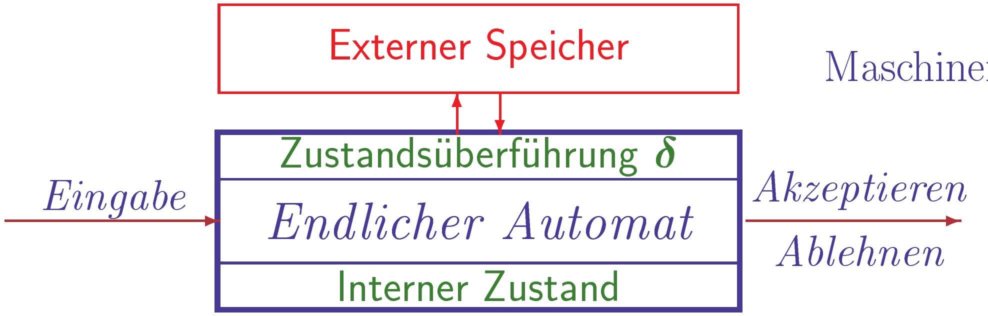
Theoretische Informatik I

Einheit 3.2

Pushdown Automaten

Ein Maschinenmodell für Typ-2 Sprachen



Maschinenmodell für Typ-2 Sprachen

- **Typ-3 Sprachen werden von NEAs akzeptiert**
  - Typ-3 Grammatik erzeugt pro Schritt ein Terminalsymbol
    - NEA verarbeitet pro Schritt ein Eingabesymbol
  - Erzeugte Terminalsymbole stehen links von der aktuellen Variablen
    - Verarbeitete Eingabesymbole führen zu aktuellem Zustand
  - Rechts von der aktuellen Variablen steht noch nichts
    - Im Zustand ist nichts über noch unverarbeitete Eingabesymbole bekannt
- **Welches Maschinenmodell paßt zu Typ-2 Sprachen?**
  - Kontextfreie Grammatiken können $L_1 = \{0^m 1^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ erzeugen
  - Endliche Automaten haben kein Gedächtnis und können L_1 nicht erkennen

Typ-2 Maschinenmodell benötigt externen Speicher

Welches Speichermodell brauchen Typ-2 Sprachen?

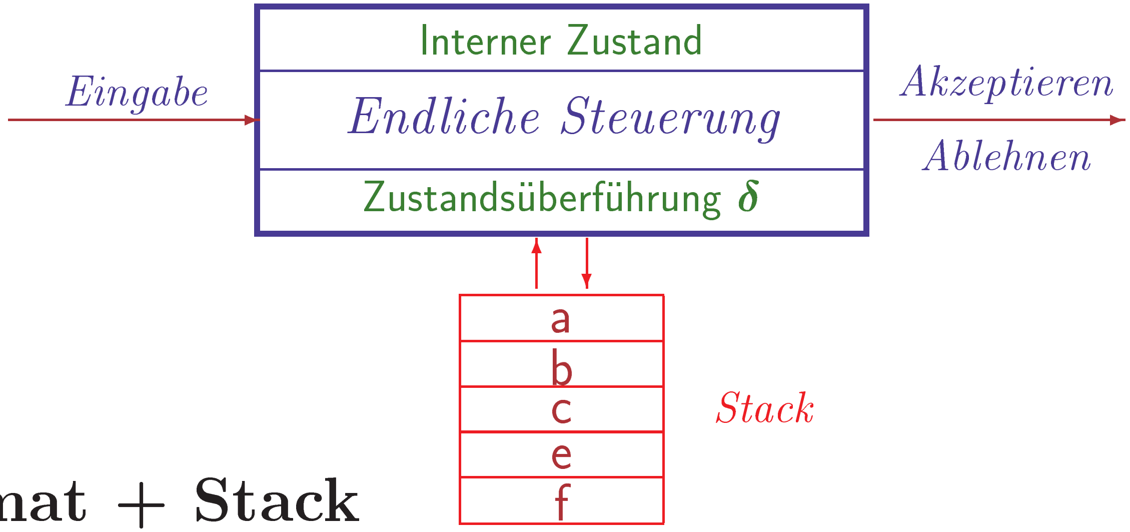
Benutze Analogie der Linksableitungen

- **Links von der aktuellen Variablen A stehen nur erzeugte Terminalsymbole**
  - Entspricht den schon verarbeiteten Eingabesymbolen
- **Aber rechts von A steht bereits Text**
  Abarbeitung von A schiebt weiteren Text in die Mitte
  - Automat muß Information speichern, die noch verarbeitet werden muß
  - Information erklärt, was am Ende der Eingabe erwartet wird
- **Wenn A komplett abgearbeitet, springt Linksableitung über Terminalsymbole zur nächsten Variablen**
  - Automat muß zuletzt erzeugte Information zuerst abarbeiten

$$\Downarrow$$

Speicher des Automaten sollte ein Stack sein

Pushdown-Automaten intuitiv



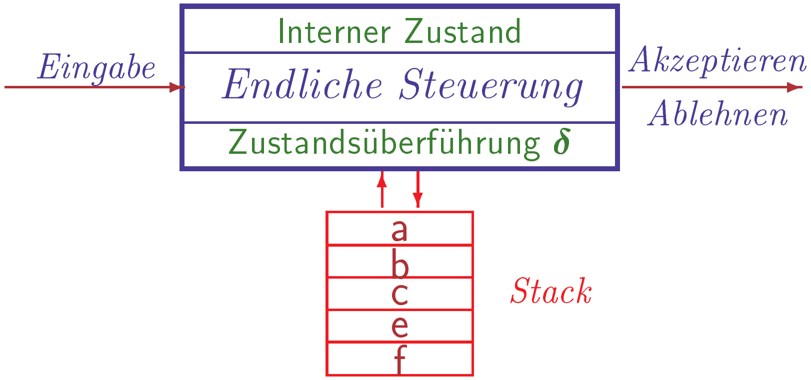
- **Endlicher Automat + Stack**
  - Endliche Steuerung liest Eingabesymbole
  - Gleichzeitig kann das oberste Symbol im Stack beobachtet werden
- **Eingabe und Stack wird gleichzeitig bearbeitet**
  - Gelesenes Symbol wird aus Eingabe "entfernt"
  - Zustand kann verändert werden
  - Oberstes Stacksymbol wird durch (mehrere) neue Stacksymbole ersetzt
  - Nichtdeterministische Entscheidungen und spontane ϵ-Übergänge möglich

