Theoretische Informatik I

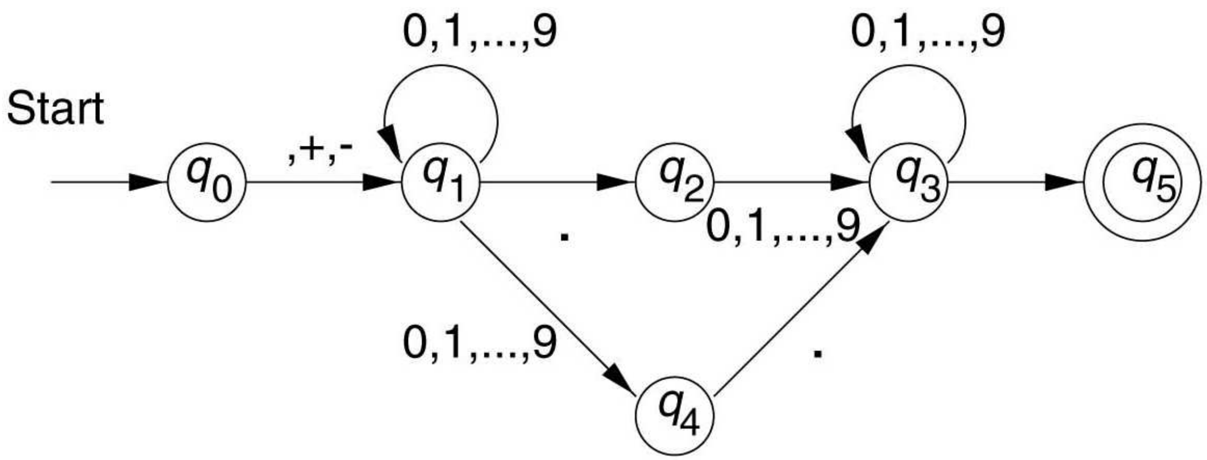
Einheit 2.3

Automaten mit ϵ-Übergängen

1. Arbeitsweise
2. Akzeptierte Sprache
3. Äquivalenz zu NEAs

Warum ϵ-Übergänge?

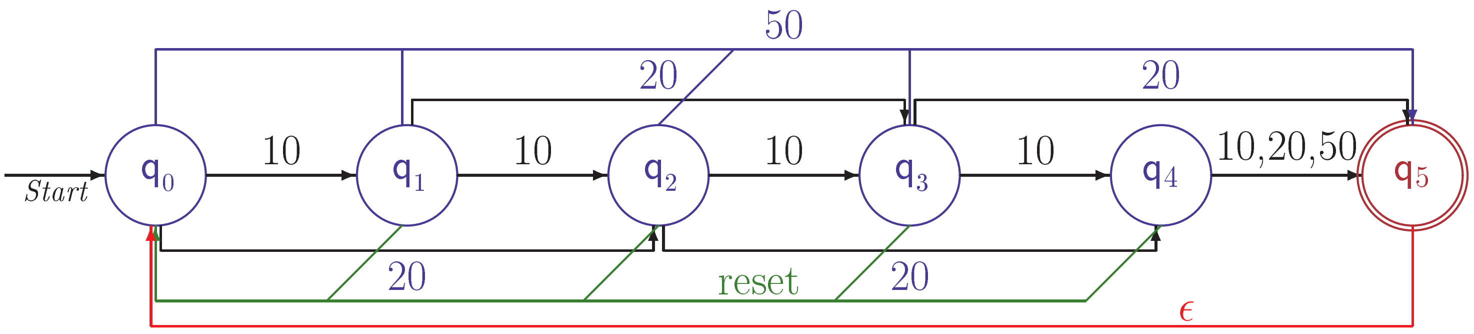
- **Erkennung von Dezimalzahlen**
  - Zwei Zeichenreihen von Ziffern getrennt durch Dezimalpunkt
  - Eine der beiden Zeichenreihen darf leer sein, aber nicht beide
  - Optionales Vorzeichen **+** oder **-**



