Theoretische Informatik I

Einheit 3

Kontextfreie Sprachen

1. Kontextfreie Grammatiken
2. Pushdown Automaten
3. Eigenschaften kontextfreier Sprachen

Theoretische Informatik I

Einheit 3.1

Kontextfreie Grammatiken

Grammatiken für Programmiersprachen

- **Grammatiken beschreiben Aufbau von Sprachen**
  - Produktionsregeln generieren nichtdeterministisch alle Worte der Sprache
  - Grammatiken können sehr komplexe Sprachen beschreiben
  - Chomsky Hierarchie klassifiziert Grammatiken nach “Freiheitsgraden”
- **Typ-3 Grammatiken sind einfach & effizient**
  - Umwandelbar in endlichen Automaten und reguläre Ausdrücke
  - Erkennung von Worten der Sprache in “Echtzeit”
- **Programmiersprachen können nicht regulär sein**
  - Korrekte Klammerausdrücke / Schachtelungen sind nicht regulär
  - Die meisten Programmstrukturen enthalten Schachtelungen
    - Blöcke, if-then-else, arithmetische Ausdrücke, ...

$$\Downarrow$$

Syntaxanalyse und Compilation von Programmiersprachen braucht kontextfreie Grammatiken

Alle bedeutenden Computersprachen sind kontextfrei

- **Programmiersprachen**
  - Compiler kann kontextfreie Grammatiken effizient verarbeiten
  - Parser kann aus kontextfreier Grammatik automatisch erzeugt werden
    - Standard Unix tool YACC unterstützt schnellen Compilerentwurf
- **Markup Sprachen**
  - HTML: Formattierung von Dokumenten mit Links zu Programmaufrufen
  - XML: Einheitliche Beschreibung der Semantik von Dokumenten

  Beide Sprachen erfordern die Mächtigkeit von kontextfreie Grammatiken

Mehr in HMU §5.3

Kontextfreie Grammatiken – Grundbegriffe

- **Eine kontextfreie Grammatik (kfG) ist ein 4-Tupel $G = (V, T, P, S)$ mit**
  - T endliches **Terminalalphabet**
  - V endliches **Hilfsalphabet** mit $V \cap T = \emptyset$
  - $P \subseteq V \times \Gamma^*$ endliche Menge der **Produktionen** (wobei $\Gamma = V \cup T$)
  - $S \in V$ **Startsymbol**

  Die übliche Schreibweise für Produktionen $(A, r) \in P$ ist $\boldsymbol{A \to r}$

  Eine kompakte Notation für $A \to r_1, A \to r_2 .. A \to r_n$ ist $\boldsymbol{A \to r_1 | r_2 | .. | r_n}$

- **Ableitungbarkeit in G**
  - $w \longrightarrow z \;\equiv\; \exists x, y \in \Gamma^*.\ \exists A \to r \in P.\ w = x\,A\,y \;\wedge\; z = x\,r\,y$
  - $w \xrightarrow{*} z \;\equiv\; \exists n \in \mathbb{N}.\ w \xrightarrow{n} z$

    wobei $w \xrightarrow{0} z \;\equiv\; w = z$ und $w \xrightarrow{n+1} z \;\equiv\; \exists u \in \Gamma^*.\ w \longrightarrow u \;\wedge\; u \xrightarrow{n} z$

- **Von G erzeugte Sprache:**

$$L(G) \;\equiv\; \{w \in T^* \mid S \xrightarrow{*} w\}$$

Grammatik für geschachtelte Klammerausdrücke

$$G_4 = (\ \{S\},\ \{(,)\},\ \{S{\to}(S),S{\to}\epsilon\},\ S\ )$$

- **Zeige** $L(G_4) = \{(^k)^k \mid k \in \mathbb{N}\}$

- **Beweise durch Induktion über Länge der Ableitung**
  - $\forall k \in \mathbb{N}.\ \forall w \in \{(,)\}^*.\ S \xrightarrow{k+1} w \ \Leftrightarrow\ w = (^k)^k$

Basisfall

– $S \xrightarrow{1} w \ \Leftrightarrow\ (S{\to}w) \in P \ \Leftrightarrow\ w = \epsilon \ \Leftrightarrow\ w = (^0)^0$ $\surd$

