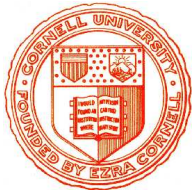
Theoretische Informatik I



Einheit 2.6

Eigenschaften regulärer Sprachen

1. Abschlußeigenschaften
2. Prüfen von Eigenschaften
3. Wann sind Sprachen nicht regulär?

Abschlusseigenschaften, wozu?

Zeige, daß bestimmte Operationen auf regulären Sprachen wieder zu regulären Sprachen führen

- **Wiederverwendung von "Sprachmodulen"**
  - Schematische Komposition von
    - Grammatiken zur Erzeugung von Sprachen
    - Automaten zur Erkennung von Sprachen
    - Regulären Ausdrücken
- **Schematische Konstruktion ist effektiver**
  - Fehlerfreier Aufbau sehr komplexer Grammatiken / Automaten
  + Schematische Optimierung / Minimierung
  - Konstruktion "von Hand" oft fehleranfällig
- **Beispiel: Literale einer Programmiersprache**
  - Bilde Automaten für Tokenklassen: Zahlen, Bezeichner, Schlüsselworte, ...
  - Konstruktion liefert Automaten für alle Arten von Literalen

Abschlusseigenschaften, präzisiert

Zeige: L_1, L_2 regulär $\Rightarrow$ L_1 *op* L_2 regulär

- **Es gilt Abgeschlossenheit unter 9 Operationen**
  - Die Vereinigung zweier regulärer Sprachen ist regulär $L_1 \cup L_2$
  - Das Komplement einer regulären Sprache ist regulär $\overline{L}$
  - Der Durchschnitt zweier regulärer Sprachen ist regulär $L_1 \cap L_2$
  - Die Differenz zweier regulärer Sprachen ist regulär $L_1 - L_2$
  - Die Spiegelung einer regulären Sprache ist regulär L^R
  - Die Hülle einer regulären Sprache ist regulär L^*
  - Die Verkettung zweier regulärer Sprachen ist regulär $L_1 \circ L_2$
  - Jeder Homomorphismus einer regulären Sprache ist regulär $h(L)$
  - Jeder inverse Homomorphismus einer regulären Sprache ist regulär $h^{-1}(L)$
- **Nachweis durch Verwendung aller Modelle**
  - DEA, NEA, ϵ-NEA, reguläre Ausdrücke, Typ-3 Grammatiken
  - Modelle sind ineinander umwandelbar – **wähle das passendste**

Beweisführung mit regulären Ausdrücken

- **L_1, L_2 regulär $\Rightarrow$ $L_1 \cup L_2$ regulär**

  L_1, L_2 regulär

  $\Rightarrow$ Es gibt reguläre Ausdrücke E_1, E_2 mit $L_1 = L(E_1)$, $L_2 = L(E_2)$

  $\Rightarrow$ **$L_1 \cup L_2$** $= L(E_1) \cup L(E_2) = L(E_1$**+**$E_2)$ **regulär**

- **L_1, L_2 regulär $\Rightarrow$ $L_1 \circ L_2$ regulär**

  L_1, L_2 regulär

  $\Rightarrow$ Es gibt reguläre Ausdrücke E_1, E_2 mit $L_1 = L(E_1)$, $L_2 = L(E_2)$

  $\Rightarrow$ **$L_1 \circ L_2$** $= L(E_1) \circ L(E_2) = L(E_1 \circ E_2)$ **regulär**

- **L regulär $\Rightarrow$ L^* regulär**

  L regulär

  $\Rightarrow$ Es gibt einen regulären Ausdruck E mit $L = L(E)$

  $\Rightarrow$ **L^*** $= (L(E))^* = L(E^*)$ **regulär**

Beweisführung mit endlichen Automaten

- **L regulär $\Rightarrow$ $\overline{L}$ regulär**

  Komplementiere akzeptierende Zustände des erkennenden Automaten

  L regulär

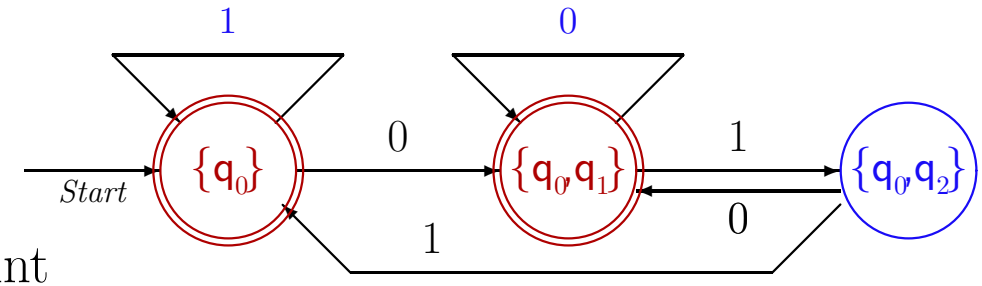
  $\Rightarrow$ Es gibt einen DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L = L(A)$