Pushdown-Automat für 'gerade' Palindrome

$L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ **ist kontextfrei**

- **Speichere w in q_0**
  – In q_0 wird je ein Symbol gelesen und auf den Stack gelegt
  – Gelesenes Wort steht von unten nach oben im Stack
- **Spontaner Wechsel "in der Mitte"**
  – Nichtdeterministischer ϵ-Übergang von q_0 nach q_1
  – Im Stack steht w in umgekehrter Reihenfolge
- **Verarbeite w^R in q_1**
  – In q_1 wird je ein Symbol gelesen und mit dem Stacksymbol verglichen
  – Stacksymbol wird bei Gleichheit entfernt
- **Leerer Stack akzeptiert**
  – Wenn Stack leer ist, wurde w^R in q_1 verarbeitet

Pushdown-Automaten – mathematisch präzisiert

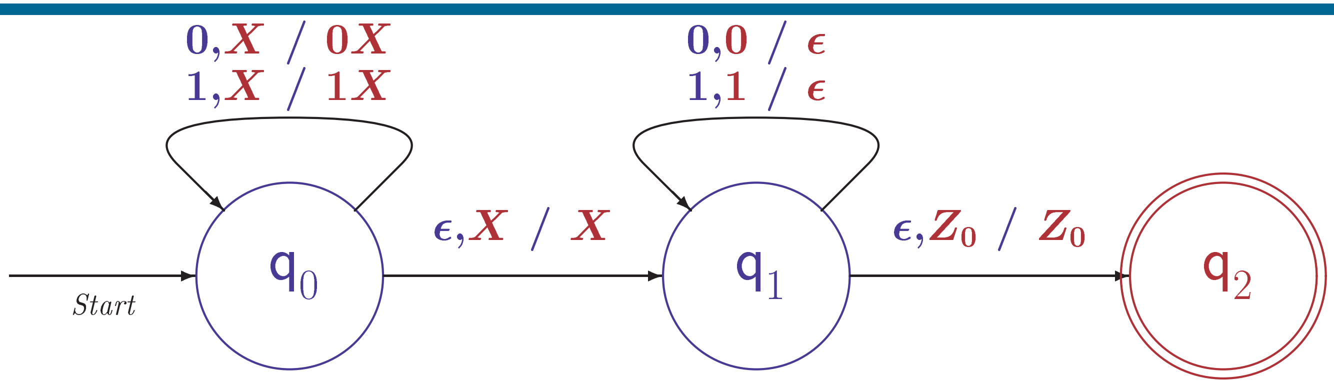


Ein Pushdown-Automat (PDA, Kellerautomat)
ist ein 7-Tupel $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ endliches **Eingabealphabet**
- Γ endliches **Stackalphabet**
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$ **Überführungsfunktion**
- $q_0 \in Q$ **Startzustand** (Anfangszustand)
- $Z_0 \in \Gamma$ **Initialsymbol des Stacks**
- $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden Zuständen** (Endzustände)

Pushdown-Automaten sind üblicherweise nichtdeterministisch!

PUSHDOWN-AUTOMAT FÜR $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$

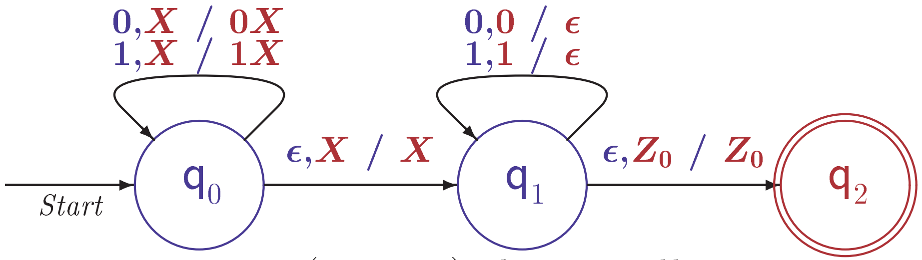


- **Speichere w in q_0**
  - Jedes gelesene Symbol wird dem Stack zugefügt
  - $\delta(q_0,a,X) = \{(q_0,aX)\}$ für $a \in \{0,1\}$, $X \in \Gamma$
- **Spontaner ϵ-Übergang von q_0 nach q_1**
  - $\delta(q_0,\epsilon,X) = \{(q_1,X)\}$ für $X \in \Gamma$
- **Verarbeite w^R in q_1**
  - Jedes gelesene Symbol wird dem obersten Stacksymbol verglichen
  - $\delta(q_1,a,a) = \{(q_1,\epsilon)\}$ für $a \in \{0,1\}$
- **"Leerer" Stack akzeptiert (ϵ-Übergang nach q_2)**
  - $\delta(q_1,\epsilon,Z_0) = \{(q_2,Z_0)\}$

$$\boxed{P = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})}$$

BESCHREIBUNG VON PUSHDOWN-AUTOMATEN

- **Übergangsdiagramme**



  – Jeder Zustand in Q wird durch einen Knoten (Kreise) dargestellt

  – Für $(p,\alpha)\in\delta(q,a,X)$, $a\in(\Sigma\cup\epsilon)$ hat das Diagramm eine Kante $q \xrightarrow{a,X/\alpha} p$

