# Theoretische Informatik I

## Einheit 3

## Kontextfreie Sprachen

1. Kontextfreie Grammatiken
2. Pushdown Automaten
3. Eigenschaften kontextfreier Sprachen

# Theoretische Informatik I

## Einheit 3.1

## Kontextfreie Grammatiken

1. Grammatiken und Ableitungen
2. Ableitungsbäume
3. Mehrdeutigkeiten

# Grammatiken für Programmiersprachen

- **Grammatiken beschreiben Aufbau von Sprachen**
  - Produktionsregeln generieren nichtdeterministisch alle Worte der Sprache
  - Grammatiken können sehr komplexe Sprachen beschreiben
  - Chomsky Hierarchie klassifiziert Grammatiken nach “Freiheitsgraden”
- **Typ-3 Grammatiken sind einfach & effizient**
  - Umwandelbar in endlichen Automaten und reguläre Ausdrücke
  - Erkennung von Worten der Sprache in “Echtzeit”
- **Programmiersprachen können nicht regulär sein**
  - Korrekte Klammerausdrücke / Schachtelungen sind nicht regulär
  - Die meisten Programmstrukturen enthalten Schachtelungen
    - Blöcke, if-then-else, arithmetische Ausdrücke, ...

$\Downarrow$

**Syntaxanalyse und Compilation von Programmiersprachen braucht kontextfreie Grammatiken**

## Anwendungen kontextfreier Sprachen

**Alle bedeutenden Computersprachen sind kontextfrei**

- **Programmiersprachen**
  - Compiler kann kontextfreie Grammatiken effizient verarbeiten
  - Parser kann aus kontextfreier Grammatik automatisch erzeugt werden
    - Standard Unix tool YACC unterstützt schnellen Compilerentwurf
- **Markup Sprachen**
  - HTML: Formattierung von Dokumenten mit Links zu Programmaufrufen
  - XML: Einheitliche Beschreibung der Semantik von Dokumenten

Beide Sprachen erfordern die Mächtigkeit von kontextfreie Grammatiken

Mehr in HMU §5.3

# Kontextfreie Grammatiken – Grundbegriffe

- **Eine kontextfreie Grammatik (kfG) ist ein 4-Tupel $\boldsymbol{G = (V, T, P, S)}$ mit**
  - $T$ endliches **Terminalalphabet**
  - $V$ endliches **Hilfsalphabet** mit $V \cap T = \emptyset$
  - $P \subseteq V \times \Gamma^*$ endliche Menge der **Produktionen** (wobei $\Gamma = V \cup T$)
  - $S \in V$ **Startsymbol**

  Die übliche Schreibweise für Produktionen $(A, r) \in P$ ist $\boldsymbol{A \longrightarrow r}$

  Eine kompakte Notation für $A \rightarrow r_1, A \rightarrow r_2 .. A \rightarrow r_n$ ist $\boldsymbol{A \longrightarrow r_1 | r_2 | .. | r_n}$

- **Ableitungbarkeit in $\boldsymbol{G}$**
  - $\boldsymbol{w \longrightarrow z} \;\equiv\; \exists x, y \in \Gamma^*.\ \exists A \rightarrow r \in P.\ w{=}x\,A\,y \;\wedge\; z{=}x\,r\,y$
  - $\boldsymbol{w \xrightarrow{*} z} \;\equiv\; \exists n \in \mathbb{N}.\ w \xrightarrow{n} z$

    wobei $\boldsymbol{w \xrightarrow{0} z} \;\equiv\; w{=}z$ und $\boldsymbol{w \xrightarrow{n+1} z} \;\equiv\; \exists u \in \Gamma^*.\ w \longrightarrow u \;\wedge\; u \xrightarrow{n} z$

- **Von $\boldsymbol{G}$ erzeugte Sprache:**

$$\boldsymbol{L(G)} \;\equiv\; \{w \in T^* \mid S \xrightarrow{*} w\}$$

# Grammatik für geschachtelte Klammerausdrücke

$G_4 = (\ \{S\},\ \{(,)\},\ \{S\to(S), S\to\epsilon\},\ S\ )$

- **Zeige** $L(G_4) = \{\,(^k)^k \mid k\in\mathbb{N}\}$

- **Beweise durch Induktion über Länge der Ableitung**
  – $\forall k\in\mathbb{N}.\ \forall w\in\{(,)\}^*.\ S \xrightarrow{k+1} w\ \Leftrightarrow\ w = (^k)^k$

**Basisfall**

– $S \xrightarrow{1} w\ \Leftrightarrow\ (S\to w)\in P\ \Leftrightarrow\ w=\epsilon\ \Leftrightarrow\ w = (^0)^0$ $\checkmark$