  $\Rightarrow$ $\overline{L} = \overline{L(A)} = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \notin F\} = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in Q - F\}$

  $= L(Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$ **regulär**

- **Beispiel: Komplementierung von `(0+1)*01`**

  – Zugehöriger DEA



  – Komplementautomat erkennt

  Worte die nicht mit 01 enden

  – Regulärer Ausdruck durch Zustandseliminationsverfahren erzeugbar

Abschluss unter Durchschnitt und Differenz

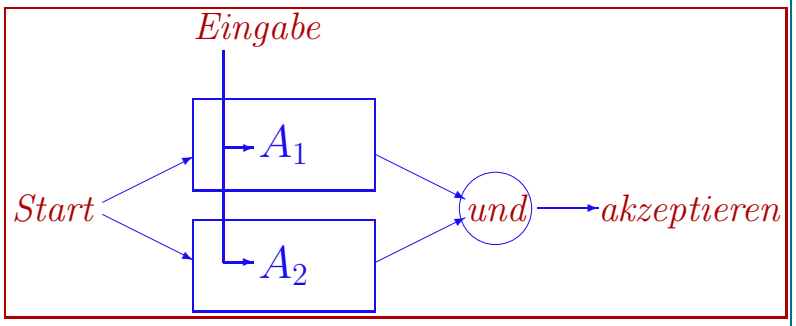
- **Einfache mathematische Beweise**

  L_1, L_2 **regulär** $\Rightarrow$ $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ **regulär**

  L_1, L_2 **regulär** $\Rightarrow$ $L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$ **regulär**

- **Produktkonstruktion auf endlichen Automaten**

  Simultane Abarbeitung von Worten in beiden Automaten



  L_1, L_2 **regulär**

  $\Rightarrow$ Es gibt DEAs $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{0,1}, F_1)$

  und $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{0,2}, F_2)$

  mit $L_1 = L(A_1)$, $L_2 = L(A_2)$

  $\Rightarrow$ $L_1 \cap L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}_1(q_{0,1}, w) \in F_1 \ \wedge \ \hat{\delta}_2(q_{0,2}, w) \in F_2\}$

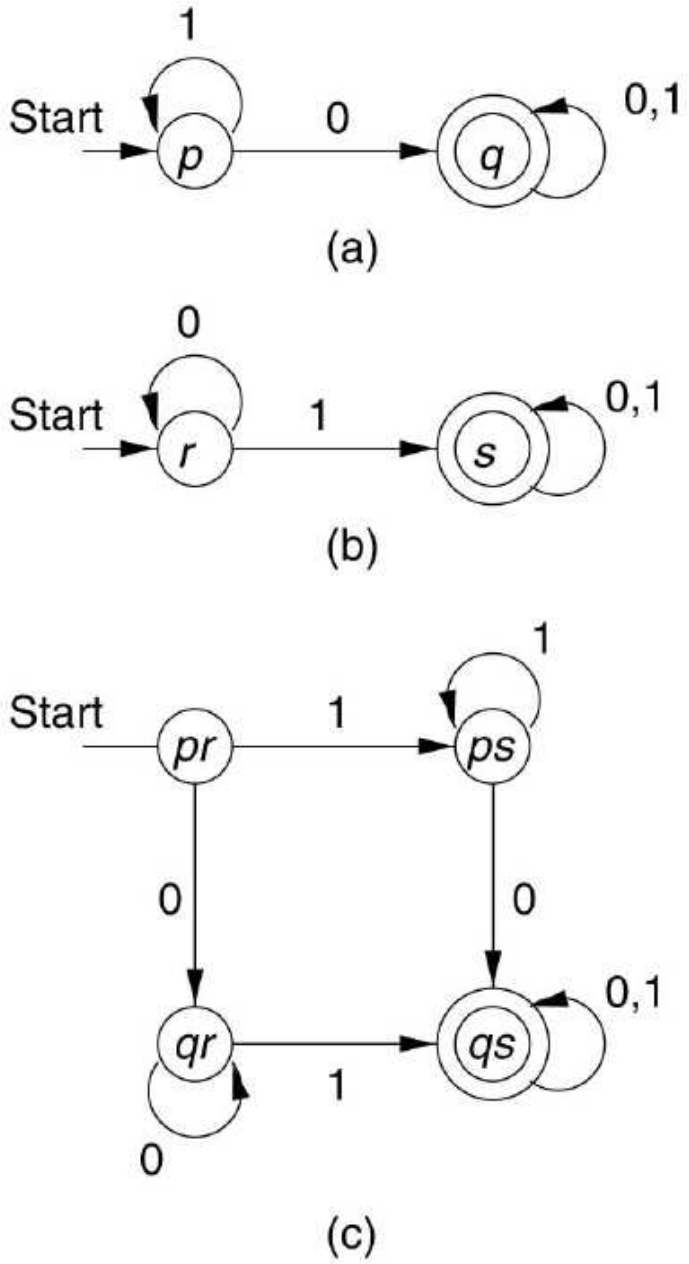
  $= \{w \in \Sigma^* \mid (\hat{\delta}_1(q_{0,1}, w), \hat{\delta}_2(q_{0,2}, w)) \in F_1 \times F_2\}$