  (mehrere Beschriftungen derselben Kante möglich)

  – q_0 wird durch einen mit *Start* beschrifteten Pfeil angezeigt

  – Endzustände in F werden durch doppelte Kreise gekennzeichnet

  – Σ und Γ implizit durch die Diagramm bestimmt, Initialsymbol heißt Z_0

- **Übergangstabellen**

  – Tabellarische Darstellung der Funktion δ

  – Kennzeichnung von q_0 durch einen Pfeil

  – Kennzeichnung von F durch Sterne

  – Σ, Γ und Q implizit durch die Tabelle bestimmt

  – Wildcard ($*$, $**$,..) für $a\in\Sigma$ oder $X\in\Gamma$ erlaubt

	Q	$\Sigma\cup\epsilon$	Γ	Resultat
$\rightarrow$	q_0	0	$*$	q_0, $0*$
$\rightarrow$	q_0	1	$*$	q_0, $1*$
$\rightarrow$	q_0	ϵ	$*$	q_1, $*$
	q_1	0	0	q_1, ϵ
	q_1	1	1	q_1, ϵ
	q_1	ϵ	Z_0	q_2, Z_0
$*$	q_2			

Arbeitsweise von Pushdown-Automaten

Generalisiere $\hat{\delta}$ zu Konfigurationsübergängen

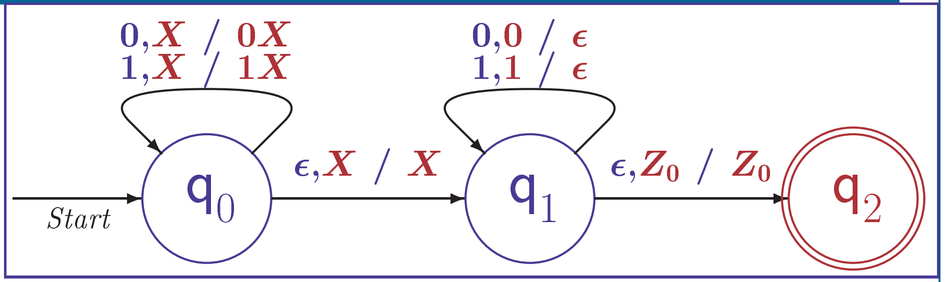
- **Konfiguration: der wirkliche 'Zustand' des PDA**
  - Mehr als $q \in Q$: auch Inhalt des Stacks und unverarbeitete Eingabe zählt
  - Formal dargestellt als Tripel $\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{q},\boldsymbol{w},\boldsymbol{\gamma}) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$

- **Konfigurationsübergang $\vdash^*$**
  - Wechsel zwischen Konfigurationen durch Abarbeitung von Worten
  - $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{aw},\boldsymbol{X\beta}) \vdash (\boldsymbol{p},\boldsymbol{w},\boldsymbol{\alpha\beta})$, falls $(p,\alpha) \in \delta(q,a,X)$
  - $\boldsymbol{K_1} \vdash^* \boldsymbol{K_2}$, falls $K_1 = K_2$ oder
    es gibt eine Konfiguration K mit $K_1 \vdash K$ und $K \vdash^* K_2$

- **Konfigurationsübergänge für NEAs definierbar**
  - Konfigurationen sind Paare $K = (q,w) \in Q \times \Sigma^*$
  - $(q,aw) \vdash (p,w)$, falls $p \in \delta(q,a)$, $K_1 \vdash^* K_2$ definiert wie oben

  Allgemeinere, aber für endliche Automaten weniger intuitive Notation

Abarbeitung des Palindrom PDA



Verarbeitung von 1111

$$\begin{tikzcd}
(q_0,\ 1111,\ Z_0) \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
(q_0,\ 111,\ 1Z_0) \arrow[d] \arrow[dr] & (q_1,\ 1111,\ Z_0) \arrow[r] & (q_2,\ 1111,\ Z_0) \\
(q_0,\ 11,\ 11Z_0) \arrow[d] \arrow[dr] & (q_1,\ 111,\ 1Z_0) \arrow[r] & (q_1,\ 11,\ Z_0) \arrow[d] \\
(q_0,\ 1,\ 111Z_0) \arrow[d] \arrow[dr] & (q_1,\ 11,\ 11Z_0) \arrow[dr] & (q_2,\ 11,\ Z_0) \\
(q_0,\ \epsilon,\ 1111Z_0) \arrow[d] & (q_1,\ 1,\ 111Z_0) \arrow[d] & (q_1,\ 1,\ 1Z_0) \arrow[d] \\
(q_1,\ \epsilon,\ 1111Z_0) & (q_1,\ \epsilon,\ 11Z_0) & (q_1,\ \epsilon,\ Z_0) \arrow[d] \\
& & \boxed{(q_2,\ \epsilon,\ Z_0)}
\end{tikzcd}$$

Wichtige Einsichten zu Konfigurationsübergängen

- **Gilt** $(q,x,\alpha) \vdash^* (p,y,\beta)$ **dann gilt auch**
  $(q,xw,\alpha\gamma) \vdash^* (p,yw,\beta\gamma)$ **für alle** $w \in \Sigma^*$, $\gamma \in \Gamma^*$

  Weder w **noch** γ **werden bei der Verarbeitung angesehen**

  – Beweis durch Induktion über Anzahl der Konfigurationsschritte

  – Kernargument: $(q,aw,X\gamma) \vdash (p,w,\beta\gamma)$, falls $(p,\beta) \in \delta(q,a,X)$
  was hinter a bzw. X kommt, bleibt unverändert

- **Gilt** $(q,xw,\alpha) \vdash^* (p,yw,\beta)$ **dann gilt auch**
  $(q,x,\alpha) \vdash^* (p,y,\beta)$ **für alle** $w \in \Sigma^*$