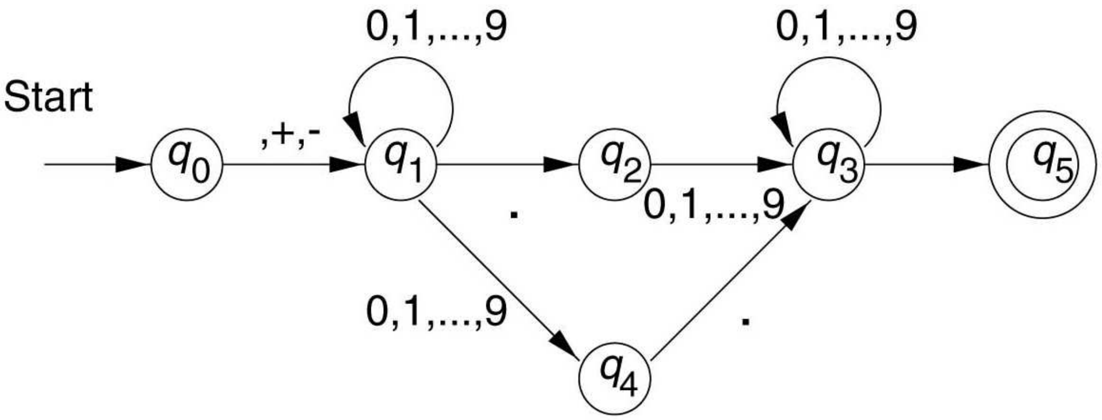
ϵ-Übergänge für Verarbeitung optionaler Symbole

ϵ-Übergänge für automatische Zustandsänderungen

- **50c Kaffeeautomat**
  - Akzeptiert 10c, 20c, 50c Münzen
  - Gibt kein Geld zurück
  - Mit Reset-Taste
  - Automatische Rücksetzung möglich



ϵ-NEAs, präzisiert

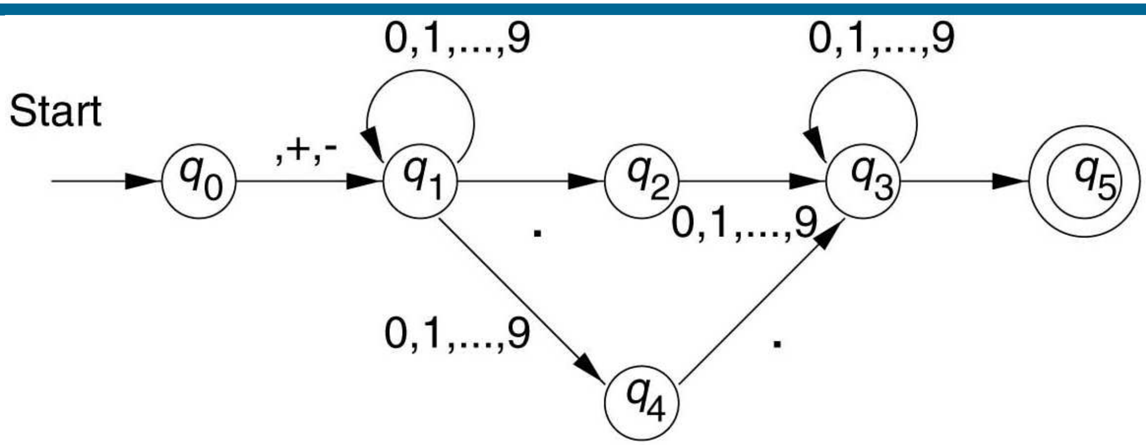


Ein **ϵ-NEA** (nichtdeterministischer endlicher Automat mit ϵ-Übergängen) ist ein 5-Tupel $\boldsymbol{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ **Eingabealphabet** mit $\epsilon \notin \Sigma$
- $\delta{:}Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ **Zustandsüberführungsfunktion**
- $q_0 \in Q$ **Startzustand**
- $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden** (finalen) **Zuständen**