**Induktionsschritt**

– Es gelte $\forall v\in\{(,)\}^*.\ S\xrightarrow{k+1} v\ \Leftrightarrow\ v = (^k)^k$

– $S \xrightarrow{k+2} w$

$$\begin{aligned}
S \xrightarrow{k+2} w &\Leftrightarrow S\to(S) \xrightarrow{k+1} w\\
&\Leftrightarrow \exists v\in\{(,)\}^*.\ \ S\xrightarrow{k+1} v \wedge w = (v)\\
&\Leftrightarrow \exists v\in\{(,)\}^*.\ v = (^k)^k \wedge w = (v) && \text{(Annahme)}\\
&\Leftrightarrow w = (^{k+1})^{k+1} && \checkmark
\end{aligned}$$

$$\boxed{\{\,(^k)^k \mid k\in\mathbb{N}\}\ \in\ \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_3}$$

# Kontextfreie Grammatik für Palindrome

$$L(G_5) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$$

- $G_5 = (\{S\},\ \{0,1\},\ P,\ S)$ **mit**

  $P = \{S \rightarrow \epsilon,\ S \rightarrow 0,\ S \rightarrow 1,\ S \rightarrow 0S0,\ S \rightarrow 1S1\}$

- **Beweise durch Induktion über Länge der Ableitung**
  - $\forall k \in \mathbb{N}.\ \forall w \in \{0,1\}^*.\ S \xrightarrow{k+1} w \ \Leftrightarrow\ w = w^R \wedge |w| \in \{2k, 2k+1\}$

**Basisfall**

– $S \xrightarrow{1} w \ \Leftrightarrow\ (S \rightarrow w) \in P \ \Leftrightarrow\ w \in \{0, 1, \epsilon\} \ \Leftrightarrow\ w = w^R \wedge |w| \in \{0,1\}$ $\checkmark$

**Induktionsschritt**

– Es gelte $\forall v \in \{0,1\}^*.\ S \xrightarrow{k+1} v \ \Leftrightarrow\ v = v^R \wedge |v| \in \{2k, 2k+1\}$

– $S \xrightarrow{k+2} w \ \Leftrightarrow\ S \rightarrow 0S0 \xrightarrow{k+1} w \ \vee\ S \rightarrow 1S1 \xrightarrow{k+1} w$

$\Leftrightarrow\ \exists v \in \{0,1\}^*.\ \ S \xrightarrow{k+1} v \ \wedge\ w = 0v0 \ \vee\ w = 1v1$

$\Leftrightarrow\ \exists v \in \{0,1\}^*.\ v = v^R \wedge |v| \in \{2k, 2k+1\} \ \wedge\ w = 0v0 \ \vee\ w = 1v1$

$\Leftrightarrow\ w = w^R \wedge |w| \in \{2k+2, 2k+3\}$ $\checkmark$

# Grammatik für Arithmetische Ausdrücke

- **Ausdrücke über Operatoren + und $*$**
  - Bezeichner (***I***dentifier): Buchstabe gefolgt von Buchstaben/Ziffern
    - Buchstaben ***a***, ***b***, Ziffern **0**, **1**
  - Ausdrücke (***E***xpressions): Schachtelung mit $+$, $*$ und Klammern

- $\boldsymbol{G_6 = (\{E, I\},\ \{a, b, 0, 1, +, *, (, )\},\ P,\ E)}$

  **mit** $\boldsymbol{P = \{\ E \rightarrow I \mid E{+}E \mid E{*}E \mid (E)}$

  $$\boldsymbol{I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1\ \}}$$

## Strategie für Auswahl von Produktionen

- **Beliebige Ableitung**

$$E \longrightarrow E{*}E \longrightarrow I{*}E \longrightarrow I{*}(E)$$
$$\longrightarrow I{*}(E{+}E) \longrightarrow I{*}(I{+}E) \longrightarrow I{*}(I{+}I) \longrightarrow I{*}(a{+}I)$$
$$\longrightarrow I{*}(a{+}I0) \longrightarrow I{*}(a{+}I00) \longrightarrow I{*}(a{+}b00) \longrightarrow a{*}(a{+}b00)$$

- **Linksseitige Ableitung $w \longrightarrow_L z$**
  – In $w$ wird die am weitesten links stehende Variable ersetzt

$$E \longrightarrow_L E{*}E \longrightarrow_L I{*}E \longrightarrow_L a{*}E \longrightarrow_L a{*}(E)$$
$$\longrightarrow_L a{*}(E{+}E) \longrightarrow_L a{*}(I{+}E) \longrightarrow_L a{*}(a{+}E) \longrightarrow_L a{*}(a{+}I)$$
$$\longrightarrow_L a{*}(a{+}I0) \longrightarrow_L a{*}(a{+}I00) \longrightarrow_L a{*}(a{+}b00)$$