  Konstruiere $A = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (q_{0,1}, q_{0,2}), F_1 \times F_2)$

  mit $\delta((p,q),a) = (\delta_1(p,a), \delta_2(q,a))$ für $p \in Q_1$, $q \in Q_2$, $a \in \Sigma$

  $\Rightarrow$ $L_1 \cap L_2 = L(A)$ **regulär**

Produktkonstruktion am Beispiel



Abschluss unter Spiegelung

L regulär $\Rightarrow$ $L^R = \{w_n..w_1 \mid w_1..w_n \in L\}$ regulär

- **Beweisführung mit Automaten**
  - Bilde Umkehrautomaten zu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L{=}L(A)$
    - Umkehrung der Pfeile im Diagramm: $\delta^R(q, a) = q'$ g.d.w. $\delta(q', a) = q$
    - q_0 wird zum akzeptierenden Zustand: $F^R = \{q_0\}$
    - Neuer Startzustand q_0^R mit ϵ-Übergängen zu allen $q \in F$
- **Induktiver Beweis mit regulären Ausdrücken**

  Sei $L = L(E)$ für einen regulären Ausdruck
  - Für $E \in \{\emptyset, \epsilon, \mathtt{a}\}$ ist $L^R = L = L(E)$ regulär
  - Für $E = E_1\mathtt{+}E_2$ ist $L^R = (L(E_1) \cup L(E_2))^R = L(E_1)^R \cup L(E_2)^R$ regulär
  - Für $E = E_1 \circ E_2$ ist $L^R = (L(E_1) \circ L(E_2))^R = L(E_2)^R \circ L(E_1)^R$ regulär
  - Für $E = E_1^*$ ist $L^R = L(E_1^*)^R = (L(E_1)^R)^*$ regulär
- **Beispiel: Spiegelung von $L(\mathtt{(0+1)0^*})$**
  - $L^R = L(\mathtt{(0^*)}^R\mathtt{(0+1)}^R) = L(\mathtt{(0}^R\mathtt{)^*(0}^R\mathtt{+1}^R\mathtt{)}) = L(\mathtt{0^*(0+1)})$

Abschluss unter Homomorphismen

L regulär, h Homomorphismus $\Rightarrow$ $h(L)$ regulär

$h{:}\Sigma{\to}\Sigma'$ ist **Homomorphismus**, wenn $h(v_1..v_n) = h(v_1)..h(v_n)$

– *Homomorphismen sind mit endlichen (Ein-/Ausgabe) Automaten berechenbar*

$\boldsymbol{h(L)}{=}\{h(w) \mid w \in L\} \subseteq \Sigma'^*$ ist das Abbild der Worte von L unter h

- **Beweis mit Grammatiken**

  L regulär

  $\Rightarrow$ Es gibt eine Typ-3 Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $L = L(G)$

  $\Rightarrow$ $h(L) = h(L(G)) = \{h(v_1)..h(v_n) \in \Sigma'^* \mid S \xrightarrow{*} v_1..v_n\}$

  Für $A{\to}v\,B \in P$ erzeuge Regeln $A{\to}a_1B_1$, $B_1{\to}a_2B_2$, ... $B_{k-1}{\to}a_kB$,
  wobei $h(v) = a_1..a_k$ und alle B_i neue Hilfsvariablen

  Sei P_h die Menge dieser Regeln und V_h die Menge ihrer Hilfsvariablen

  Für $G_h = (V_h, \Sigma', P_h, S)$ gilt $A{\to}v\,B \in P \Leftrightarrow A \xrightarrow{*}{}_{G_h} h(v)\,B$

  und $S \xrightarrow{*}{}_{G} v_1..v_n \Leftrightarrow S \xrightarrow{*}{}_{G_h} h(v_1)..h(v_n)$

  $\Rightarrow$ $\boldsymbol{h(L)} = \{h(v_1)..h(v_n) \in \Sigma'^* \mid S \xrightarrow{*}{}_{G_h} h(v_1)..h(v_n)\} = L(G_h)$ **regulär**

