

Theoretische Informatik I



Einheit 2.3

Automaten mit ϵ -Übergängen

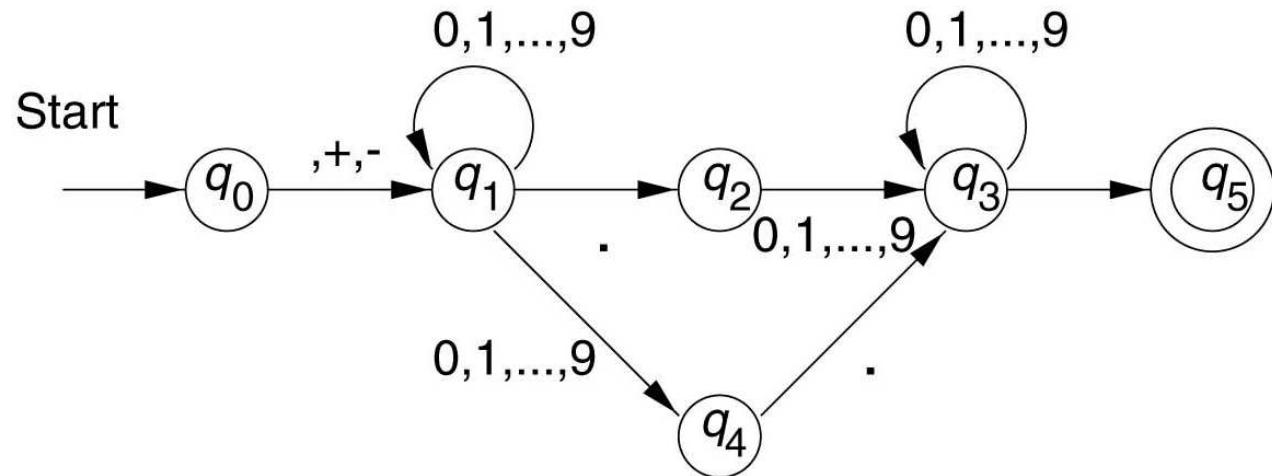


1. Arbeitsweise
2. Akzeptierte Sprache
3. Äquivalenz zu NEAs

WARUM ϵ -ÜBERGÄNGE?

● Erkennung von Dezimalzahlen

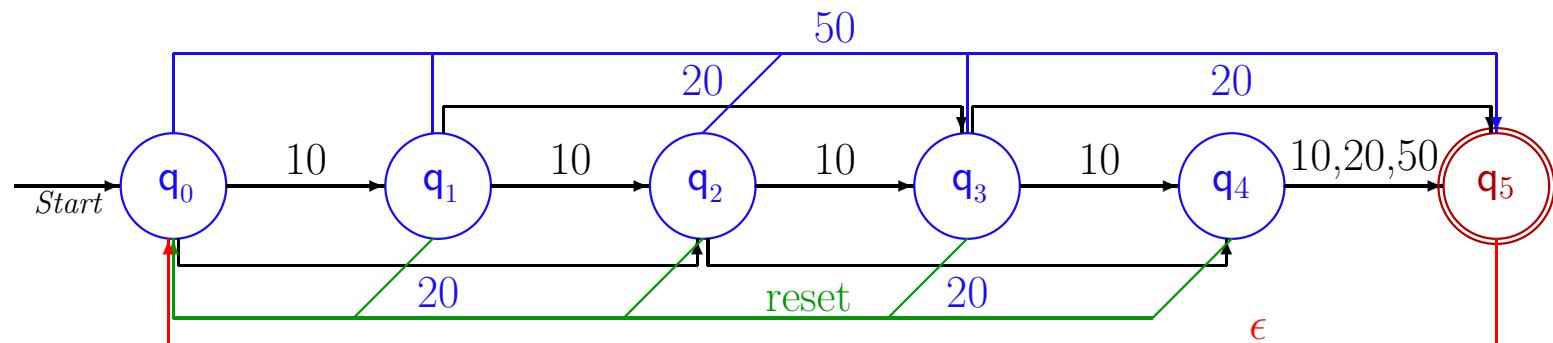
- Zwei Zeichenreihen von Ziffern getrennt durch Dezimalpunkt
- Eine der beiden Zeichenreihen darf leer sein, aber nicht beide
- Optionales Vorzeichen + oder -



