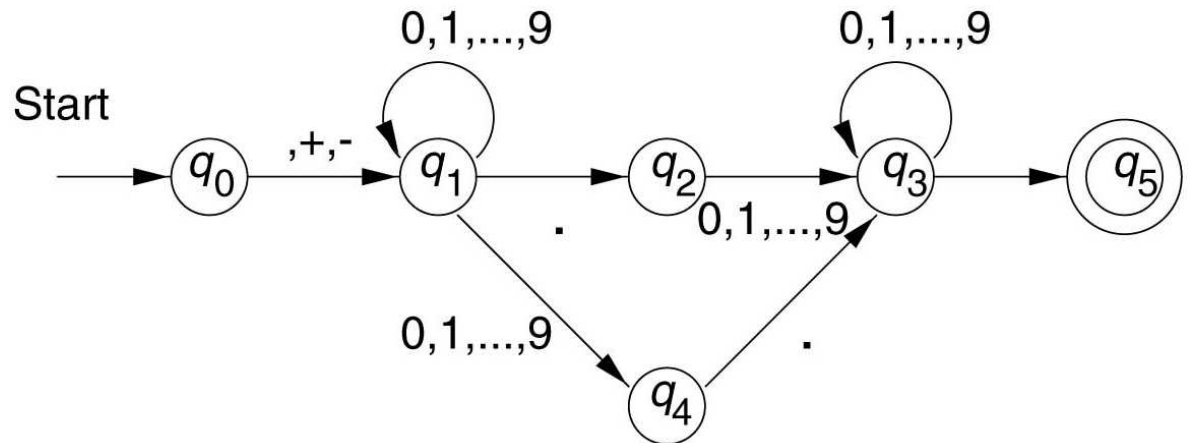
$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} \epsilon\text{-Hölle}(q) & \text{falls } w = \epsilon, \\ \bigcup_{q' \in \hat{\delta}(q, v)} \bigcup_{q'' \in \delta(q', a)} \epsilon\text{-Hölle}(q'') & \text{falls } w = v a \text{ (} a \in \Sigma \text{)} \end{cases}$$

- **Akzeptierte Sprache:** $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$

ϵ -HÜLLE AM BEISPIEL

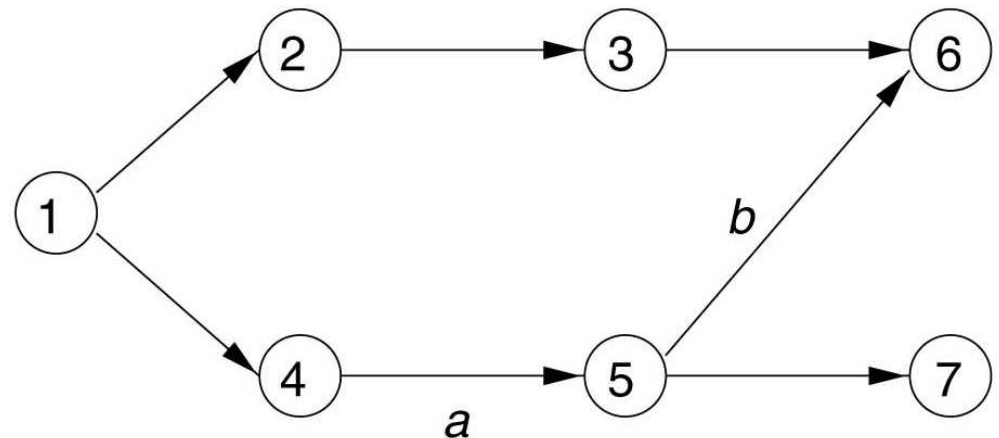
● Dezimalautomat

- Nur 2 ϵ -Übergänge
- $\epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \{q_0, q_1\}$
- $\epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_5\}$
- $\epsilon\text{-Hülle}(q_i) = \{q_i\}$ sonst