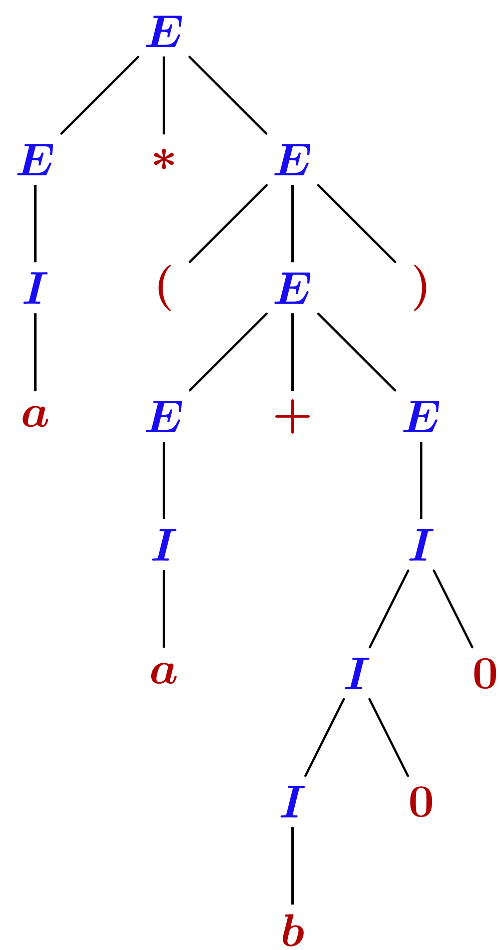
- **Rechtsseitige Ableitung $w \longrightarrow_R z$**
  – In $w$ wird die am weitesten rechts stehende Variable ersetzt

$$E \longrightarrow_R E{*}E \longrightarrow_R E{*}(E) \longrightarrow_R E{*}(E{+}E) \longrightarrow_R E{*}(E{+}I)$$
$$\longrightarrow_R E{*}(E{+}I0) \longrightarrow_R E{*}(E{+}I00) \longrightarrow_R E{*}(E{+}b00)$$
$$\longrightarrow_R E{*}(I{+}b00) \longrightarrow_R E{*}(a{+}b00) \longrightarrow_R I{*}(a{+}b00) \longrightarrow_R a{*}(a{+}b00)$$

# Ableitungsbäume (Parsebäume)

## Baumdarstellung von Ableitungen

- **Geordneter markierter Baum**
  - Innere Knoten mit Variablen $A \in V$ markiert
  - Wurzel markiert mit Startsymbol
  - Blätter mit Terminalsymbolen $a \in T$ oder mit $\epsilon$ markiert
  - Hat ein innerer Knoten Markierung $A$ und Nachfolger mit Markierungen $v_1 ... v_n$ so ist $A \to v_1 ... v_n \in P$



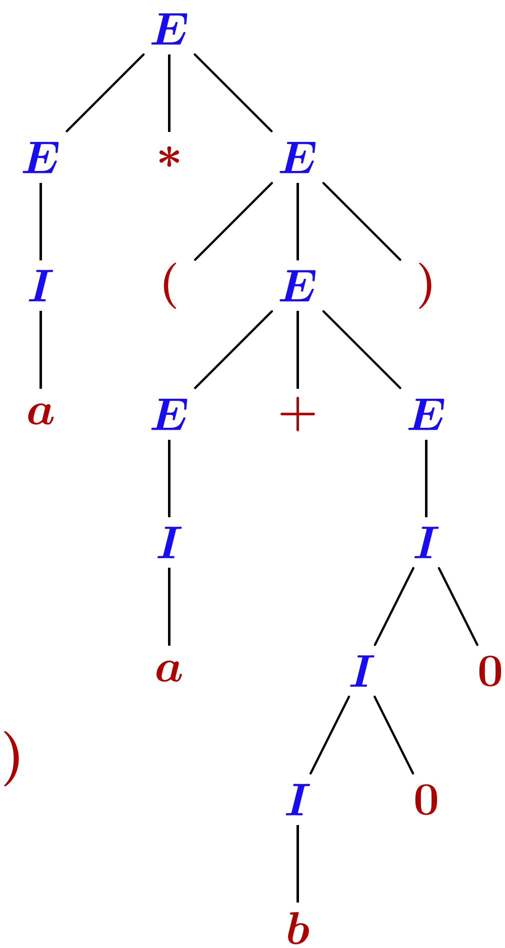

- **Exkurs: Notation für Bäume**
  - Baum: Sammlungen von Knoten mit Nachfolgerrelation
  - Nachfolger sind geordnet
  - Ein Knoten hat maximal einen Vorgänger
  - Wurzel: Knoten ohne Vorgänger
  - Blatt / Innerer Knoten: Knoten ohne/mit Nachfolger
  - Nachkommen: transitive Hülle der Nachfolgerrelation