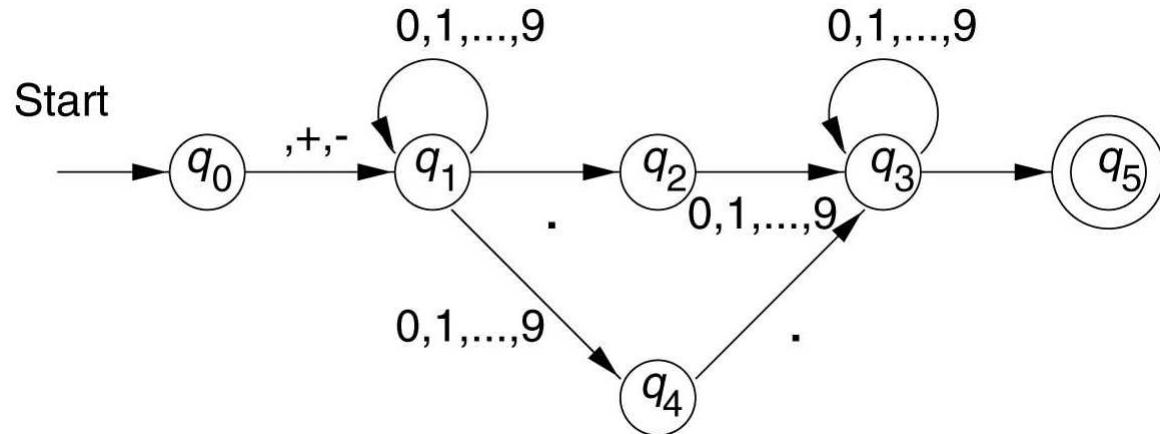
ϵ -Übergänge für Verarbeitung optionaler Symbole

● 50c Kaffeeautomat

- Akzeptiert 10c, 20c, 50c Münzen
- Gibt kein Geld zurück
- Mit Reset-Taste
- Automatische Rücksetzung möglich



ϵ -NEAs, PRÄZISIERT

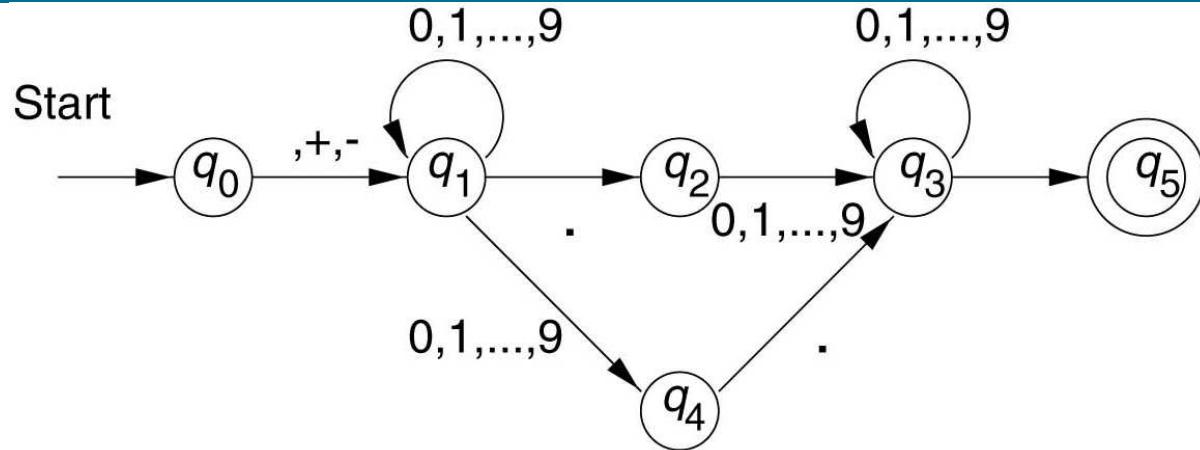


Ein **ϵ -NEA** (nichtdeterministischer endlicher Automat mit ϵ -Übergängen) ist ein 5-Tupel $\mathbf{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