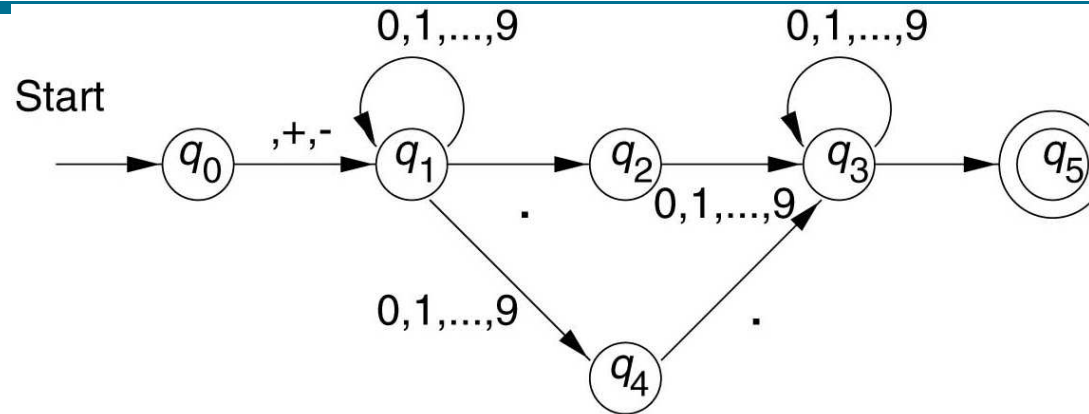


● Viele ϵ -Übergänge

- $\epsilon\text{-Hülle}(1) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $\epsilon\text{-Hülle}(2) = \{2, 3, 6\}$
- $\epsilon\text{-Hülle}(3) = \{3, 6\}$
- $\epsilon\text{-Hülle}(4) = \{4\}$
- $\epsilon\text{-Hülle}(5) = \{5, 7\}$
- $\epsilon\text{-Hülle}(6) = \{6\}$
- $\epsilon\text{-Hülle}(7) = \{7\}$



ERWEITERTE ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION AM BEISPIEL



● Abarbeitung von 3.14159

- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3)$: $\delta(q_0, 3) \cup \delta(q_1, 3) = \emptyset \cup \{q_1, q_4\} = \{q_1, q_4\}$
 $\hat{\delta}(q_0, 3) = \epsilon\text{-Hülle}(q_1) \cup \epsilon\text{-Hülle}(q_4) = \{q_1\} \cup \{q_4\} = \{q_1, q_4\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.)$: $\delta(q_1, .) \cup \delta(q_4, .) = \{q_2\} \cup \{q_3\} = \{q_2, q_3\}$
 $\hat{\delta}(q_0, 3.) = \epsilon\text{-Hülle}(q_2) \cup \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_2\} \cup \{q_3, q_5\} = \{q_2, q_3, q_5\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.1)$: $\delta(q_2, 1) \cup \delta(q_3, 1) \cup \delta(q_5, 1) = \{q_3\} \cup \{q_3\} \cup \emptyset = \{q_3\}$
 $\hat{\delta}(q_0, 3.1) = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_5\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.14) = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_5\}$
- ⋮
- $\hat{\delta}(q_0, 3.14159) = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_5\}$

Noch flexibler aber nicht ausdrucksstärker

- **Gut für Charakterisierung optionaler Teiltex**

- Man kann im Zweifel einfach weiterspringen

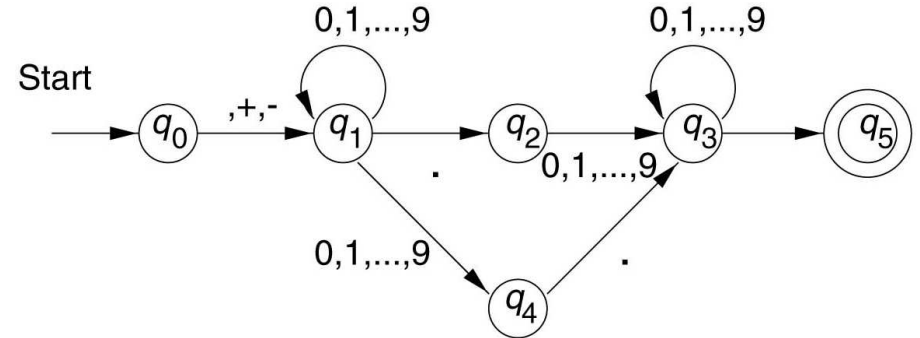
- **Sehr ähnliche Teilmengenkonstruktion**

- Sei $A_E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ ein ϵ -NEA
- Konstruiere äquivalenten DEA $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ mit
 - $Q_D = \mathcal{P}(Q_E)$
 - $q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0)$ (statt $\{q_0\}$)
 - $F_D = \{S \in Q_D \mid S \cap F_E \neq \emptyset\}$
 - $\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \hat{\delta}_E(q, a)$ (schließt ϵ -Hülle mit ein)

- **Optimierung: $Q_D \hat{=}$ erreichbare Zustände**

- Iterative Konstruktion gleichzeitig mit δ_D
- Start: $Q_0 := \{q_D\}$
- Schritt: $Q_{i+1} := Q_i \cup \{\delta_D(S, a) \mid S \in Q_i, a \in \Sigma\}$ (konstruiere dabei die $\delta_D(S, a)$)
- Abschluß: Wenn $Q_{i+1} = Q_i$, dann halte an und setze $Q_D := Q_i$

