

Automatisierte Logik und Programmierung

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2004

Blatt 2 — Abgabetermin: —

Aufgabe 2.1

Beweisen Sie mit und ohne Verwendung der `arith`-Entscheidungsprozedur

$$\forall x, y: \mathbb{Z}. \quad x < y + 4 \wedge y - 23 < 55 \wedge x > y \wedge y - 1 > 35 \Rightarrow (x < 86 \vee y < 1) \wedge 25 < x$$

Hinweis: Verwenden Sie die Strategie `simple_prover` um das Beweisziel vorzubereiten. Gehen Sie davon aus, daß `Arith` – die Taktik-Version von `arith` – auch die in Definition Ungleichungen $\geq$, $\leq$, $\neq$ verarbeiten kann und `Wf` alle anfallenden Wohlgeformtheitsziele lösen kann.

Für die Lösung ohne `Arith` empfiehlt es sich, allgemeine arithmetische Lemmata aufzustellen und mit `InstLemma` (Manual, Seite 128) anzuwenden. `InstLemma`: `tok -> term list -> tactic` instantiiert Lemmata der Form $\forall x_1:T_1 \dots x_n:T_n. P \Rightarrow Q$ mit den gelisteten Termen und wendet dann `modus ponens (impE)` an. Die Lemmata brauchen nicht bewiesen zu werden.

Aufgabe 2.2 (Grundlagen der `arith`-Prozedur)

- 2.2-a Beschreiben Sie einen Algorithmus, der überprüft, ob ein gerichteter Graph einen positiven Zyklus besitzt.
- 2.2-b Zeigen Sie, daß Entscheidbarkeit von Formeln unter aussagenlogischen Konnektiven ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$) abgeschlossen ist.
- 2.2-c Beschreiben Sie (informal) eine Taktik, welche elementar-arithmetische Formeln in konjunktive Normalform (als Vorbereitung für `arith`) umwandelt.

Aufgabe 2.3 (Etwas Theoretisches als Zusatzaufgabe)

- 2.3-a Zeigen Sie, daß eine Sequenz $\Gamma \vdash G_1 \vee \dots \vee G_n$ genau dann gültig ist, wenn die Sequenz $\Gamma, \neg G_1, \dots, \neg G_n \vdash \text{ff}$ gültig ist, sofern alle Formeln G_i entscheidbar sind.
- 2.3-b Es sei $\Gamma = v_1 \geq u_1 + c_1, \dots, v_n \geq u_n + c_n$ eine Menge von atomaren arithmetischen Formeln, wobei die v_i und u_i Variablen (oder 0) und die c_i ganzzahlige Konstanten sind, und $\mathcal{G}$ der Graph, der die Ordnungsrelation zwischen den Variablen von Γ beschreibt.
Zeigen Sie, daß Γ genau dann widersprüchlich ist, wenn $\mathcal{G}$ einen positiven Zyklus besitzt.

Aufgabe 2.4

Beweisen Sie die Gültigkeit der Formel

$$\forall a, b: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}. \forall c, d, e, f: \mathbb{Z}. \quad d = e \Rightarrow a(b(d, f), c) = a(b(e, f), c)$$

ohne Verwendung der `equality` Regel.

Hinweis: Verwenden Sie Tacticals wie `THEN`, `Repeat` etc. und gehen Sie davon aus, daß die Tactic `Wf` alle hierbei anfallenden Wohlgeformtheitsziele lösen kann.