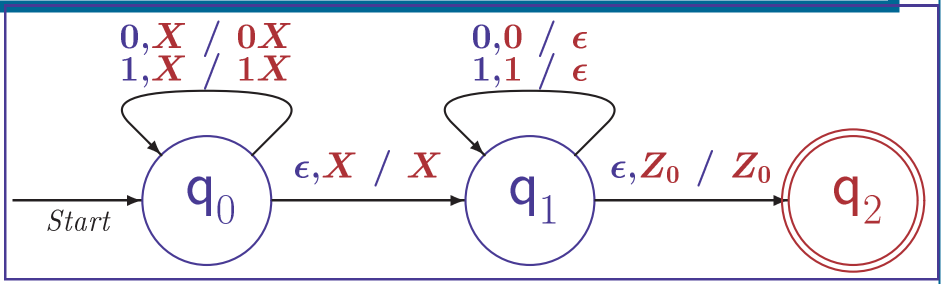
  Wenn w bisher nicht gelesen wurde, dann spielt es (noch) keine Rolle

  Dagegen kann es von Bedeutung sein, ob im Stack hiner α etwas steht

Erkannte Sprache eines Pushdown-Automaten

- **Zwei alternative Definitionen**
  - Akzeptanz durch akzeptierende Endzustände (Standarddefinition)
    - $\boldsymbol{L_F(P)} = \{\, w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F.\ \exists \beta \in \Gamma^*.\ (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \beta) \,\}$
  - Akzeptanz durch leeren Stack (oft praktischer)
    - $\boldsymbol{L_\epsilon(P)} = \{\, w \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q.\ (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon) \,\}$
- **Beide Akzeptanzdefinitionen sind äquivalent**
  - Zu jedem PDA $P_\epsilon = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, \emptyset)$ kann ein PDA P_F konstruiert werden mit $L_\epsilon(P_\epsilon) = L_F(P_F)$
  - Zu jedem PDA $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ kann ein PDA P_ϵ konstruiert werden mit $L_F(P_F) = L_\epsilon(P_\epsilon)$

Sprachen des Palindromautomaten



- $\boldsymbol{L_F(P) = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}}$

  $\supseteq$: Durch Induktion über Länge von w zeige, daß für jedes Wort ww^R gilt

  $(q_0,ww^R,Z_0) \vdash^* (q_0,w^R,w^RZ_0) \vdash (q_1,w^R,w^RZ_0) \vdash^* (q_1,\epsilon,Z_0) \vdash (q_2,\epsilon,Z_0)$

  $\subseteq$: Durch Induktion über Länge von x zeige

  Wenn $(q_0,x,\alpha) \vdash^* (q_1,\epsilon,\alpha)$ dann $x{=}ww^R$ für ein $w \in \{0{,}1\}^*$

  Kernidee: $(q_0,x_1..x_n,\alpha) \vdash^* (q_0,x_2..x_n,x_1\alpha) \vdash^* (q_1,x_i..x_n,\beta x_1\alpha)$

  $\vdash^* (q_1,x_n,x_1\alpha) \vdash^* (q_1,\epsilon,\alpha)$

  impliziert $(q_0,x_1..x_{n-1},\alpha) \vdash^* (q_0,x_2..x_{n-1},x_1\alpha) \vdash^* \ldots \vdash^* (q_1,\epsilon,x_1\alpha)$

  und $x_1..x_n = x_1x_2..x_{n-1}x_1 = x_1vv^Rx_1$ für ein $v \in \{0{,}1\}^*$ Siehe HMU §6.2.1

- $\boldsymbol{L_\epsilon(P) = \emptyset}$

  – Einfaches Argument: Z_0 wird nie gelöscht

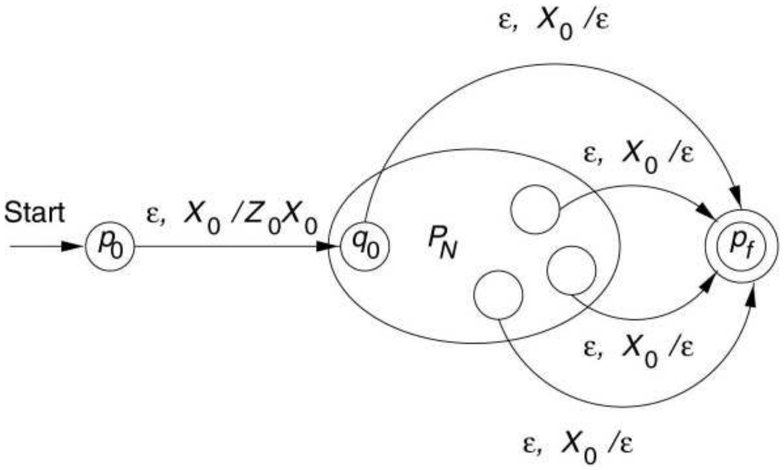
  – Modifikation: Ändere Kantenbeschriftung von q_1 nach Q_2 zu $\epsilon,Z_0 \;/\; \epsilon$

  Dann gilt $L_\epsilon(P') = L_F(P) = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$

Zu jedem PDA $P_\epsilon = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, \emptyset)$ kann ein PDA P_F konstruiert werden mit $L_\epsilon(P_\epsilon) = L_F(P_F)$

- **Bei leerem Stack wechsele in Endzustand**
  - Neues Initialsymbol X_0 für P_F markiert unteres Ende des Stacks
  - Neuer Anfangszustand p_0 für P_F schreibt Initialsymbol von P_ϵ auf Stack
  - Neuer Endzustand p_f in den bei "leerem" Stack gewechselt wird
- $P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, p_0, X_0, \delta_F, \{p_f\})$
  - $\delta_F(p_0,\epsilon,X_0) = \{(q_0,Z_0X_0)\}$
  - $\delta_F(q,a,X) = \delta(q,a,X)$ für alle $q \in Q$, $X \in \Gamma$
  - $\delta_F(q,\epsilon,X_0) = \{(p_f,\epsilon)\}$ für alle $q \in Q$