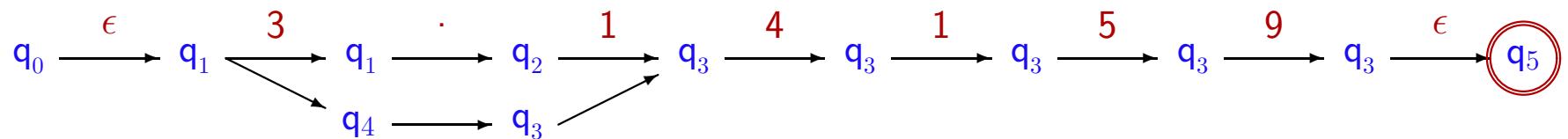
- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ **Eingabealphabet** mit $\epsilon \notin \Sigma$
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ **Zustandsübergfungsfunction**
- $q_0 \in Q$ **Startzustand**
- $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden** (finalen) **Zuständen**

Alle formalen Details sehr ähnlich zu NEAs

ARBEITSWEISE VON ϵ -NEAs



- Die Teilworte $+$, $-$, und ϵ führen nach q_1
- Teilworte der Form $v\{0..9\}^+$ führen nach q_1 oder q_4 , wobei $v \in \{+, -, \epsilon\}$
- Teilworte der Form $v\{0..9\}^+.$ führen nach q_2 oder q_3
- Teilworte der Form $v\{0..9\}^*.\{0..9\}^+$ führen nach q_3
- Worte die nach q_3 führen, führen auch zum Endzustand q_5
- Abarbeitung von 3.14159



Ein Abarbeitungsweg führt zu einem akzeptierenden Zustand

Ergänze NEA-Überführungsfunktion um ϵ -Übergänge

- **ϵ -Hülle eines Zustands q**

- Die von q mit ϵ -Übergängen (ohne Eingaben) erreichbaren Zustände
- Iterative Definition: Kleinste Menge mit der Eigenschaft

$$q \in \epsilon\text{-Hülle}(q) \text{ und } p \in \epsilon\text{-Hülle}(q) \wedge r \in \delta(p, \epsilon) \Rightarrow r \in \epsilon\text{-Hülle}(q)$$

- **Erweiterte Überführungsfunktion $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$**

- Aufsammeln aller bei der Abarbeitung erreichbarer Zustände einschließlich derjenigen, die ohne Eingabe erreicht werden
- Induktive Definition (kaskadisches Aufsammeln von Zuständen)

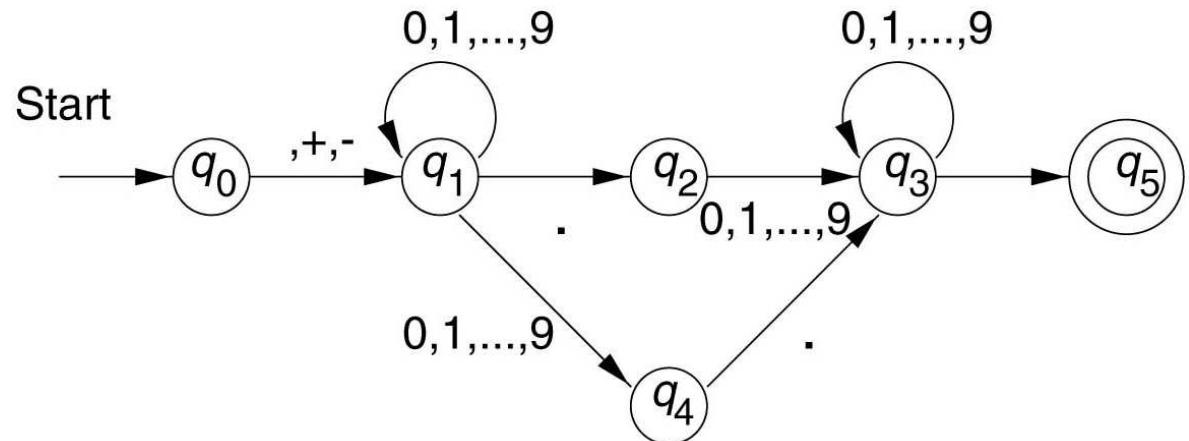
$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} \epsilon\text{-Hülle}(q) & \text{falls } w = \epsilon, \\ \bigcup_{q' \in \hat{\delta}(q, v)} \bigcup_{q'' \in \delta(q', a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') & \text{falls } w = v a \ (a \in \Sigma) \end{cases}$$