TEILMENGENKONSTRUKTION AM BEISPIEL



● Konstruiere Q_D und δ_D

$$Q_0 = \{q_D\} = \{\epsilon\text{-Hülle}(q_0)\} = \{\{q_0, q_1\}\}$$

- $\delta_D(\{q_0, q_1\}, +) = \{q_1\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, -) = \{q_1\}$
- $\delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_1, q_4\}, \dots \delta_D(\{q_0, q_1\}, 9) = \{q_1, q_4\}$
- $\delta_D(\{q_0, q_1\}, \cdot) = \{q_2\}$

$$Q_1 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\} \}$$

- $\delta_D(\{q_1\}, +) = \delta_D(\{q_2\}, +) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, +) = \emptyset, \dots$
- $\delta_D(\{q_1\}, 0) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, 0) = \{q_1, q_4\} \quad \delta_D(\{q_2\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \dots$
- $\delta_D(\{q_1\}, \cdot) = \{q_2\}, \quad \delta_D(\{q_2\}, \cdot) = \emptyset \quad \delta_D(\{q_1, q_4\}, \cdot) = \{q_2, q_3, q_5\}$

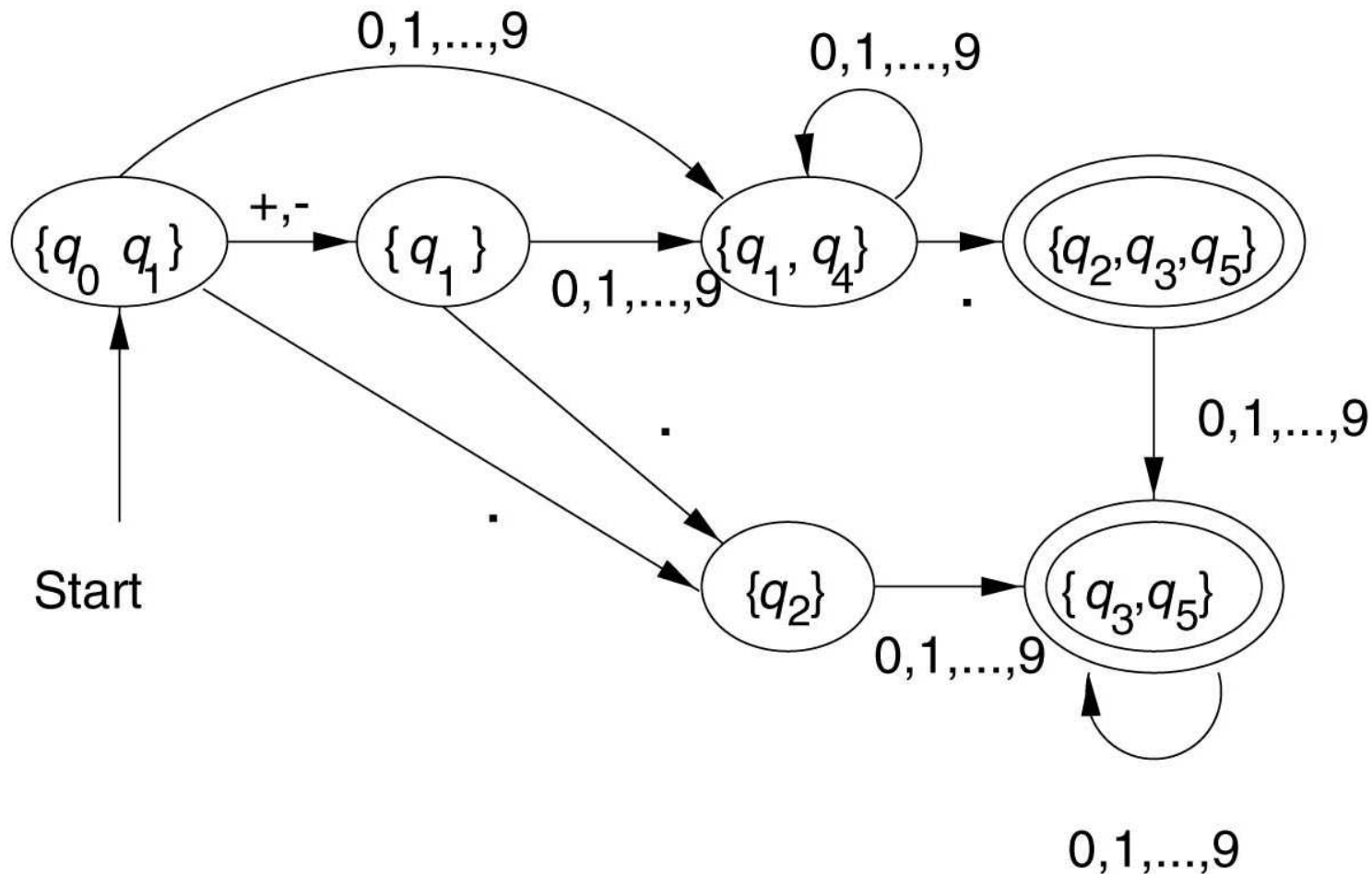
$$Q_2 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}, \emptyset, \{q_3, q_5\}, \{q_2, q_3, q_5\} \}$$