# Ableitungsbäume repräsentieren Ableitungen

- **Blätter repräsentieren Terminalworte**
  - Auslesen durch Tiefensuche von links nach rechts
  - $a * (a + b00)$
- **Baum repräsentiert Ableitungen**
  - Rekursive Erzeugung beginnend mit Wurzel
  - Vorrang für tiefe linke Knoten ergibt Linksableitung

$$
\begin{aligned}
E &\longrightarrow_L E{*}E \longrightarrow_L I{*}E \longrightarrow_L a{*}E \longrightarrow_L a{*}(E)\\
&\longrightarrow_L a{*}(E{+}E) \longrightarrow_L a{*}(I{+}E) \longrightarrow_L a{*}(a{+}E)\\
&\longrightarrow_L a{*}(a{+}I) \longrightarrow_L a{*}(a{+}I0) \longrightarrow_L a{*}(a{+}I00)\\
&\longrightarrow_L a{*}(a{+}b00)
\end{aligned}
$$

  - Vorrang für tiefe rechte Knoten ergibt Rechtssableitung



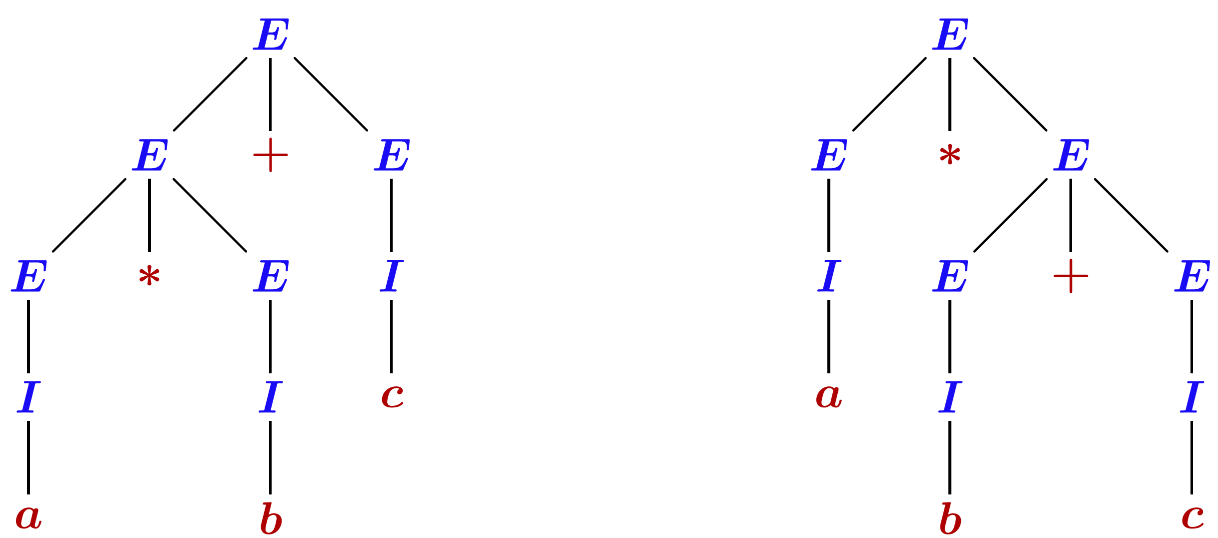

**$S \xrightarrow{*} w \;\Leftrightarrow\;$ es gibt einen Ableitungsbaum mit Blattmarkierung $w$**

$\Rightarrow$: Konstruiere Baum induktiv aus Linksableitung von $w$

$\Leftarrow$: Extrahiere Linksableitung von $w$ induktiv aus Baum

HMU §5.2

# Wann ist der Ableitungsbaum eindeutig?



- $a * b + c$ **hat zwei Ableitungen in $G_6$**

$$E \longrightarrow E{+}E \longrightarrow E{*}E{+}E \longrightarrow I{*}E{+}E \longrightarrow a{*}E{+}E \longrightarrow a{*}I{+}E$$
$$\longrightarrow a{*}b{+}E \longrightarrow a{*}b{+}I \longrightarrow a{*}b{+}c$$

$$E \longrightarrow E{*}E \longrightarrow I{*}E \longrightarrow a{*}E \longrightarrow a{*}E{+}E \longrightarrow a{*}I{+}E$$
$$\longrightarrow a{*}b{+}E \longrightarrow a{*}b{+}I \longrightarrow a{*}b{+}c$$