Induktionsschritt

– Es gelte $\forall v \in \{(,)\}^*.\ S \xrightarrow{k+1} v \ \Leftrightarrow\ v = (^k)^k$

– $$\begin{aligned} S \xrightarrow{k+2} w \ &\Leftrightarrow\ S{\to}(S) \xrightarrow{k+1} w \\ &\Leftrightarrow\ \exists v \in \{(,)\}^*.\ \ S \xrightarrow{k+1} v \ \wedge\ w = (v) \\ &\Leftrightarrow\ \exists v \in \{(,)\}^*.\ v = (^k)^k \ \wedge\ w = (v) && \text{(Annahme)} \\ &\Leftrightarrow\ w = (^{k+1})^{k+1} && \surd \end{aligned}$$

$$\boxed{\{(^k)^k \mid k \in \mathbb{N}\} \ \in\ \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_3}$$

Kontextfreie Grammatik für Palindrome

$$L(G_5) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$$

- $G_5 = (\{S\},\ \{0,1\},\ P,\ S)$ **mit**
  $P = \{S \to \epsilon,\ S \to 0,\ S \to 1,\ S \to 0S0,\ S \to 1S1\}$

- **Beweise durch Induktion über Länge der Ableitung**
  - $\forall k \in \mathbb{N}.\ \forall w \in \{0,1\}^*.\ S \xrightarrow{k+1} w \Leftrightarrow w = w^R \wedge |w| \in \{2k, 2k+1\}$

  Basisfall
  - $S \xrightarrow{1} w \Leftrightarrow (S \to w) \in P \Leftrightarrow w \in \{0, 1, \epsilon\} \Leftrightarrow w = w^R \wedge |w| \in \{0, 1\}$ $\checkmark$

  Induktionsschritt
  - Es gelte $\forall v \in \{0,1\}^*.\ S \xrightarrow{k+1} v \Leftrightarrow v = v^R \wedge |v| \in \{2k, 2k+1\}$
  - $S \xrightarrow{k+2} w \Leftrightarrow S \to 0S0 \xrightarrow{k+1} w \vee S \to 1S1 \xrightarrow{k+1} w$
    $\Leftrightarrow \exists v \in \{0,1\}^*.\ S \xrightarrow{k+1} v \wedge w = 0v0 \vee w = 1v1$
    $\Leftrightarrow \exists v \in \{0,1\}^*.\ v = v^R \wedge |v| \in \{2k, 2k+1\} \wedge w = 0v0 \vee w = 1v1$
    $\Leftrightarrow w = w^R \wedge |w| \in \{2k+2, 2k+3\}$ $\checkmark$

Grammatik für Arithmetische Ausdrücke

- **Ausdrücke über Operatoren $+$ und $*$**
  - Bezeichner (***I***dentifier): Buchstabe gefolgt von Buchstaben/Ziffern
    - Buchstaben $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, Ziffern $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$
  - Ausdrücke (***E***xpressions): Schachtelung mit $+$, $*$ und Klammern
- $\boldsymbol{G_6 = (\{E, I\},\ \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\},\ P,\ E)}$

  mit $\boldsymbol{P = \{\ E \to I \mid E{+}E \mid E{*}E \mid (E)}$

  $\boldsymbol{I \to a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1\ \}}$

Links- und rechtsseitige Ableitungen

Strategie für Auswahl von Produktionen

- **Beliebige Ableitung**

$$E \longrightarrow E{*}E \longrightarrow I{*}E \longrightarrow I{*}(E)$$
$$\longrightarrow I{*}(E{+}E) \longrightarrow I{*}(I{+}E) \longrightarrow I{*}(I{+}I) \longrightarrow I{*}(a{+}I)$$
$$\longrightarrow I{*}(a{+}I0) \longrightarrow I{*}(a{+}I00) \longrightarrow I{*}(a{+}b00) \longrightarrow a{*}(a{+}b00)$$