- $\delta_D(\emptyset, +) = \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, +) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, +) = \emptyset, \dots$
- $\delta_D(\emptyset, 0) = \emptyset, \quad \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, 0) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \dots$
- $\delta_D(\emptyset, \cdot) = \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, \cdot) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, \cdot) = \emptyset$

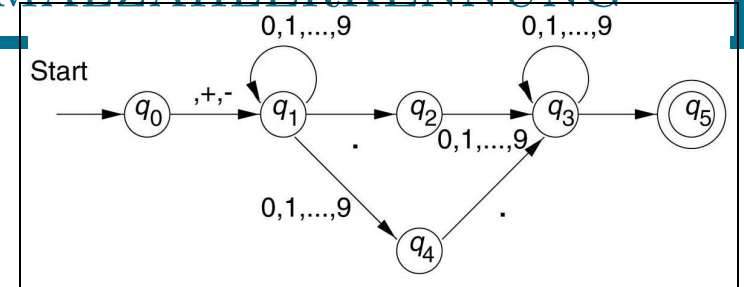
$$Q_3 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}, \emptyset, \{q_3, q_5\}, \{q_2, q_3, q_5\} \} = Q_2 =: Q_D$$

ERZEUGUNG EINES DEA FÜR DEZIMALZÄHLERKENNUNG

Generierter DEA



Übergänge zum Zustand \emptyset nicht gezeigt



OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION: KORREKTHEIT

- Für den konstruierten DEA gilt $L(A_D) = L(A_E)$

Zeige: $\hat{\delta}_D(q_D, w) = \hat{\delta}_E(q_0, w)$ für alle $w \in \Sigma^*$

Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau der Worte aus Σ^*

- Basisfall: Sei $w = \epsilon$:

$$\hat{\delta}_D(q_D, \epsilon) = q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \hat{\delta}_E(q_0, \epsilon)$$

- Induktionsschritt: Sei $w = va$ für ein $v \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$:

- Induktionsannahme: Es gelte $\hat{\delta}_D(q_D, v) = \hat{\delta}_E(q_0, v)$

Dann gilt $\hat{\delta}_D(q_D, w)$

$$= \delta_D(\hat{\delta}_D(q_D, v), a) \quad (\text{Definition } \hat{\delta}_D)$$

$$= \delta_D(\hat{\delta}_E(q_0, v), a) \quad (\text{Induktionsannahme})$$

$$= \bigcup_{q' \in \hat{\delta}_E(q_0, v)} \hat{\delta}_E(q', a) \quad (\text{Konstruktion von } \delta_D)$$

$$= \bigcup_{q' \in \hat{\delta}_E(q_0, v)} \bigcup_{q'' \in \delta_E(q', a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') \quad (\text{Definition } \hat{\delta}_E)$$

$$= \hat{\delta}_E(q_0, w) \quad (\text{Definition } \hat{\delta}_E)$$

- ϵ -NEAs und DEAs akzeptieren dieselben Sprachen

● Deterministische Endliche Automaten (**DEA**)

- Endliche Menge von **Zuständen**, endliche Menge von **Eingabesymbolen**
- **Ein fester Startzustand**, null oder mehr **akzeptierende Zustände**
- **Überföhrungsfunktion** bestimmt Änderung des Zustands bei Abarbeitung der Eingabe
- **Erkannte Sprache**: Eingaben, deren Abarbeitung in einem akzeptierenden Zustand endet

● Nichtdeterministische Endliche Automaten (**NEA**)

- Wie DEA, aber mit **mengenwertiger Überföhrungsfunktion**
- Durch **Teilmengenkonstruktion** in äquivalenten DEA transformierbar

● NEAs mit ϵ -Übergängen (**ϵ -NEA**)

- Wie NEA, aber mit **Zustandsüberföhrung bei leerer Eingabe**
- Durch **Teilmengenkonstruktion** in äquivalenten DEA transformierbar