Beweis mit regulären Ausdrücken in Hopcroft, Motwani, Ullman §4.2.3

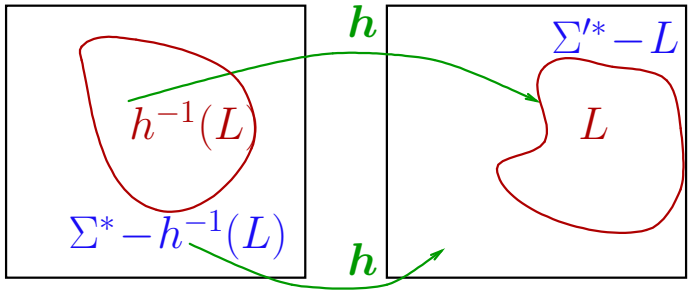
Abschluss unter inversen Homomorphismen

L regulär, h Homomorphismus $\Rightarrow$ $h^{-1}(L)$ regulär

$\boldsymbol{h^{-1}(L)}=\{w \in \Sigma^* \mid h(w) \in L\}$ ist das Urbild der Worte von L unter h

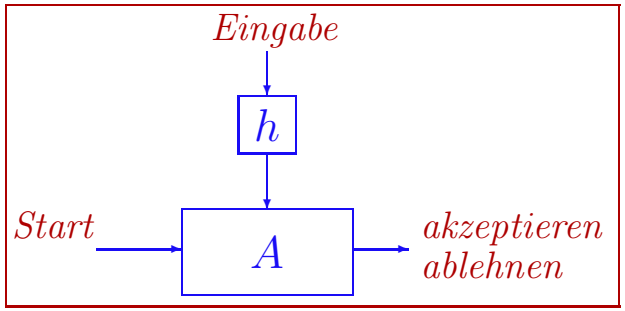
– z.B. Für $L = L(\texttt{(01+10)}^*)$,

$h(a) = 01$, $h(b) = 10$ ist $h^{-1}(L) = L(\texttt{(a+b)})$



- **Beweis mit endlichen Automaten**

  Berechnung von h vor Abarbeitung der Worte im Automaten



  L regulär

  $\Rightarrow$ Es gibt einen DEA $A = (Q, \Sigma', \delta, q_0, F)$

  mit $L = L(A) = \{w \in \Sigma'^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$

  $\Rightarrow$ $h^{-1}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, h(w)) \in F\}$

  Konstruiere $A_h = (Q, \Sigma, \delta_h, q_0 F)$ mit $\delta_h(q, a) = \hat{\delta}(q, h(a))$

  Dann gilt $\hat{\delta}_h(q, w) = \hat{\delta}(q, h(w))$ für alle $q \in Q$ und $w \in \Sigma^*$

  $\Rightarrow$ $\boldsymbol{h^{-1}(L)} = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}_h(q_0, h(w)) \in F\} = L(A_h)$ **regulär**

Tests für Eigenschaften regulärer Sprachen

- **Welche Eigenschaften sind automatisch prüfbar?**
  - Ist die Sprache eines Automaten leer?
  - Zugehörigkeit: Ist ein Wort w Element der Sprache eines Automaten?
  - Äquivalenz: Beschreiben zwei Automaten dieselbe Sprache?

  Gleiche Fragestellung für Grammatiken und reguläre Ausdrücke

- **Wechsel der Repräsentation ist effektiv**
  - NEA $\mapsto$ DEA: Teilmengenkonstruktion (exponentielle Aufblähung möglich)
  - ϵ-NEA $\mapsto$ DEA: Hüllenbildung + Teilmengenkonstruktion
  - DEA $\mapsto$ ϵ-NEA/NEA: Modifikation der Präsentation (Mengenklammern)
  - DEA $\mapsto$ RA: R_{ij}^k-Methode oder Zustandselimination
  - RA $\mapsto$ ϵ-NEA: induktive Konstruktion von Automaten
  - DEA $\mapsto$ Typ-3 Grammatik: Regeln für Überführungsschritte einführen
  - Typ-3 Grammatik $\mapsto$ NEA: Überführungstabelle codiert Regeln

  Es reicht, Tests für ein Modell zu beschreiben

Prüfe ob eine reguläre Sprache leer ist

- **Nichttriviales Problem**
  - Automaten: Gibt es überhaupt einen akzeptierenden Pfad?
  - Reguläre Ausdrücke: Wird mindestens ein einziges Wort charakterisiert?
  - Grammatiken: Wird überhaupt ein Wort aus dem Startzustand erzeugt?
- **Erreichbarkeitstest für DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$**
  - Wegen $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = q_0$ ist q_0 in 0 Schritten erreichbar
  - q in k Schritten erreichbar, $\delta(q, a) = q' \Rightarrow$ q' in $k{+}1$ Schritten erreichbar
  - $\boldsymbol{L(A)=\emptyset \Leftrightarrow}$ **kein** $\boldsymbol{q \in F}$ **in** $\boldsymbol{|Q|}$ **Schritten erreichbar**
- **Induktive Analyse für reguläre Ausdrücke**
  - $L(\emptyset)=\emptyset$, $L(\epsilon)\neq\emptyset$, $L(\mathtt{a})\neq\emptyset$
  - $L((E))=\emptyset \Leftrightarrow L(E)=\emptyset$ — keine Änderung
  - $L(E{+}F)=\emptyset \Leftrightarrow L(E)=\emptyset \wedge L(F)=\emptyset$ — Vereinigung von Elementen
  - $L(E \circ F)=\emptyset \Leftrightarrow L(E)=\emptyset \vee L(F)=\emptyset$ — Elemente beider Sprachen nötig
  - $L(E^*)\neq\emptyset$, — ϵ gehört immer zu $L(E^*)$