**Beide Ableitungen sind Linksableitungen**

- **Grammatik $G_6$ ist mehrdeutig**
  – Worte der Sprache können nicht eindeutig analysiert werden

# Mehrdeutigkeit

- **Eindeutige Grammatik $G = (V, T, P, S)$**
  - Jedes Wort $w \in L(G)$ hat genau einen Ableitungsbaum
  - Andernfalls ist $G$ **mehrdeutig**
    (ein $w \in L(G)$ hat mindestens zwei verschiedene Ableitungsbäume)
  - $G_6$ ist mehrdeutig
- **Eindeutige Sprache $L$**
  - Es gibt eine eindeutige Grammatik $G$ mit $L = L(G)$
  - Andernfalls ist $L$ **inhärent mehrdeutig**
    (eine eindeutige Grammatik kann nicht angegeben werden)
  - Die Sprache von $G_6$ ist eindeutig
  - $\{0^i 1^j 2^k \mid i{=}j \vee j{=}k\}$ ist inhärent mehrdeutig $\mapsto$ Buch von Wegener

**Programmiersprachen mussen eindeutig sein**

# Auflösung von Mehrdeutigkeiten

- $G_6 = (\{E, I\},\ \{a, b, 0, 1, +, *, (, )\},\ P,\ E)$
  mit $P = \{\ E \to I \mid E{+}E \mid E{*}E \mid (E),\ \ I \to a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1\ \}$
  – $G_6$ beinhaltet keine Konventionen für $*$ und $+$
    · $*$ bindet stärker als $+$
    · $*$ und $+$ werden als linkssassoziativ angesehen
    · Alle anderen Lesarten benötigen Klammern

- **Prioritätsregeln können Eindeutigkeit erzeugen**
  – Niedrigste Prioriät $+$ steht linkssassoziativ außen $\mapsto$ ***T***erme
  – Höhere Prioriät $*$ steht linkssassoziativ innen $\mapsto$ ***F***aktoren
  – Faktoren können Bezeichner oder Ausdrücke in Klammern sein

  $G_6' = (\{E, T, F, I\},\ \{a, b, 0, 1, +, *, (, )\},\ P',\ E)$
  mit $P' = \{\ E \to T \mid E{+}T,\ \ T \to F \mid T{*}F,\ \ F \to I \mid (E)$
  $I \to a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1\ \}$

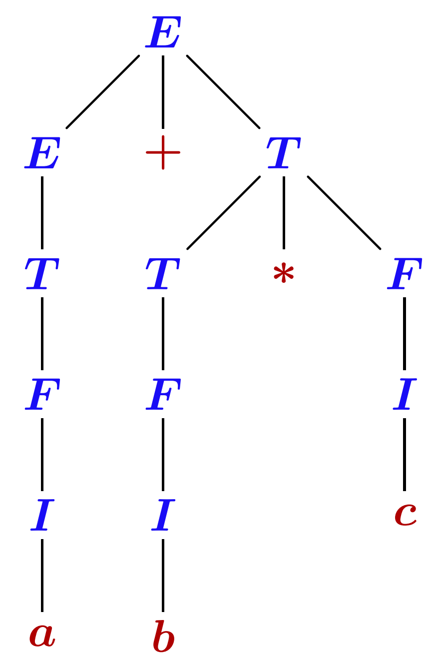
  **$G_6'$ ist äquivalent zu $G_6$ und eindeutig**

# EINDEUTIGKEIT VON $G'_6$

$$\boldsymbol{P' = \{\ E \to T \mid E{+}T, \quad T \to F \mid T{*}F, \quad F \to I \mid (E)}$$
$$\boldsymbol{I \to a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1\ \}}$$

- **Jeder Term muß aus einer Faktorenfolge bestehen**
  - Faktorenfolge muß von rechts nach links erzeugt werden
  - Faktoren sind nur Bezeichner oder Ausdrücke in Klammern
  - Es gibt nur einen Parsebaum für $f_1 * f_2 * \ldots * f_n$

- **Jeder Ausdruck muß aus einer Termfolge bestehen**
  - Termefolge muß von rechts nach links erzeugt werden
  - Terme haben keine Ausdrücke als direkte Teile
  - Es gibt nur einen Parsebaum für $t_1 + t_2 + \ldots + t_k$




Einziger Ableitungsbaum für $a * b + c$