Alle formalen Details sehr ähnlich zu NEAs

Arbeitsweise von ϵ-NEAs



– Die Teilworte `+`, `-`, und ϵ führen nach q_1

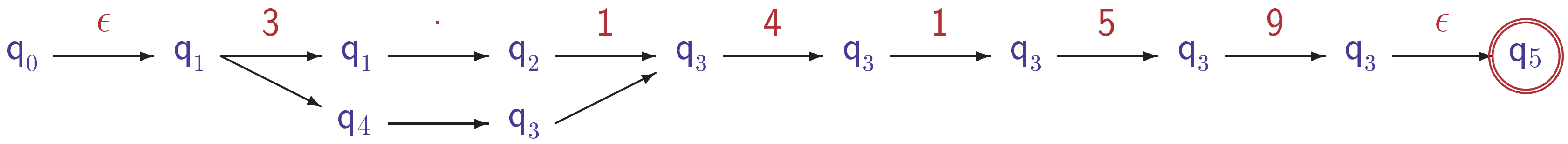
– Teilworte der Form v`{0..9}`$^+$ führen nach q_1 oder q_4, wobei $v \in \{$`+`, `-`, $\epsilon\}$

– Teilworte der Form v`{0..9}`$^+$`.` führen nach q_2 oder q_3

– Teilworte der Form v`{0..9}`*`.{0..9}`$^+$ führen nach q_3

– Worte die nach q_3 führen, führen auch zum Endzustand q_5

- Abarbeitung von `3.14159`



Ein Abarbeitungsweg führt zu einem akzeptierenden Zustand

Ergänze NEA-Überführungsfunktion um ϵ-Übergänge

- **ϵ-Hülle eines Zustands q**
  - Die von q mit ϵ-Übergängen (ohne Eingaben) erreichbaren Zustände
  - Iterative Definition: Kleinste Menge mit der Eigenschaft

    $q \in \epsilon\text{-Hülle}(q)$ und $p \in \epsilon\text{-Hülle}(q) \;\wedge\; r \in \delta(p,\epsilon) \;\Rightarrow\; r \in \epsilon\text{-Hülle}(q)$

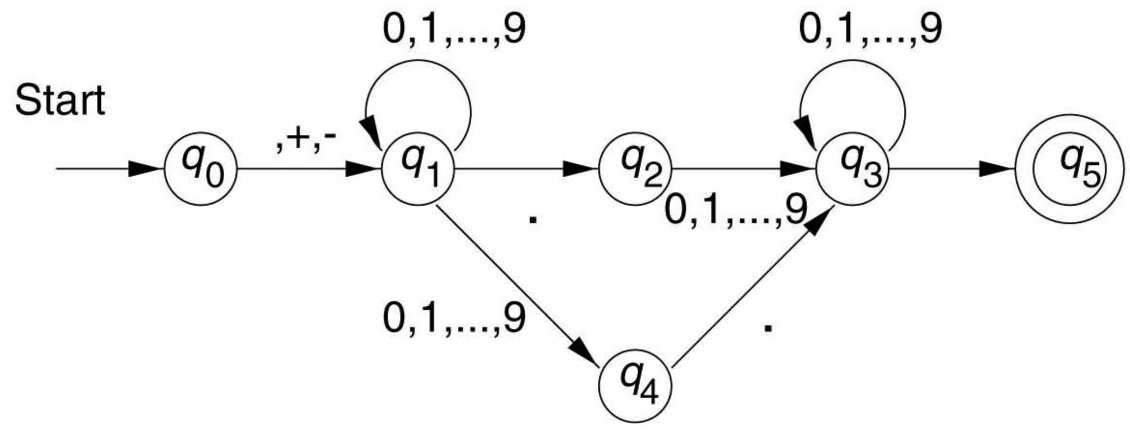
- **Erweiterte Überführungsfunktion $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$**
  - Aufsammeln aller bei der Abarbeitung erreichbarer Zustände einschließlich derjenigen, die ohne Eingabe erreicht werden
  - Induktive Definition (kaskadisches Aufsammeln von Zuständen)

$$\hat{\delta}(q,w) = \begin{cases} \epsilon\text{-Hülle}(q) & \text{falls } w{=}\epsilon, \\ \bigcup_{q' \in \hat{\delta}(q,v)} \bigcup_{q'' \in \delta(q',a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') & \text{falls } w{=}v\,a \;\; (a \in \Sigma) \end{cases}$$