- **Akzeptierte Sprache: $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$**

ϵ -HÜLLE AM BEISPIEL

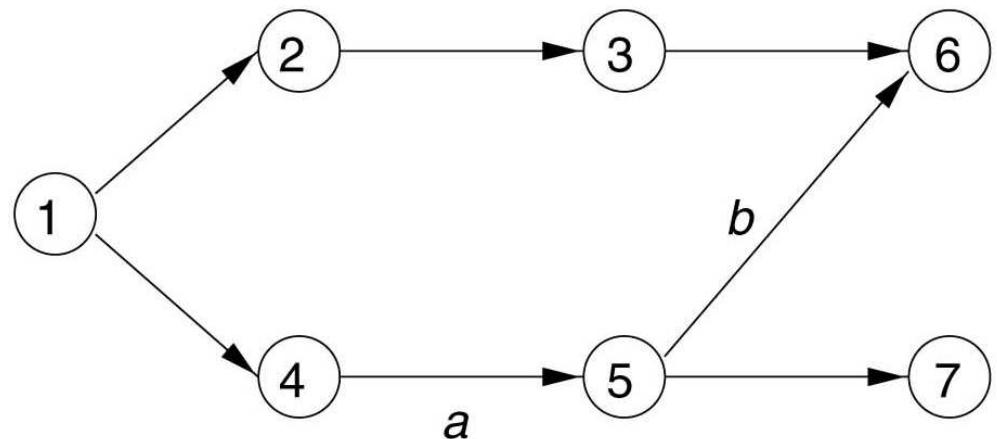
• Dezimalautomat

- Nur 2 ϵ -Übergänge
- ϵ -Hülle(q_0) = $\{q_0, q_1\}$
- ϵ -Hülle(q_3) = $\{q_3, q_5\}$
- ϵ -Hülle(q_i) = $\{q_i\}$ sonst

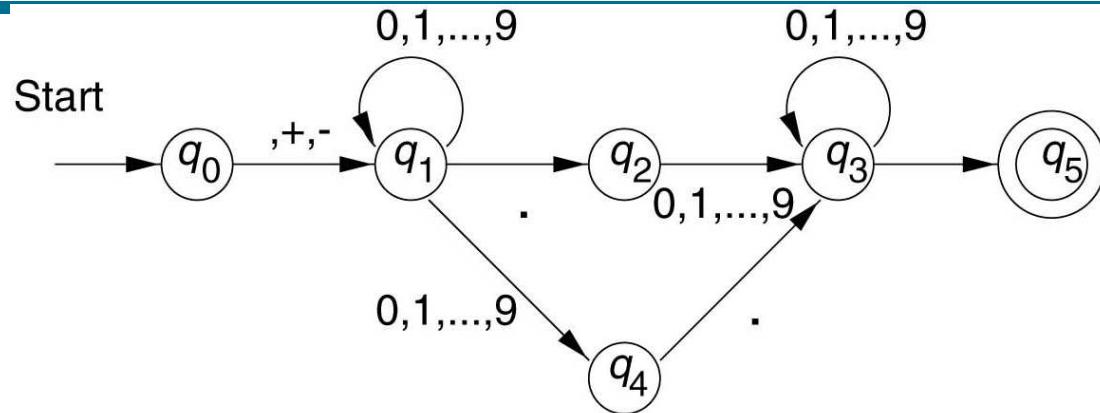


• Viele ϵ -Übergänge

- ϵ -Hülle(1) = $\{1, 2, 3, 4, 6\}$
- ϵ -Hülle(2) = $\{2, 3, 6\}$
- ϵ -Hülle(3) = $\{3, 6\}$
- ϵ -Hülle(4) = $\{4\}$
- ϵ -Hülle(5) = $\{5, 7\}$
- ϵ -Hülle(6) = $\{6\}$
- ϵ -Hülle(7) = $\{7\}$