Korrektheitsbeweis durch Detailanalyse



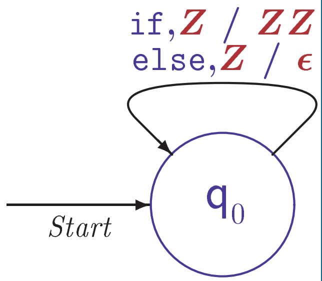
Umwandlung eines L_ϵ-PDA in einen L_F-PDA

- **Gegeben** $P_\epsilon = (\{q\}, \{\texttt{if}, \texttt{else}\}, \{Z\}, q, Z, \delta, \emptyset)$

  mit $\delta(q, \texttt{if}, Z) = \{(q, ZZ)\}$

  $\delta(q, \texttt{else}, Z) = \{(q, \epsilon)\}$

  – Erkennt, daß ein (Teil-)Ausdruck mehr `else` als `if` enthält



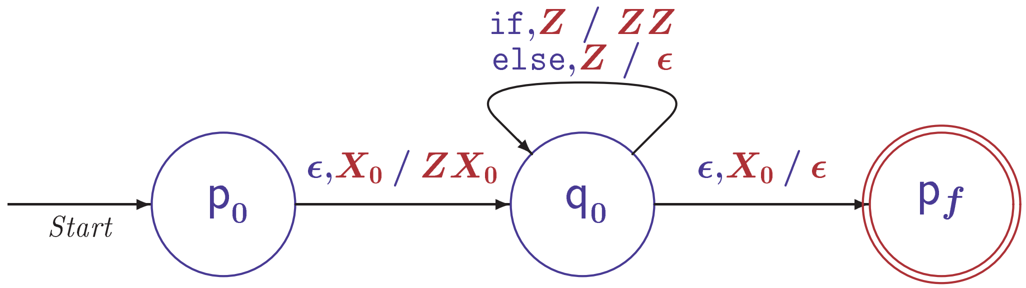
- $P_F = (\{p_0, q, p_f\}, \{\texttt{if}, \texttt{else}\}, \{X_0, Z\}, p_0, X_0, \delta_F, \{p_f\})$

  – $\delta_F(p_0, \epsilon, X_0) = \{(q, ZX_0)\}$

  – $\delta_F(q, \texttt{if}, Z) = \{(q, ZZ)\}$

  – $\delta_F(q, \texttt{else}, Z) = \{(q, \epsilon)\}$

  – $\delta_F(q, \epsilon, X_0) = \{(p_f, \epsilon)\}$

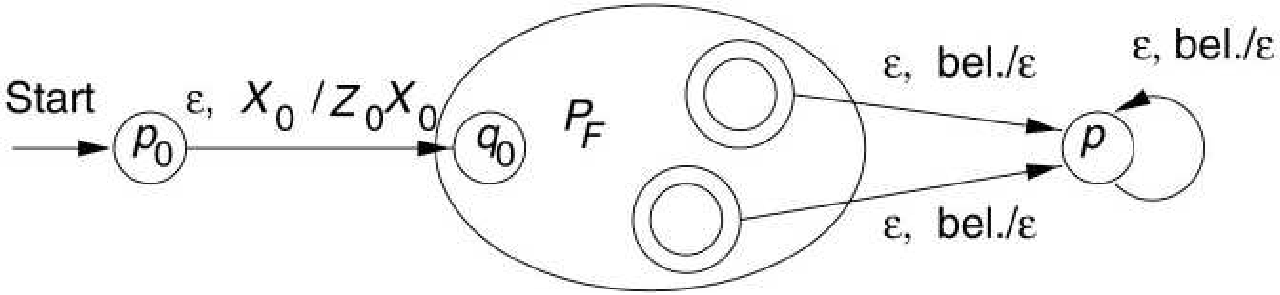


TRANSFORMATION VON L_F IN L_ϵ

Zu jedem PDA $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ kann ein PDA P_ϵ konstruiert werden mit $L_F(P_F) = L_\epsilon(P_\epsilon)$

- **Im Endzustand leere den Stack**
  - Neuer Stacklösch-Zustand p, in von Endzuständen gewechselt wird
  - Neues Initialsymbol X_0 für P_ϵ verhindert irrtümliches Leeren des Stacks
  - Neuer Anfangszustand p_0 für P_ϵ schreibt Initialsymbol von P_F auf Stack

- $P_F = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, q_0, X_0, \delta_\epsilon, \emptyset)$
  - $\delta_\epsilon(p_0, \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$
  - $\delta_\epsilon(q, \text{a}, X) = \delta(q, \text{a}, X)$ für alle $q \in Q$, $X \in \Gamma$
  - $\delta_\epsilon(q, \epsilon, X_0) = \{(p, \epsilon)\}$ für alle $q \in F$
  - $\delta_\epsilon(p, \epsilon, X) = \{(p, \epsilon)\}$ für alle $X \in \Gamma \cup \{X_0\}$



Sind PDAs wirklich die Maschinen für Typ-2 Sprachen?