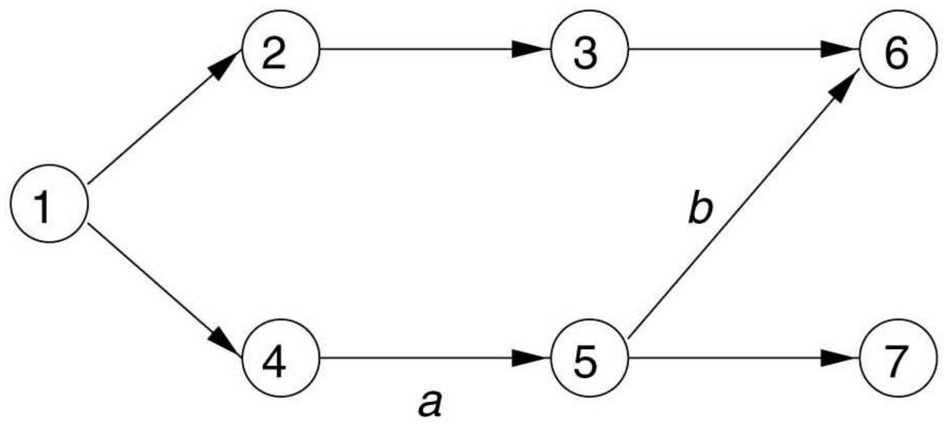
- **Akzeptierte Sprache: $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0,w) \cap F \neq \emptyset\}$**

ϵ-Hülle am Beispiel

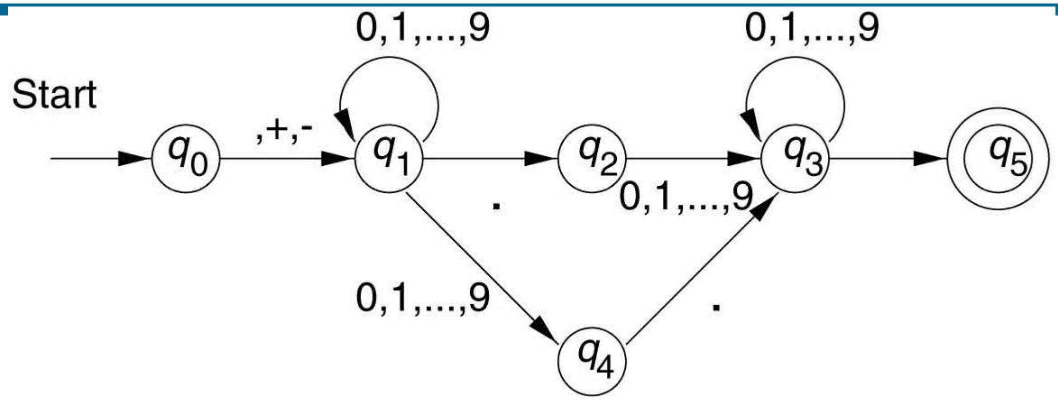
- **Dezimalautomat**
  - Nur 2 ϵ-Übergänge
  - ϵ-Hülle$(q_0) = \{q_0, q_1\}$
  - ϵ-Hülle$(q_3) = \{q_3, q_5\}$
  - ϵ-Hülle$(q_i) = \{q_i\}$ sonst



- **Viele ϵ-Übergänge**
  - ϵ-Hülle$(1) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
  - ϵ-Hülle$(2) = \{2, 3, 6\}$
  - ϵ-Hülle$(3) = \{3, 6\}$
  - ϵ-Hülle$(4) = \{4\}$
  - ϵ-Hülle$(5) = \{5, 7\}$
  - ϵ-Hülle$(6) = \{6\}$
  - ϵ-Hülle$(7) = \{7\}$



Erweiterte Überführungsfunktion am Beispiel



- **Abarbeitung von** `3.14159`
  - $\hat{\delta}(q_0,\epsilon) = \epsilon\text{-Hülle}(q_0) =$ $\boldsymbol{\{q_0, q_1\}}$
  - $\hat{\delta}(q_0,3)$: $\delta(q_0,3)\cup\delta(q_1,3) = \emptyset\cup\{q_1,q_4\} = \{q_1,q_4\}$