ERWEITERTE ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION AM BEISPIEL



• Abarbeitung von 3.14159

- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \epsilon\text{-H\"ulle}(q_0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3) = \delta(q_0, 3) \cup \delta(q_1, 3) = \emptyset \cup \{q_1, q_4\} = \{q_1, q_4\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.) = \epsilon\text{-H\"ulle}(q_1) \cup \epsilon\text{-H\"ulle}(q_4) = \{q_1\} \cup \{q_4\} = \{q_1, q_4\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.) = \delta(q_1, .) \cup \delta(q_4, .) = \{q_2\} \cup \{q_3\} = \{q_2, q_3\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.) = \epsilon\text{-H\"ulle}(q_2) \cup \epsilon\text{-H\"ulle}(q_3) = \{q_2\} \cup \{q_3, q_5\} = \{q_2, q_3, q_5\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.1) = \delta(q_2, 1) \cup \delta(q_3, 1) \cup \delta(q_5, 1) = \{q_3\} \cup \{q_3\} \cup \emptyset = \{q_3\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.1) = \epsilon\text{-H\"ulle}(q_3) = \{q_3, q_5\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.14) = \epsilon\text{-H\"ulle}(q_3) = \{q_3, q_5\}$
- ⋮
- $\hat{\delta}(q_0, 3.14159) = \epsilon\text{-H\"ulle}(q_3) = \{q_3, q_5\}$

Noch flexibler aber nicht ausdrucksstärker

- Gut für **Charakterisierung optionaler Teiltexte**

- Man kann im Zweifel einfach weiterspringen

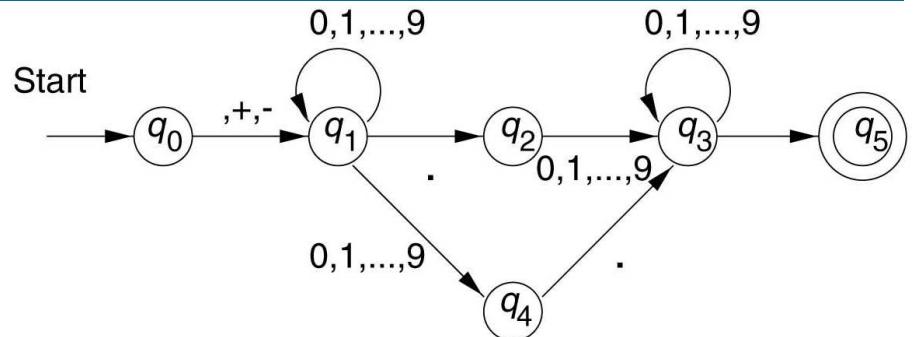
- Sehr ähnliche **Teilmengenkonstruktion**

- Sei $A_E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ ein ϵ -NEA
 - Konstruiere äquivalenten DEA $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ mit
 - $Q_D = \mathcal{P}(Q_E)$
 - $q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0)$ (statt $\{q_0\}$)
 - $F_D = \{S \in Q_D \mid S \cap F_E \neq \emptyset\}$
 - $\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta_E(q, a)$ (schließt ϵ -Hülle mit ein)

- **Optimierung:** $Q_D \hat{=} \text{erreichbare Zustände}$

- Iterative Konstruktion gleichzeitig mit δ_D
 - Start: $Q_0 := \{q_D\}$
 - Schritt: $Q_{i+1} := Q_i \cup \{\delta_D(S, a) \mid S \in Q_i, a \in \Sigma\}$ (konstruiere dabei die $\delta_D(S, a)$)
 - Abschluß: Wenn $Q_{i+1} = Q_i$, dann halte an und setze $Q_D := Q_i$