Test auf Zugehörigkeit

- **Unterschiedlich schwierig je nach Repräsentation**
  - Automaten: Gibt es einen akzeptierenden Pfad für w?
  - Reguläre Ausdrücke: Wird das Wort w von der Charakterisierung erfasst?
  - Grammatiken: Kann w aus dem Startzustand erzeugt werden?
- **Abarbeitung durch DEA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$**
  - Bestimme $q := \hat{\delta}(q_0, w)$ und teste $q \in F$
  - Maximal $|w| + |F|$ Arbeitsschritte

Test für andere Repräsentationen durch Umwandlung in DEA

Test auf Äquivalenz von Sprachen

- **Wann sind zwei reguläre Sprachen gleich?**
  - Nichttrivial, da Beschreibungsformen sehr verschieden sein können
    - Verschiedene Automaten, Grammatiken, Ausdrücke, Mischformen, ...
- **Gibt es eine "kanonische" Repräsentation?**
  - z.B. · Transformiere alles in deterministische endliche Automaten
    - Erzeuge Standardversion mit kleinstmöglicher Anzahl von Zuständen
  - Äquivalenztest prüft dann, ob der gleiche Standardautomat erzeugt wird
- **Wie standardisiert man Automaten?**
  - Entferne Zustände, die vom Startzustand unerreichbar sind
  - Fasse Zustände zusammen, die für alle Worte "äquivalent" sind
    - Es führen exakt dieselben Worte zu akzeptierenden Zuständen
  - Ergibt **minimalen äquivalenten Automaten**

Äquivalenztest für Zustände

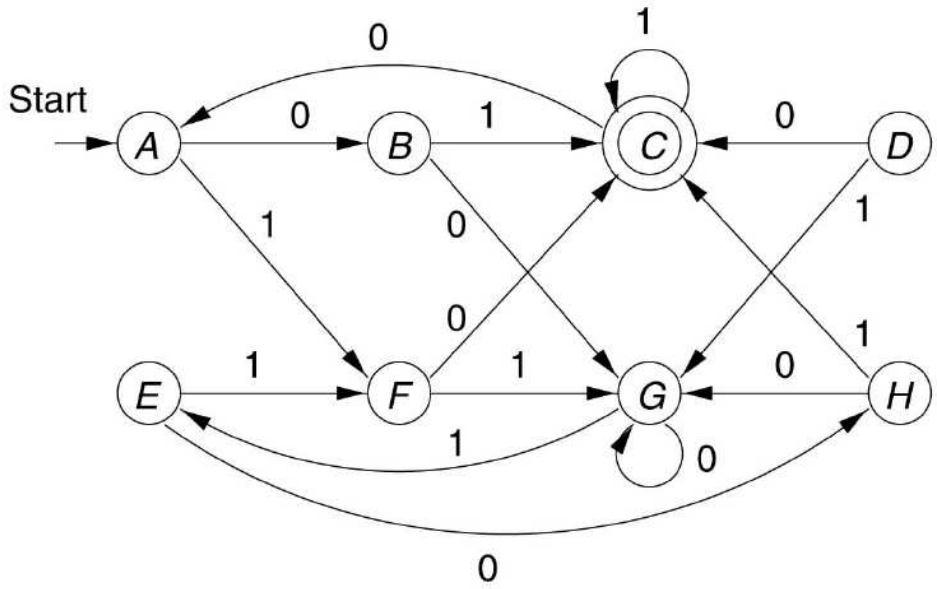
- **Äquivalenz der Zustände p und q ($p \cong q$)**
  - Für alle Worte $w \in \Sigma^*$ gilt $\hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F$
  - Die Worte müssen nicht zum gleichen Zustand führen
- **Positives Prüfverfahren schwierig**
  - Man muß alle Worte überprüfen, die von einem Zustand ausgehen
  - Man kann sich auf Worte der maximalen Länge $|Q|$ beschränken
  - Besser: Nichtäquivalente (unterscheidbare) Zustände identifizieren
- **Table-Filling Algorithmus**

  Markiere Unterscheidbarkeit von Zuständen in Tabelle
  - Start: $p \ncong q$, falls $p \in F$ und $q \notin F$
  - Iteration: $p \ncong q$, falls $\delta(p, a) \ncong \delta(q, a)$ für ein $a \in \Sigma$