- **Linksseitige Ableitung $w \longrightarrow_L z$**
  – In w wird die am weitesten links stehende Variable ersetzt

$$E \longrightarrow_L E{*}E \longrightarrow_L I{*}E \longrightarrow_L a{*}E \longrightarrow_L a{*}(E)$$
$$\longrightarrow_L a{*}(E{+}E) \longrightarrow_L a{*}(I{+}E) \longrightarrow_L a{*}(a{+}E) \longrightarrow_L a{*}(a{+}I)$$
$$\longrightarrow_L a{*}(a{+}I0) \longrightarrow_L a{*}(a{+}I00) \longrightarrow_L a{*}(a{+}b00)$$

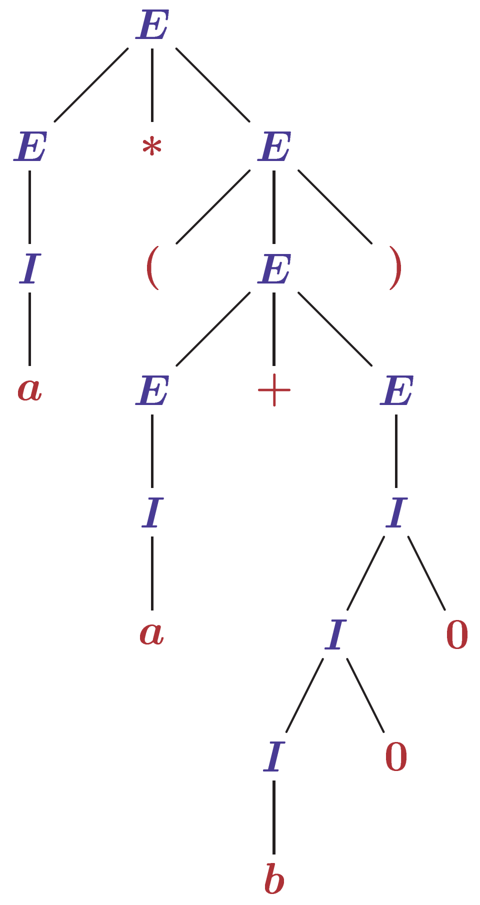
- **Rechtsseitige Ableitung $w \longrightarrow_R z$**
  – In w wird die am weitesten rechts stehende Variable ersetzt

$$E \longrightarrow_R E{*}E \longrightarrow_R E{*}(E) \longrightarrow_R E{*}(E{+}E) \longrightarrow_R E{*}(E{+}I)$$
$$\longrightarrow_R E{*}(E{+}I0) \longrightarrow_R E{*}(E{+}I00) \longrightarrow_R E{*}(E{+}b00)$$
$$\longrightarrow_R E{*}(I{+}b00) \longrightarrow_R E{*}(a{+}b00) \longrightarrow_R I{*}(a{+}b00) \longrightarrow_R a{*}(a{+}b00)$$

Ableitungsbäume (Parsebäume)

Baumdarstellung von Ableitungen

- **Geordneter markierter Baum**
  - Innere Knoten mit Variablen $A \in V$ markiert
  - Wurzel markiert mit Startsymbol
  - Blätter mit Terminalsymbolen $a \in T$ oder mit ϵ markiert
  - Hat ein innerer Knoten Markierung A und Nachfolger mit Markierungen $v_1 ... v_n$ so ist $A \rightarrow v_1 ... v_n \in P$



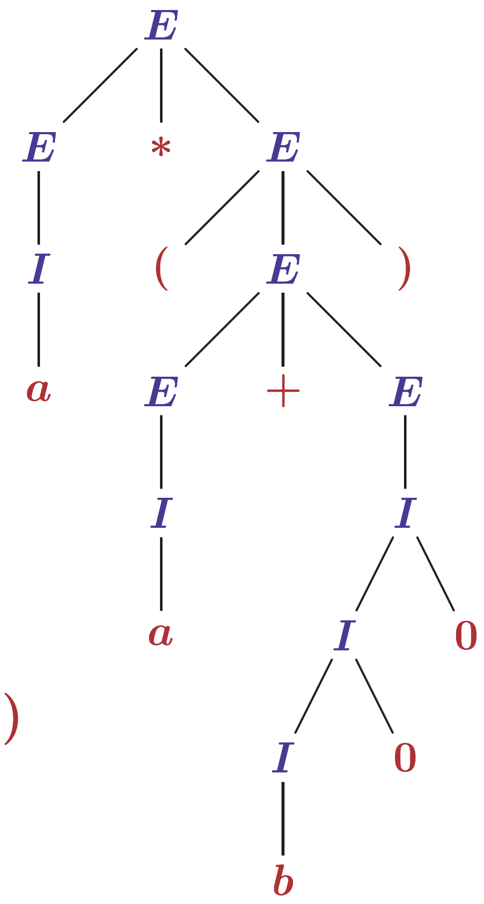
- **Exkurs: Notation für Bäume**
  - Baum: Sammlungen von Knoten mit Nachfolgerrelation
  - Nachfolger sind geordnet
  - Ein Knoten hat maximal einen Vorgänger
  - Wurzel: Knoten ohne Vorgänger
  - Blatt / Innerer Knoten: Knoten ohne/mit Nachfolger
  - Nachkommen: transitive Hülle der Nachfolgerrelation