TEILMENGENKONSTRUKTION AM BEISPIEL



- Konstruiere Q_D und δ_D

$$Q_0 = \{q_D\} = \{\epsilon\text{-H\"ulle}(q_0)\} = \{\{q_0, q_1\}\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, +) = \{q_1\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, -) = \{q_1\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_1, q_4\}, \dots \delta_D(\{q_0, q_1\}, 9) = \{q_1, q_4\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, .) = \{q_2\}$$

$$Q_1 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\} \}$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, +) = \delta_D(\{q_2\}, +) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, +) = \emptyset, \dots$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, 0) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, 0) = \{q_1, q_4\} \quad \delta_D(\{q_2\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \dots$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, .) = \{q_2\}, \quad \delta_D(\{q_2\}, .) = \emptyset \quad \delta_D(\{q_1, q_4\}, .) = \{q_2, q_3, q_5\}$$

$$Q_2 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}, \emptyset, \{q_3, q_5\}, \{q_2, q_3, q_5\} \}$$

$$- \delta_D(\emptyset, +) = \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, +) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, +) = \emptyset, \dots$$

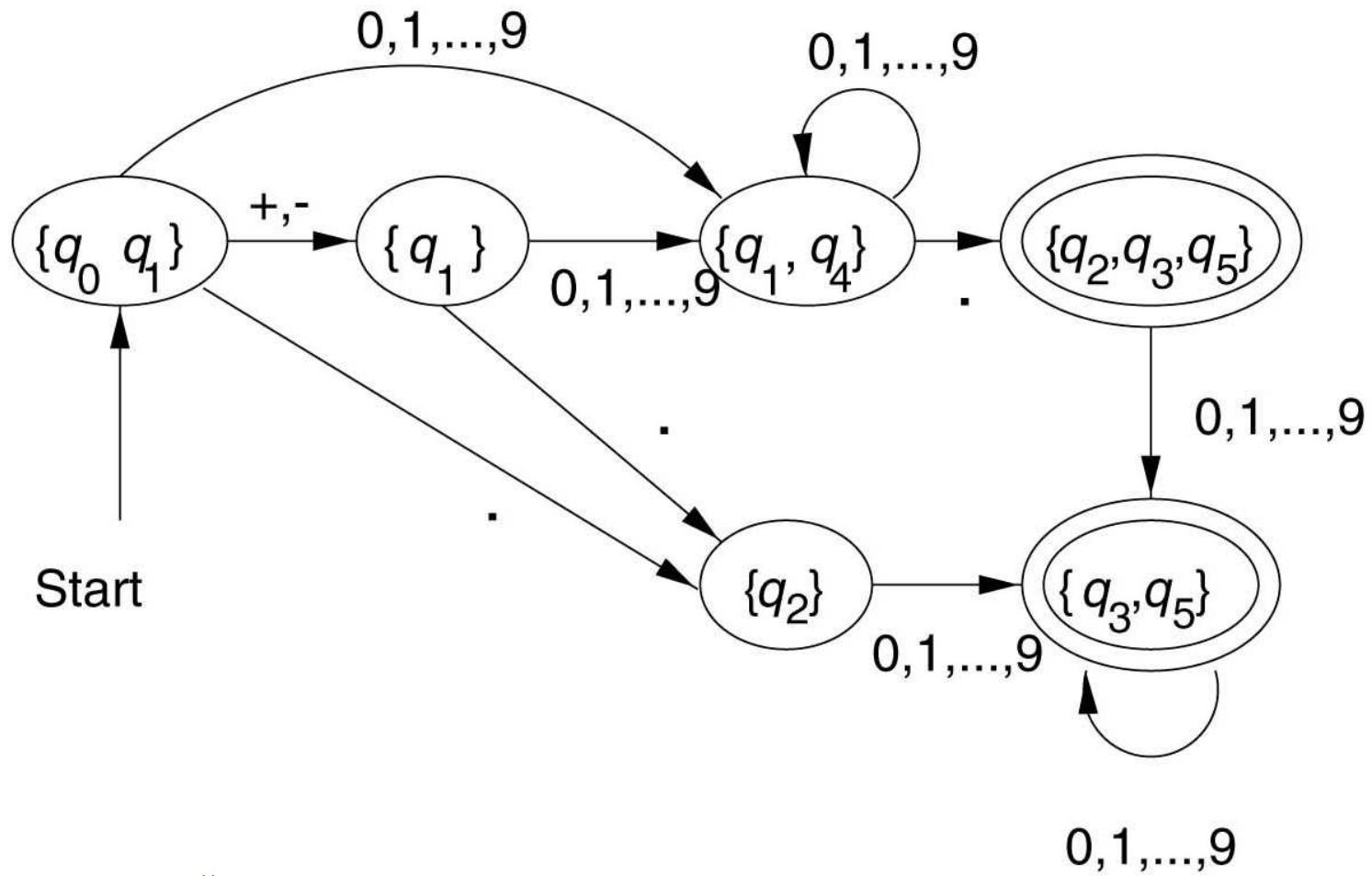
$$- \delta_D(\emptyset, 0) = \emptyset, \quad \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, 0) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \dots$$