    $\hat{\delta}(q_0,3) = \epsilon\text{-Hülle}(q_1) \cup \epsilon\text{-Hülle}(q_4) = \{q_1\}\cup\{q_4\} =$ $\boldsymbol{\{q_1, q_4\}}$
  - $\hat{\delta}(q_0,3.)$: $\delta(q_1,.)\cup\delta(q_4,.) = \{q_2\}\cup\{q_3\} = \{q_2,q_3\}$

    $\hat{\delta}(q_0,3.) = \epsilon\text{-Hülle}(q_2) \cup \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_2\}\cup\{q_3,q_5\} =$ $\boldsymbol{\{q_2, q_3, q_5\}}$
  - $\hat{\delta}(q_0,3.1)$: $\delta(q_2,1)\cup\delta(q_3,1)\cup\delta(q_5,1) = \{q_3\}\cup\{q_3\} \cup \emptyset = \{q_3\}$

    $\hat{\delta}(q_0,3.1) = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) =$ $\boldsymbol{\{q_3, q_5\}}$
  - $\hat{\delta}(q_0,3.14) = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) =$ $\boldsymbol{\{q_3, q_5\}}$

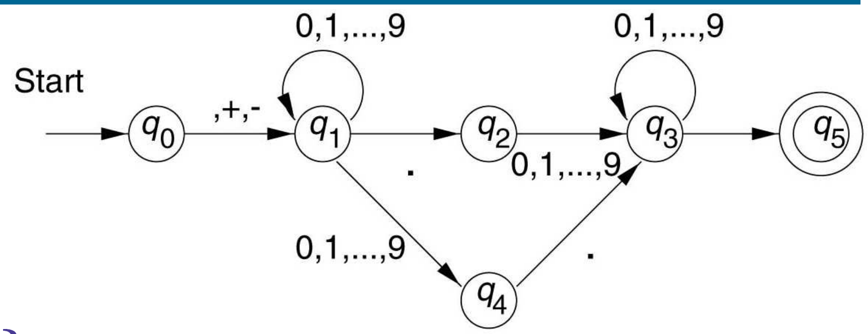
    $\vdots$
  - $\hat{\delta}(q_0,3.14159) = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) =$ $\boldsymbol{\{q_3, q_5\}}$

Beziehung zu deterministischen Automaten

Noch flexibler aber nicht ausdrucksstärker

- **Gut für Charakterisierung optionaler Teiltexte**
  - Man kann im Zweifel einfach weiterspringen
- **Sehr ähnliche Teilmengenkonstruktion**
  - Sei $A_E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, q_0, F_E)$ ein ϵ-NEA
  - Konstruiere äquivalenten DEA $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ mit
    - $Q_D = \mathcal{P}(Q_E)$
    - $q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0)$ (statt $\{q_0\}$)
    - $F_D = \{S \in Q_D \mid S \cap F_E \neq \emptyset\}$
    - $\delta_D(S,a) = \bigcup_{q \in S} \hat{\delta}_E(q,a)$ (schließt ϵ-Hülle mit ein)
- **Optimierung: $Q_D \hat{=}$ erreichbare Zustände**
  - Iterative Konstruktion gleichzeitig mit δ_D
  - Start: $Q_0 := \{q_D\}$
  - Schritt: $Q_{i+1} := Q_i \cup \{\delta_D(S,a) \mid S \in Q_i, a \in \Sigma\}$ (konstruiere dabei die $\delta_D(S,a)$)
  - Abschluß: Wenn $Q_{i+1} = Q_i$, dann halte an und setze $Q_D := Q_i$

Teilmengenkonstruktion am Beispiel



- **Konstruiere Q_D und δ_D**

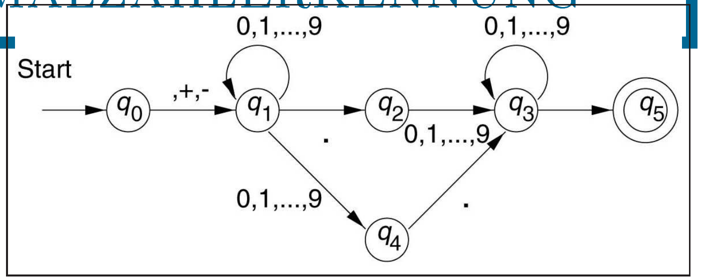
  $Q_0 = \{q_D\} = \{\epsilon\text{-Hülle}(q_0)\} = \{\{q_0, q_1\}\}$
  - $\delta_D(\{q_0, q_1\}, +) = \{q_1\}$, $\quad\delta_D(\{q_0, q_1\}, -) = \{q_1\}$
  - $\delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_1, q_4\}, \ldots \delta_D(\{q_0, q_1\}, 9) = \{q_1, q_4\}$
  - $\delta_D(\{q_0, q_1\}, .) = \{q_2\}$