  In jeder Iteration werden nur noch ungeklärte Paare überprüft

  Nach maximal $|Q|$ Iterationen sind alle Unterschiede bestimmt

Äquivalenztest am Beispiel



	A	B	C	D	E	F	G	H
A	\	×	×	×		×	×	×
B	×	\	×	×	×	×	×	
C	×	×	\	×	×	×	×	×
D	×	×	×	\	×		×	×
E		×	×	×	\	×	×	×
F	×	×	×		×	\	×	×
G	×	×	×	×	×	×	\	×
H	×		×	×	×	×	×	\

Tabelle der Unterschiede

1. Unterscheide akzeptierende Zustände von anderen

2a. Eingabesymbol 0: Nur D und F führen zu akzeptierenden Zuständen

2b. Eingabesymbol 1: Nur B und H führen zu akzeptierenden Zuständen

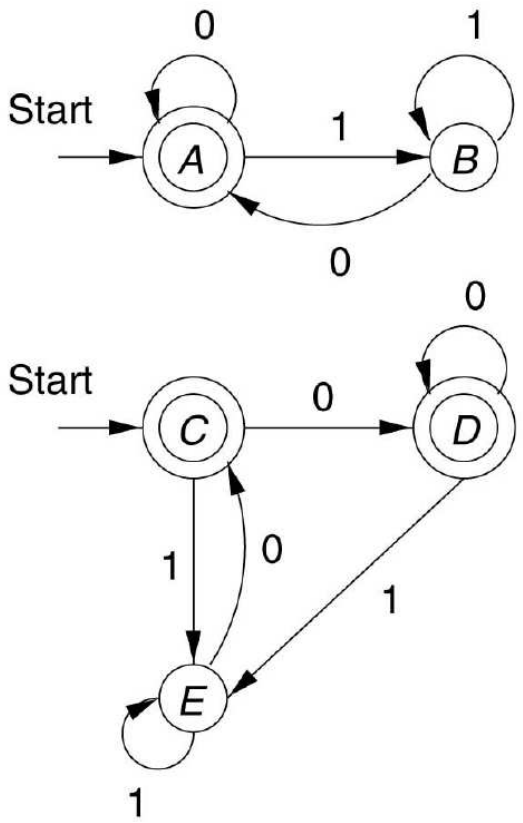
3. Überprüfe Nachfolger von {A,E}, {A,G}, {B,H}, {D,F} und {E,G}.

4. Überprüfung von {A,E}, {B,H} und {D,F} gibt keine Unterschiede

Äquivalenklassen sind {A,E}, {B,H}, {D,F}, {C} und {G}

Äquivalenztest für Sprachen

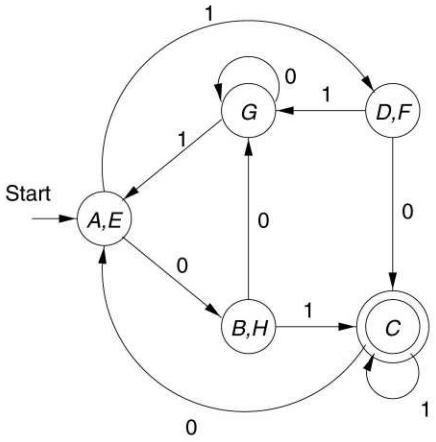
- **Prüfverfahren**
  - Standardisiere Beschreibungsform in zwei disjunkte DEAs A_1 und A_2 um
  - Vereinige Automaten zu $A = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta_1 \cup \delta_2, q', F_1 \cup F_2)$
  - Bilde Äquivalenzklassen von A und teste ob $q_{0,1}$ und $q_{0,2}$ äquivalent sind
- **Zwei DEAs für $L(\epsilon + (0+1)^*0))$**
  - Äquivalenklassen sind {A,C,D} und {B,E}
  - **Da A und C äquivalent sind,**
    sind die Automaten äquivalent



Konstruiere äquivalenten DEA mit minimaler Menge von Zuständen

- **Entferne überflüssige Zustände**
  - q ist überflüssig, wenn $\hat{\delta}(q_0, w) \neq q$ für alle Worte $w \in \Sigma^*$
  - Reduziere Q zu Menge der erreichbaren Zustände (Verfahren auf Folie 11)
- **Fasse äquivalente Zustände zusammen**
  - Bestimme Menge der Äquivalenzklassen von Q
  - Setze Q' als Menge der Äquivalenzklassen von Q
  - Setze $\delta'(S, a) = \bigcup_{a \in S} \delta(q, a)$

    Wohldefiniert, da alle Nachfolger äquivalenter Zustände äquivalent
- **Minimalversion des Beispielautomaten:**



- **Resultierender Automat ist minimal**

Grenzen regulärer Sprachen

Wie zeigt man, daß eine Sprache L nicht regulär ist?