$$- \delta_D(\emptyset, .) = \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, .) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, .) = \emptyset$$

$$Q_3 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}, \emptyset, \{q_3, q_5\}, \{q_2, q_3, q_5\} \} = Q_2 =: Q_D$$

ERZEUGUNG EINES DEA FÜR DEZIMALZAHLERKENNUNG

Generierter DEA



Übergänge zum Zustand \emptyset nicht gezeigt

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION: KORREKTHEIT

- Für den konstruierten DEA gilt $L(A_D) = L(A_E)$

Zeige: $\hat{\delta}_D(q_D, w) = \hat{\delta}_E(q_0, w)$ für alle $w \in \Sigma^*$

Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau der Worte aus Σ^*

- Basisfall: Sei $w = \epsilon$:

$$\hat{\delta}_D(q_D, \epsilon) = q_D = \epsilon\text{-H\"ulle}(q_0) = \hat{\delta}_E(q_0, \epsilon)$$

- Induktionsschritt: Sei $w = va$ für ein $v \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$:

- Induktionsannahme: Es gelte $\hat{\delta}_D(q_D, v) = \hat{\delta}_E(q_0, v)$

Dann gilt $\hat{\delta}_D(q_D, w)$

$$= \hat{\delta}_D(\hat{\delta}_D(q_D, v), a) \quad (\text{Definition } \hat{\delta}_D)$$

$$= \hat{\delta}_D(\hat{\delta}_E(q_0, v), a) \quad (\text{Induktionsannahme})$$

$$= \bigcup_{q' \in \hat{\delta}_E(q_0, v)} \hat{\delta}_E(q', a) \quad (\text{Konstruktion von } \hat{\delta}_D)$$

$$= \bigcup_{q' \in \hat{\delta}_E(q_0, v)} \bigcup_{q'' \in \delta_E(q', a)} \epsilon\text{-H\"ulle}(q'') \quad (\text{Definition } \hat{\delta}_E)$$

$$= \hat{\delta}_E(q_0, w) \quad (\text{Definition } \hat{\delta}_E)$$

- ϵ -NEAs und DEAs akzeptieren dieselben Sprachen

● Deterministische Endliche Automaten (DEA)

- Endliche Menge von **Zuständen**, endliche Menge von **Eingabesymbolen**
- Ein fester **Startzustand**, null oder mehr **akzeptierende Zustände**
- **Überführungsfunktion** bestimmt Änderung des Zustands bei Abarbeitung der Eingabe
- **Erkannte Sprache**: Eingaben, deren Abarbeitung in einem akzeptierenden Zustand endet

● Nichtdeterministische Endliche Automaten (NEA)

- Wie DEA, aber mit **mengenwertiger Überführungsfunktion**
- Durch **Teilmengenkonstruktion** in äquivalenten DEA transformierbar

● NEAs mit ϵ -Übergängen (ϵ -NEA)

- Wie NEA, aber mit **Zustandsüberführung bei leerer Eingabe**
- Durch **Teilmengenkonstruktion** in äquivalenten DEA transformierbar