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{PDA} = \{\, L \mid \exists P\text{:PDAs. } L{=}L_\epsilon(P) \}$$

- **Konfigurationsübergänge $\hat{=}$ Linksableitungen**
  – $(q_0,\ xy,\ Z_0) \vdash^* (q,\ y,\ A\,\alpha)$ bedeutet, daß P nach Verarbeitung von x im Zustand q ist und noch y und den Stack $A\,\alpha$ zu verarbeiten hat
  – $A\,\alpha$ muß gespeichert und beim Lesen von y komplett abgearbeitet werden
  – Linksableitung $S \xrightarrow{*} xA\,\alpha \xrightarrow{*} xy$ erzeugt aus dem Startsymbol zuerst das Wort $xA\,\alpha$ umd muß dann y aus $A\,\alpha$ ableiten

- **Grammatik $\longrightarrow$ Pushdown-Automat**
  – PDA muß Linksableitung auf Stack simulieren
  – Erzeugte linke Terminalteilworte müssen mit Teil der Eingabe verglichen werden um nächste Variable freizulegen

- **Pushdown-Automat $\longrightarrow$ Grammatik**
  – Grammatik muß Abarbeitung von Symbolen des Stacks simulieren
  – Regeln beschreiben wie PDA zur Abarbeitung von X mit δ Zwischenworte im Stack auf- und schließlich wieder abbaut

Von Grammatiken zu Pushdown-Automaten

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (V, T, P_G, S)$ kann ein PDA P konstruiert werden mit $L(G) = L_\epsilon(P)$

- **Stack simuliert Linksableitungen von G**
  - Beginne mit Startsymbol von G
  - $A \in V$ wird durch die rechte Seite β einer Regel $A \to \beta$ ersetzt
  - $a \in T$ wird vom Stack entfernt, wenn es als Eingabesymbol erscheint
    um nächste Variable der Linksableitungen im Stack zu identifizieren
- **$P = (\{q\}, T, V \cup T, q, S, \delta, \emptyset)$**
  - $\delta(q,\epsilon,A) = \{(q,\beta) \mid A \to \beta \in P_G\}$ für alle $A \in V$
  - $\delta(q,a,a) = \{(q,\epsilon)\}$ für alle $a \in T$
- **Korrektheitsbeweis $L(G) = L_\epsilon(P)$**
  - Zeige: ($\subseteq$) Wenn $S = x_1 A_1 \alpha_1 \longrightarrow_L ..x_m A_m \alpha_m \longrightarrow_L w \in T^*$ dann
    gibt es y_i mit $(q, w, S) \vdash^* (q, y_i, A_i\alpha_i)$ und $x_i y_i = w$
    ($\supseteq$) Wenn $(q, w, X) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)$ dann $X \stackrel{*}{\longrightarrow} w$

KORREKTHEITSBEWEIS $L(G) \subseteq L_\epsilon(P)$

Wenn $S = x_1A_1\alpha_1 \longrightarrow_L ..x_mA_m\alpha_m \longrightarrow_L w \in T^*$ $(x_i \in T^*,\ A_i \in V)$
dann gibt es y_i **mit** $(q, w, S) \vdash^* (q, y_i, A_i\alpha_i)$ **und** $x_iy_i = w$

- **Beweis durch Induktion über Länge i der Linksableitung**
- **Basisfall $i = 1$:** $S = x_1A_1\alpha_1 \longrightarrow_L w \in T^*$
  - Es folgt $S = A_1$ und $x_1{=}\alpha_1{=}\epsilon$, also $y_1{=}w$
  - $(q, w, S) \vdash^* (q, w, S)$ gilt mit 0 Konfigurationsübergängen
- **Induktionsschritt:** $S.. \longrightarrow_L x_iA_i\alpha_i \longrightarrow_L x_{i+1}A_{i+1}\alpha_{i+1} \longrightarrow_L w \in T^*$
  - $x_iA_i\alpha_i \longrightarrow_L x_{i+1}A_{i+1}\alpha_{i+1}$ verlangt $A_i{\rightarrow}\beta \in P_G$ für ein β
  - Also $(q,\beta) \in \delta(q,\epsilon,A_i)$ also $(q,y_i,A_i\alpha_i) \vdash^* (q,y_i,\beta\alpha_i)$
  - Zerlege $\beta\alpha_i$ in $xA_{i+1}\alpha_{i+1}$. Dann kann y_i in xy_{i+1} zerlegt werden
  - Es folgt $(q,xy_{i+1},xA_{i+1}\alpha_{i+1}) \vdash^* (q, y_{i+1}, A_{i+1}\alpha_{i+1})$ (PDA arbeitet x ab)
  - Mit Induktionsannahme: $(q, w, S) \vdash^* (q, y_i, A_i\alpha_i) \vdash^* (q, y_{i+1}, A_{i+1}\alpha_{i+1})$
- **Schlußfolgerung:** $S = x_1A_1\alpha_1 \longrightarrow_L ..x_{m+1}A_{m+1}\alpha_{m+1} = w \in T^*$
  - $x_{m+1}{=}w$ und $A_{m+1}{=}\alpha_{m+1}{=}y_{m+1}{=}\epsilon$
  - Also $(q, w, S) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)$, d.h. $w \in L_\epsilon(P)$

Korrektheitsbeweis $L(G) \supseteq L_\epsilon(P)$

Wenn $(q,w,X) \vdash^* (q,\epsilon,\epsilon)$ dann $X \xrightarrow{*} w$

- **Beweis durch Induktion über Länge der PDA Berechnung**
- **Basisfall: $(q,w,X) \vdash (q,\epsilon,\epsilon)$**
  - Es folgt $X \to \epsilon \in P_G$ und $w = \epsilon$, also $X \xrightarrow{*} w$
- **Induktionsschritt: $(q,w,X) \vdash^{n+1} (q,\epsilon,\epsilon)$**
  - Da X oben im Stack steht, muß der erste Schritt die Form $(q,w,X) \vdash (q,w,Y_1..Y_k)$ für ein $X \to Y_1..Y_k \in P_G$ haben
  - Dann gibt eine Zerlegung $w = w_1..w_k$ mit $(q,w_1..w_k,Y_1..Y_k) \vdash^* (q,w_2..w_k,Y_2..Y_k) \vdash^* (q,\epsilon,\epsilon)$
  - Es folgt $(q,w_i..w_k,Y_i) \vdash^* (q,w_{i+1}..w_k,\epsilon)$ also $(q,w_i,Y_i) \vdash^* (q,\epsilon,\epsilon)$
  - Per Induktionsannahme folgt $Y_i \xrightarrow{*} w_i$ für alle i

    also $X \longrightarrow Y_1..Y_k \xrightarrow{*} w_1..w_k = w$
- **$L(G) \supseteq L_\epsilon(P)$ folgt nun mit $w \in L_\epsilon(P)$ und $X = S$**