  $Q_1 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\} \}$
  - $\delta_D(\{q_1\}, +) = \delta_D(\{q_2\}, +) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, +) = \emptyset, \ldots$
  - $\delta_D(\{q_1\}, 0) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, 0) = \{q_1, q_4\} \quad \delta_D(\{q_2\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \ldots$
  - $\delta_D(\{q_1\}, .) = \{q_2\}, \quad \delta_D(\{q_2\}, .) = \emptyset \quad \delta_D(\{q_1, q_4\}, .) = \{q_2, q_3, q_5\}$

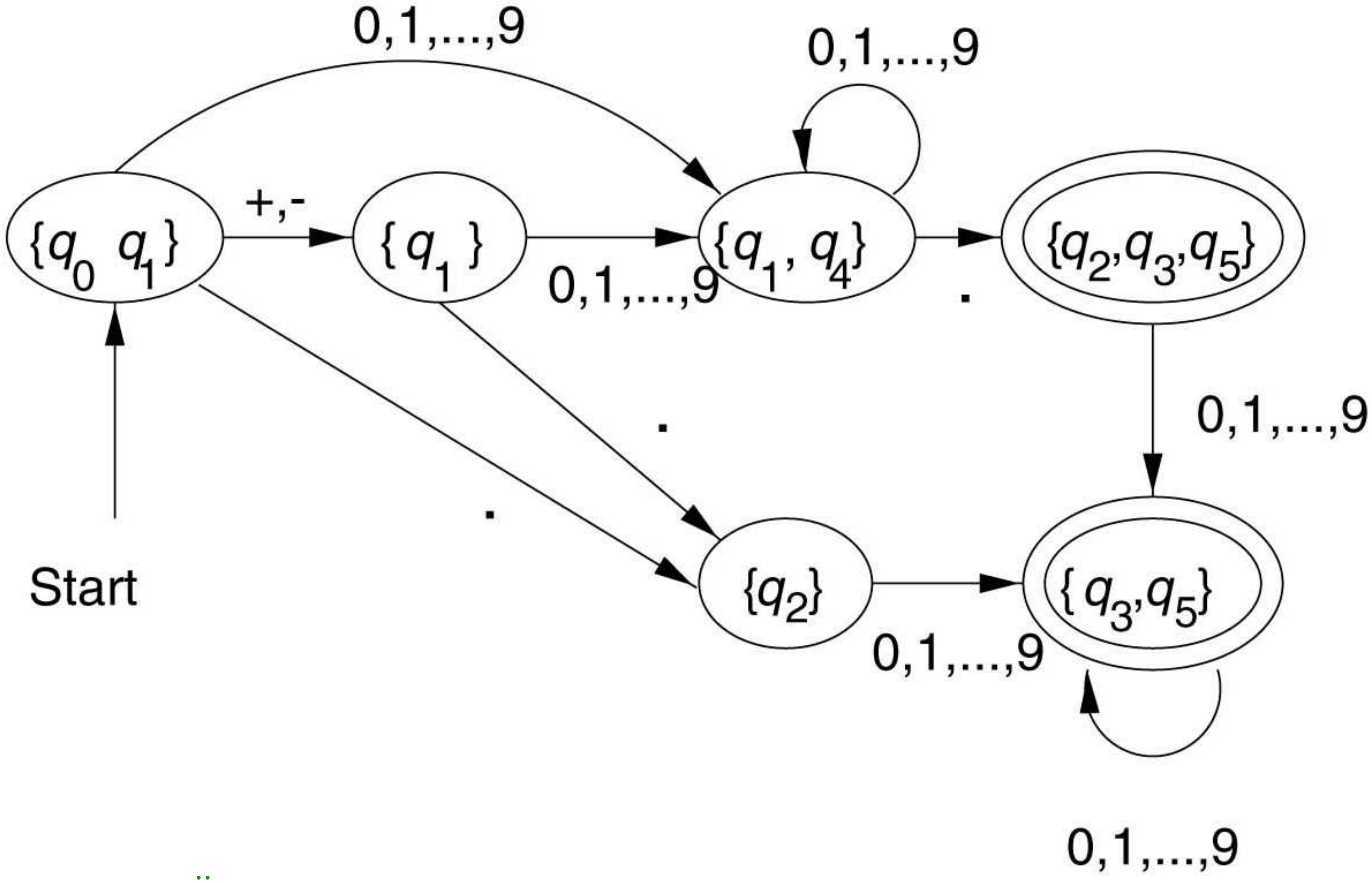
  $Q_2 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}, \emptyset, \{q_3, q_5\}, \{q_2, q_3, q_5\} \}$
  - $\delta_D(\emptyset, +) = \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, +) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, +) = \emptyset, \ldots$
  - $\delta_D(\emptyset, 0) = \emptyset, \ \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, 0) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \ldots$
  - $\delta_D(\emptyset, .) = \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, .) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, .) = \emptyset$