- **Direkter Nachweis**
  - Zeige, daß kein endlicher Automat genau die Worte von L erkennt
  - Sprache muß unendlich sein und komplizierte Struktur haben
  - Technisches Hilfsmittel: Pumping Lemma
- **Verwendung der Abschlußeigenschaften**
  - Zeige daß Regularität von L dazu führen würde, daß eine als nichtregulär bekannte Sprache regulär sein müsste
  - Häufige Technik: (inverse) Homomorphismen

Das Pumping Lemma für reguläre Sprachen

- **Warum ist $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär?**
  - Ein DFA muß alle Nullen beim Abarbeiten zählen und dann vergleichen
  - Für $n > |Q|$ muß ein Zustand von A doppelt benutzt worden sein
  - Eine δ-Schleife mit k Zuständen bedeutet, daß A auch $0^{n+k}1^n$ akzeptiert

- **Allgemeine Version: Pumping Lemma**

  Für jede reguläre Sprache $L \in \mathcal{L}_3$ gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so daß jedes Wort $w \in L$ mit Länge $|w| \geq n$ zerlegt werden kann in $w = x\,y\,z$ mit den Eigenschaften

  (1) $y \neq \epsilon$,

  (2) $|x\,y| \leq n$ und

  (3) für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $x\,y^k\,z \in L$

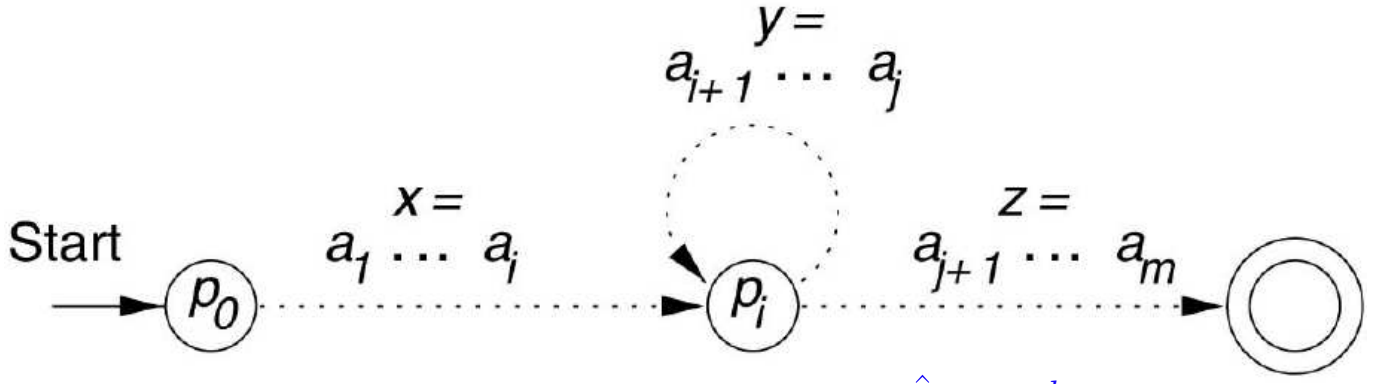
- **Aussage ist wechselseitig konstruktiv**
  - Die Zahl n kann zu jeder regulären Sprache L bestimmt werden
  - Die Zerlegung $w = x\,y\,z$ kann zu jedem Wort $w \in L$ bestimmt werden

Beweis des Pumping Lemmas

Für jede Sprache $L \in \mathcal{L}_3$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß jedes $w \in L$ mit $|w| \geq n$ zerlegbar ist in $w = x\,y\,z$ mit den Eigenschaften

(1) $y \neq \epsilon$, (2) $|x\,y| \leq n$ und (3) für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $x\,y^k\,z \in L$

- **Beweis mit Automaten**
  - Sei L regulär und $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DEA mit $L = L(A)$
  - Wähle $n = |Q|$. Betrachte $w = a_1..a_m$ mit $|w| \geq n$ und $p_i := \hat{\delta}(q_0, a_1..a_i)$
  - Dann gibt es i, j mit $0 \leq i < j \leq n$ und $p_i = p_j$ (Schubfachprinzip)
  - Zerlege w in $w = x\,y\,z$ mit $x = a_1..a_i$, $y = a_{i+1}..a_j$ und $z = a_{j+1}..a_m$



  - Per Konstruktion gilt $y \neq \epsilon$, $|x\,y| \leq n$ und $\hat{\delta}(p_i, y^k) = p_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$
  - Also $\hat{\delta}(q_0, x\,y^k\,z) = \hat{\delta}(p_i, y^k\,z) = \hat{\delta}(p_i, y\,z) = \hat{\delta}(q_0, x\,y\,z) = \hat{\delta}(q_0, w) \in F$