Umwandlung einer Grammatik in einen PDA

- $G_6 = (\{E, I\},\ \{a, b, 0, 1, +, *, (,)\},\ P_G,\ E)$
  mit $P_G = \{\ E \rightarrow I \mid E{+}E \mid E{*}E \mid (E)$
  $I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1\ \}$

- **Erzeuge** $P = (\{q\}, T, V{\cup}T, q, E, \delta, \emptyset)$
  mit $V{=}\{E, I\}$ und $T{=}\{a, b, 0, 1, +, *, (,)\}$
  - $\delta(q,\epsilon,E) = \{(q,I),\ (q,E{+}E),\ (q,E{*}E),\ (q,(E))\}$
  - $\delta(q,\epsilon,I) = \{(q,a),\ (q,b),\ (q,Ia),\ (q,Ib),\ (q,I0),\ (q,I1)\}$
  - $\delta(q,a,a) = \{(q,\epsilon)\}$ – $\delta(q,+,+) = \{(q,\epsilon)\}$
  - $\delta(q,b,b) = \{(q,\epsilon)\}$ – $\delta(q,*,*) = \{(q,\epsilon)\}$
  - $\delta(q,0,0) = \{(q,\epsilon)\}$ – $\delta(q,(,() = \{(q,\epsilon)\}$
  - $\delta(q,1,1) = \{(q,\epsilon)\}$ – $\delta(q,),)) = \{(q,\epsilon)\}$

VON PUSHDOWN-AUTOMATEN ZU GRAMMATIKEN

Zu jedem PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ kann eine kontextfreie Grammatik G konstruiert werden mit $L_\epsilon(P) = L(G)$

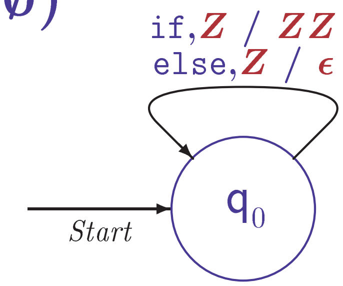
- **Simuliere Abarbeitung eines Symbols vom Stack**
  - Verarbeite Variablen der Form (p, X, q):
    "*Entfernen von X kann von Zustand p zu Zustand q führen*"
  - Entfernen von X kann heißen, zuerst ein $Y_1..Y_m$ auf- und dann abzubauen
  - Beginne mit Erzeugung von Z_0 und zeige, daß Z_0 entfernt werden kann

- **$G = (\Sigma, \{S\} \cup Q \times \Gamma \times Q, P_G, S)$**
  - $S \to (q_0, Z_0, q) \in P_G$ für alle $q \in Q$
  - $(p, X, q_m) \to a\, (p, Y_1, q_1) \ldots (q_{m-1}, Y_m, q_m) \in P_G$, für beliebige $q_1, .., q_m \in Q$, falls $(p,\ Y_1..Y_m) \in \delta(q, a, X)$

- **Korrektheitsbeweis $L_\epsilon(P) = L(G)$** (viele Details)
  - Zeige: $(p, X, q) \xrightarrow{*} w \in \Sigma^*$ genau dann, wenn $(p, w, X) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon)$
    $\subseteq$: Induktion über Länge der PDA Berechnung
    $\supseteq$: Induktion über Länge der Ableitung

Umwandlung eines PDA in eine Grammatik

- **Gegeben** $P = (\{q\}, \{\texttt{if}, \texttt{else}\}, \{Z\}, q, Z, \delta, \emptyset)$
  mit $\delta(q, \texttt{if}, Z) = \{(q, ZZ)\}$
  $\delta(q, \texttt{else}, Z) = \{(q, \epsilon)\}$



- $G = (\{\texttt{if}, \texttt{else}\}, \{S,\ (q, Z, q)\}, P_G, S)$
  mit $P_G = S \rightarrow (q, Z, q)$
  $(q, Z, q) \rightarrow \texttt{if}\ (q, Z, q)(q, Z, q)$
  $(q, Z, q) \rightarrow \texttt{else}$

Kurzschreibweise A für Hilfssymbol (q, Z, q) ergibt elegantere Darstellung

$G = (\{\texttt{if}, \texttt{else}\}, \{S, A\}, P_G, S)$ mit $P_G = S \rightarrow A$
$A \rightarrow \texttt{if}\ AA$
$A \rightarrow \texttt{else}$

Brauchen wir Nichtdeterministische Automaten?

- **Grammatiken sind nichtdeterministisch**
  - Nichtdeterministische Automaten sind das “natürliche” Gegenstück
    - Grammatikregeln führen zu mengenwertiger Überführungsfunktion
  - “Wirkliche” Automaten müssen deterministisch sein
- **Typ-3 Sprachen haben deterministische Modelle**
  - NEAs können in äquivalente DEAs umgewandelt werden
  - Teilmengenkonstruktion kann Automaten exponentiell vergrößern
- **Reichen deterministische PDAs für Typ-2 Sprachen?**
  - Überführungsfunktion $\delta{:}Q\times(\Sigma\cup\{\epsilon\})\times\Gamma \to Q\times\Gamma^*$ muß eindeutig sein
  - Gibt es für PDAs immer äquivalente deterministische PDAs?