  $Q_3 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}, \emptyset, \{q_3, q_5\}, \{q_2, q_3, q_5\} \} = Q_2 =: Q_D$

Erzeugung eines DEA für Dezimalzahlerkennung



Generierter DEA



Übergänge zum Zustand $\emptyset$ nicht gezeigt

Optimierte Teilmengenkonstruktion: Korrektheit

- **Für den konstruierten DEA gilt $L(A_D) = L(A_E)$**

  Zeige: $\hat{\delta}_D(q_D, w) = \hat{\delta}_E(q_0, w)$ **für alle** $w \in \Sigma^*$

  Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau der Worte aus Σ^*

  – Basisfall: Sei $w = \epsilon$:

  $\hat{\delta}_D(q_D, \epsilon) = q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \hat{\delta}_E(q_0, \epsilon)$

  – Induktionsschritt: Sei $w = va$ für ein $v \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$:

  – Induktionsannahme: Es gelte $\hat{\delta}_D(q_D, v) = \hat{\delta}_E(q_0, v)$

  Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\hat{\delta}_D(q_D, w) &= \delta_D(\hat{\delta}_D(q_D, v), a) && \text{(Definition } \hat{\delta}_D) \\
&= \delta_D(\hat{\delta}_E(q_0, v), a) && \text{(Induktionsannahme)} \\
&= \textstyle\bigcup_{q' \in \hat{\delta}_E(q_0,v)} \hat{\delta}_E(q', a) && \text{(Konstruktion von } \delta_D) \\
&= \textstyle\bigcup_{q' \in \hat{\delta}_E(q_0,v)} \bigcup_{q'' \in \delta_E(q',a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') && \text{(Definition } \hat{\delta}_E) \\
&= \hat{\delta}_E(q_0, w) && \text{(Definition } \hat{\delta}_E)
\end{aligned}
$$

- **ϵ-NEAs und DEAs akzeptieren dieselben Sprachen**

Endliche Automaten – Zusammenfassung

- **Deterministische Endliche Automaten (DEA)**
  - Endliche Menge von Zuständen, endliche Menge von Eingabesymbolen
  - Ein fester Startzustand, null oder mehr akzeptierende Zustände
  - Überführungsfunktion bestimmt Änderung des Zustands bei Abarbeitung der Eingabe
  - Erkannte Sprache: Eingaben, deren Abarbeitung in einem akzeptierenden Zustand endet
- **Nichtdeterministische Endliche Automaten (NEA)**
  - Wie DEA, aber mit mengenwertiger Überführungsfunktion
  - Durch Teilmengenkonstruktion in äquivalenten DEA transformierbar
- **NEAs mit ϵ-Übergängen (ϵ-NEA)**
  - Wie NEA, aber mit Zustandsüberführung bei leerer Eingabe
  - Durch Teilmengenkonstruktion in äquivalenten DEA transformierbar