Ableitungsbäume repräsentieren Ableitungen

- **Blätter repräsentieren Terminalworte**
  - Auslesen durch Tiefensuche von links nach rechts
  - $a * (a + b00)$
- **Baum repräsentiert Ableitungen**
  - Rekursive Erzeugung beginnend mit Wurzel
  - Vorrang für tiefe linke Knoten ergibt Linksableitung

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow_L E{*}E \longrightarrow_L I{*}E \longrightarrow_L a{*}E \longrightarrow_L a{*}(E) \\ &\longrightarrow_L a{*}(E{+}E) \longrightarrow_L a{*}(I{+}E) \longrightarrow_L a{*}(a{+}E) \\ &\longrightarrow_L a{*}(a{+}I) \longrightarrow_L a{*}(a{+}I0) \longrightarrow_L a{*}(a{+}I00) \\ &\longrightarrow_L a{*}(a{+}b00) \end{aligned}$$

  - Vorrang für tiefe rechte Knoten ergibt Rechtssableitung



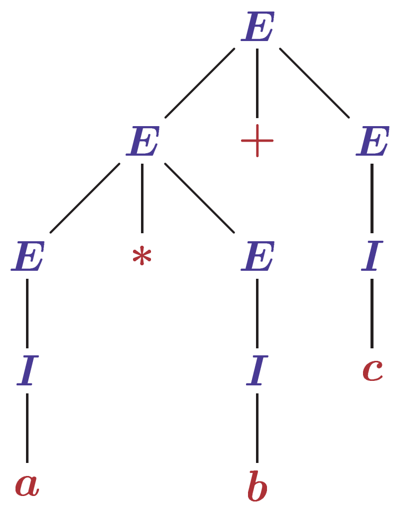
$S \xrightarrow{*} w \;\Leftrightarrow\;$ es gibt einen Ableitungsbaum mit Blattmarkierung w

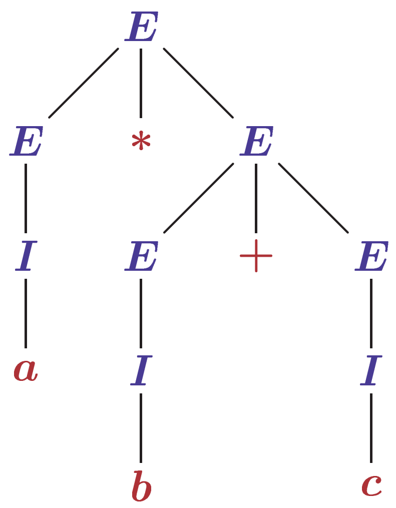
$\Rightarrow$: Konstruiere Baum induktiv aus Linksableitung von w

$\Leftarrow$: Extrahiere Linksableitung von w induktiv aus Baum

HMU §5.2

Wann ist der Ableitungsbaum eindeutig?