DETERMINISTISCHE PUSHDOWN-AUTOMATEN – PRÄZISIERT

Ein Deterministischer Pushdown-Automat (DPDA)
ist ein 7-Tupel $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ endliches **Eingabealphabet**
- Γ endliches **Stackalphabet**
- $\delta: Q\times(\Sigma\cup\{\epsilon\})\times\Gamma \to Q\times\Gamma^*$ **Überführungsfunktion**
  - $\delta(q,\epsilon,X)$ nur definiert, wenn $\delta(q,a,X)$ für alle $a\in\Sigma$ undefiniert
- $q_0\in Q$ **Startzustand** (Anfangszustand)
- $Z_0\in\Gamma$ **Initialsymbol des Stacks**
- $F\subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden Zuständen** (Endzustände)

Erkannte Sprache

– $L_F(P) = \{\, w\in\Sigma^* \mid \exists q\in F.\ \exists\beta\in\Gamma^*.\ (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (q, \epsilon, \beta)\,\}$

– $L_\epsilon(P) = \{\, w\in\Sigma^* \mid \exists q\in Q.\ (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (q, \epsilon, \epsilon)\,\}$

DPDAs sind nicht mächtig genug

- **DPDA-Sprachen sind eine echte Teilklasse von $\mathcal{L}_2$**

  1. **$L(DPDA) \subseteq \mathcal{L}_2$: Jeder DPDA ist ein spezieller PDA**
  2. **DPDAs können $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ nicht erkennen**

     DPDA P kann nicht entscheiden, wo die Mitte eines Wortes liegt

     · Wenn $0^n 110^n$ (großes n) gelesen ist, ist Stack durchs Zählen geleert

     · Wenn noch einmal $0^n 110^n$ gelesen wird, muß P akzeptieren

     · Wenn stattdessen $0^m 110^m$ $(m \neq n)$ kommt, darf P nicht akzeptieren

     · Aber die Information über n ist nicht mehr gespeichert (Details aufwendig)

- **DPDAs erkennen nur eindeutige Typ-2 Sprachen**

  1. **Für jeden DPDA P hat $L_\epsilon(P)$ eine eindeutige Grammatik**

     Für DPDAs ergibt die Umwandlung eine eindeutige Typ-2 Grammatik

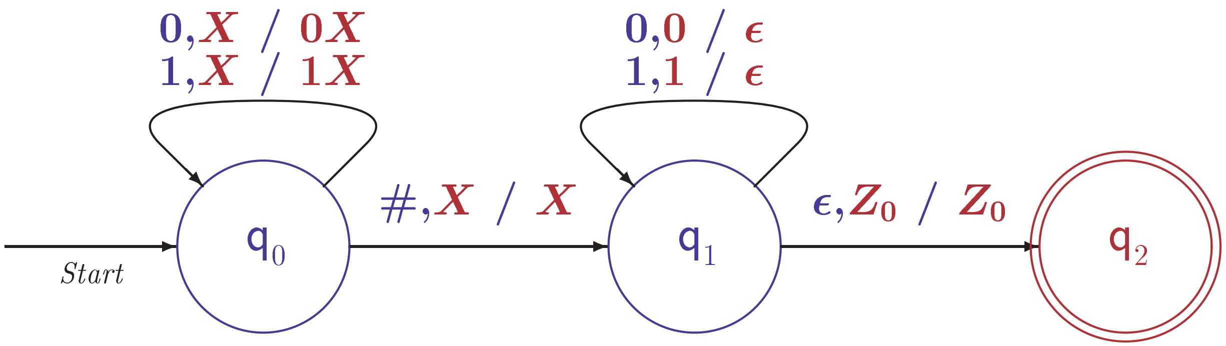
     · Folge der Konfigurationsübergänge bestimmt Linksableitung eindeutig)

  2. **Für jeden DPDA P hat $L_F(P)$ eine eindeutige Grammatik**

     Umwandlung in $L_\epsilon - DPDA$ kann deterministisch gemacht werden

DPDAs sind mächtiger als endliche Automaten

- $\mathcal{L}_3 = L(DEA) \subseteq L_F(DPDA)$
  – Jeder DEA ist ein spezieller DPDA
  – **Aussage gilt nur für Erkennung mit Endzustand**
- $L = \{w\#w^R \mid w \in \{0,1\}^*\} \in L_F(DPDA) - L(DEA)$
  – **L ist nicht regulär**
    · Beweis durch Pumping Lemma, analog zu $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$
  – **$L = L_F(P)$ für folgenden DPDA P**



  – P ist deterministisch, da ϵ-Übergang in q_1 genau bei Stacksymbol Z_0
- $\{0\}^* \notin L_\epsilon(DPDA)$
  – Wenn der Stack einmal leer ist, kann ein DPDA nicht mehr weiterarbeiten

Pushdown-Automaten – Zusammenfassung

- **Maschinenmodell für kontextfreie Sprachen**
  – Nichtdeterministischer endlicher Automat mit Stack und ϵ-Übergängen
  – Erkennung von Worten durch Endzustand oder leeren Stack
  – Erkennungsmodelle sind ineinander transformierbar
- **Verhaltensanalyse durch Konfigurationsübergänge**
  – Konfigurationen beschreiben 'Gesamtzustand' von Pushdown-Automaten
  – Konfigurationsübergänge verallgemeinern Überführungsfunktionen
- **Äquivalent zu kontextfreien Grammatiken**
  – Umwandlung von Konfigurationsübergängen in Regeln und umgekehrt
- **Deterministische PDAs sind weniger mächtig**
  – DPDAs erkennen nur eindeutige Typ-2 Sprachen
  – L_ϵ-DPDAs können nicht einmal alle regulären Sprachen erkennen