Anwendungen des Pumping Lemmas

- **$L_1 = \{0^m 1^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär**
  - Wir nehmen an L_1 sei regulär
  - Wähle n entsprechend des Pumping Lemmas und $m{>}n$
  - Dann kann $w = 0^m 1^m$ zerlegt werden in $x{=}0^i$, $y{=}0^j$ $z{=}0^{m-i-j}1^m$
    mit $j{\neq}0$ und $i{+}j{\leq}n$ und $x\,y^k\,z \in L_1$ für alle $k \in \mathbb{N}$
  - Aber für $k{=}0$ ist $x\,y^0\,z = 0^{m-j}1^m \notin L_1$
  - Dies ist ein Widerspruch, also ist L_1 nicht regulär

- **$L_2 = \{w \in \{1\}^* \mid |w|$ ist Primzahl$\} \notin \mathcal{L}_3$**
  - Wir nehmen an L_2 sei regulär
  - Wähle n entsprechend des Pumping Lemmas und eine Primzahl $p{>}n+1$
  - Dann kann w zerlegt werden in $x{=}1^i$, $y{=}1^j$ $z{=}1^{p-i-j}$
    mit $j{\neq}0$ und $i{+}j{\leq}n$ und $x\,y^k\,z \in L_2$ für alle $k \in \mathbb{N}$
  - Aber für $k{=}p{-}j$ ist $|x\,y^k\,z| = i + m(p{-}j) + p{-}i{-}j = (m{+}1)(p{-}j)$
    Da dies keine Primzahl ist ($m{+}1{\geq}2$, $p{-}j{\geq}2$), ist $x\,y^k\,z \notin L_2$
  - Dies ist ein Widerspruch, also ist L_2 nicht regulär

Nachweis von $L \notin \mathcal{L}_3$ mit Abschlusseigenschaften

- **Anwendung des Pumping Lemmas ist oft mühsam**
  - Beweis für $\boldsymbol{L_3 = \{(^m)^m \mid m \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{L}_3}$ identisch mit dem von L_1
  - Beweis für $\boldsymbol{L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w)\} \notin \mathcal{L}_3}$ ähnlich ($\boldsymbol{\#_1(w)}$ ist die Anzahl der Einsen in w)

- **Verwende Umkehrung der Abschlußeigenschaften**

$$\overline{L} \notin \mathcal{L}_3 \Rightarrow L \notin \mathcal{L}_3 \qquad L^R \notin \mathcal{L}_3 \Rightarrow L \notin \mathcal{L}_3$$

$$h(L) \notin \mathcal{L}_3 \Rightarrow L \notin \mathcal{L}_3 \qquad h^{-1}(L) \notin \mathcal{L}_3 \Rightarrow L \notin \mathcal{L}_3$$

$$L \cup L' \notin \mathcal{L}_3 \wedge L' \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L \notin \mathcal{L}_3 \qquad L \cap L' \notin \mathcal{L}_3 \wedge L' \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L \notin \mathcal{L}_3$$

$$L \circ L' \notin \mathcal{L}_3 \wedge L' \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L \notin \mathcal{L}_3 \qquad L' \circ L \notin \mathcal{L}_3 \wedge L' \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L \notin \mathcal{L}_3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

- **Anwendungsbeispiele**

  $\boldsymbol{L_3 \notin \mathcal{L}_3}$: Wähle Homomorphismus h:$\{(,)\} \to \{0,1\}$ mit $h(() = 0$, $h()) = 1$

  Dann ist $h(L_3) = \{0^m 1^m \mid m \in \mathbb{N}\} = L_1 \notin \mathcal{L}_3$

  $\boldsymbol{L_4 \notin \mathcal{L}_3}$: Es gilt $L_4 \cap L(0^*1^*) = L_1 \notin \mathcal{L}_3$

  DEAs können korrekte Klammerausdrücke nicht erkennen!

Eigenschaften regulärer Sprachen im Rückblick

- **Abschlußeigenschaften**
  - Operationen $\cap$, $\cap$, $\overline{\ }$, -, ^{R}, $\circ$, *, h, h^{-1} erhalten Regularität von Sprachen
  - Verwendbar zum Nachweis von Regularität oder zur Widerlegung
- **Automatische Prüfungen**
  - Man kann testen ob eine reguläre Sprache leer ist
  - Man kann testen ob ein Wort zu einer regulären Sprache gehört
  - Man kann testen ob zwei reguläre Sprachen gleich sind
- **Minimierung von Automaten**
  - Ein Automat kann minimiert werden indem man äquivalente Zustände zusammenlegt und unerreichbare Zustände entfernt
- **Pumping Lemma**
  - Wiederholt man einen bestimmten Teil ausreichend großer Worte einer regulären Sprache beliebig oft, so erhält man immer ein Wort der Sprache
  - Verwendbar zur Widerlegung von Regularität