- $a * b + c$ **hat zwei Ableitungen in** G_6

  $E \longrightarrow E{+}E \longrightarrow E{*}E{+}E \longrightarrow I{*}E{+}E \longrightarrow a{*}E{+}E \longrightarrow a{*}I{+}E$
  $\longrightarrow a{*}b{+}E \longrightarrow a{*}b{+}I \longrightarrow a{*}b{+}c$

  $E \longrightarrow E{*}E \longrightarrow I{*}E \longrightarrow a{*}E \longrightarrow a{*}E{+}E \longrightarrow a{*}I{+}E$
  $\longrightarrow a{*}b{+}E \longrightarrow a{*}b{+}I \longrightarrow a{*}b{+}c$

  Beide Ableitungen sind Linksableitungen

- **Grammatik** G_6 **ist mehrdeutig**
  – Worte der Sprache können nicht eindeutig analysiert werden

Mehrdeutigkeit

- **Eindeutige Grammatik $G = (V, T, P, S)$**
  - Jedes Wort $w \in L(G)$ hat genau einen Ableitungsbaum
  - Andernfalls ist G **mehrdeutig**
    (ein $w \in L(G)$ hat mindestens zwei verschiedene Ableitungsbäume)
  - G_6 ist mehrdeutig

- **Eindeutige Sprache L**
  - Es gibt eine eindeutige Grammatik G mit $L = L(G)$
  - Andernfalls ist L **inhärent mehrdeutig**
    (eine eindeutige Grammatik kann nicht angegeben werden)
  - Die Sprache von G_6 ist eindeutig
  - $\{0^i 1^j 2^k \mid i{=}j \vee j{=}k\}$ ist inhärent mehrdeutig $\mapsto$ Buch von Wegener

Programmiersprachen mussen eindeutig sein

Auflösung von Mehrdeutigkeiten

- $\boldsymbol{G_6 = (\{E, I\},\ \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\},\ P,\ E)}$
  mit $P = \{\ E \to I \mid E{+}E \mid E{*}E \mid (E),\ \ I \to a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1\ \}$
  - G_6 beinhaltet keine Konventionen für $*$ und $+$
    - $*$ bindet stärker als $+$
    - $*$ und $+$ werden als linkssassoziativ angesehen
    - Alle anderen Lesarten benötigen Klammern

- **Prioritätsregeln können Eindeutigkeit erzeugen**
  - Niedrigste Prioriät $+$ steht linkssassoziativ außen $\mapsto$ ***T***erme
  - Höhere Prioriät $*$ steht linkssassoziativ innen $\mapsto$ ***F***aktoren
  - Faktoren können Bezeichner oder Ausdrücke in Klammern sein

$\boldsymbol{G_6' = (\{E, T, F, I\},\ \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\},\ P',\ E)}$

mit $\boldsymbol{P' = \{\ E \to T \mid E{+}T,\ \ T \to F \mid T{*}F,\ \ F \to I \mid (E)}$

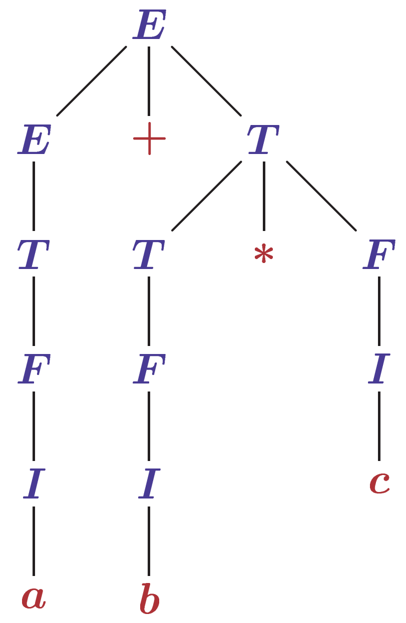
$\boldsymbol{I \to a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1\ \}}$

G_6' ist äquivalent zu G_6 und eindeutig

Eindeutigkeit von G_6'

$$P' = \{\ E \to T \mid E{+}T,\quad T \to F \mid T{*}F,\quad F \to I \mid (E)$$
$$I \to a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1\ \}$$

- **Jeder Term muß aus einer Faktorenfolge bestehen**
  - Faktorenfolge muß von rechts nach links erzeugt werden
  - Faktoren sind nur Bezeichner oder Ausdrücke in Klammern
  - Es gibt nur einen Parsebaum für $f_1 * f_2 * \ldots * f_n$
- **Jeder Ausdruck muß aus einer Termfolge bestehen**
  - Termefolge muß von rechts nach links erzeugt werden
  - Terme haben keine Ausdrücke als direkte Teile
  - Es gibt nur einen Parsebaum für $t_1 + t_2 + \ldots + t_k$



Einziger Ableitungsbaum für $a * b + c$