Übung zur Vorlesung

Inferenzmethoden

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Wintersemester 2006/07

Blatt 1 — Abgabetermin: —

Das erste Übungsblatt soll dazu dienen, ein Gefühl für die *Semantik* und *Kalküle* der Prädikatenlogik zu erarbeiten. Dazu soll weniger das Knacken von harten Nüssen dienen sondern vielmehr das Herumspielen mit einfachen Fragestellungen.

Aufgabe 1.1 (Prädikatenlogik: Semantik I)

Es seien:

$\mathcal{V} = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}$
$\mathcal{F} = \{\mathtt{+}, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}, \ldots\}$
$\mathcal{P} = \{\mathtt{=}\}$

unter folgender (nicht–Standard) Interpretation ι:

$\mathcal{U} = \mathbb{N}_\omega^\Omega$, die Menge der natürlichen Zahlen (mit Null) ergänzt um zwei Elemente Ω und ω

$\iota(\mathtt{x}) = \iota(\mathtt{y}) = \iota(\mathtt{z}) =$ Null

$\iota(\mathtt{0}), \iota(\mathtt{1}), \ldots =$ Null, Eins,...

$\iota(\mathtt{+}) = \oplus$

$\iota(\mathtt{=}) =$ Die übliche Gleichheit

Dabei sei die zweistellige Funktion $\oplus$ wie folgt definiert, wobei $i, j \in \mathbb{N} \setminus \{\Omega, \omega\}$ gilt und mit "+" die gewöhnliche Addition auf natürlichen Zahlen gemeint ist:

$\oplus$	j	ω	Ω
i	$i+j$	Ω	ω
ω	ω	Ω	ω
Ω	Ω	Ω	ω

Welche der folgenden prädikatenlogischen Ausdrücke ist semantisch wahr unter ι:

1.1–a $\forall$x $\neg$(x=x+1)

1.1–b $\forall$x,y x+1=y+1 $\Rightarrow$ x=y

1.1–c $\forall$x x+0=x

1.1–d $\forall$x 0+x=x

1.1–e $\forall$x $\neg$(0=x+1)

1.1–f $\forall$x $\neg$(x=0) $\Rightarrow$ $\exists$y x=y+1

1.1–g $\forall$x,y,z x+(y+z)=(x+y)+z

1.1–h $\forall$x,y x+y=y+x

1.1–i $\forall$x,y 0+x=x $\Rightarrow$ (0+x)+y=x+(y+0)

Aufgabe 1.2 (Prädikatenlogik: Semantik II)

Welche der folgenden Formeln sind gültig oder erfüllbar

1.2–a ($\exists$x Px $\wedge$ Qx) $\Rightarrow$ ($\exists$x Px) $\wedge$ ($\exists$x Qx)

1.2–b ($\exists$x Px) $\wedge$ ($\exists$x Qx) $\Rightarrow$ ($\exists$x Px $\wedge$ Qx)

1.2–c $\neg$($\exists$x Px $\Rightarrow$ $\forall$x Px)

1.2–d $\neg$($\exists$x Px) $\Rightarrow$ $\forall$x Px

Erklären Sie Ihre Antwort mittels Interpretionen

Aufgabe 1.3 (Etwas zum Tüfteln)

Die Formel $(\forall x \exists y\ x<y) \land \neg(\exists x\ x<x) \land \forall xyz\ ((x<y \land y<z) \Rightarrow x<z)$ ist erfüllbar in der Standardinterpretation der natürlichen Zahlen. Begründen Sie, warum die Formel nicht über einem endlichen Universum erfüllbar sein kann.

Aufgabe 1.4 (Substitution)

Führen Sie die folgenden Substitutionen durch :

1.4–a $(\exists y\ P(x,y,z) \Rightarrow \forall z\ Q(x,y,z))[f(a)/x]$

1.4–b $(\exists y\ P(x,y,z) \Rightarrow \forall z\ Q(x,y,z))[f(a)/z]$

1.4–c $(\exists y\ P(x,y,z) \Rightarrow \forall z\ Q(x,y,z))[f(a)/y]$

1.4–d $(\exists y\ P(x,y,z) \Rightarrow \forall z\ Q(x,y,z))[f(z)/x]$

1.4–e $(\exists y\ P(x,y,z) \Rightarrow \forall z\ Q(x,y,z))[f(y)/z]$

1.4–f $(\exists y\ P(x,y,z) \Rightarrow \forall z\ Q(x,y,z))[f(x)/z]$

Aufgabe 1.5 (Logik–Kalküle)

Beweisen Sie die folgenden Formeln im Frege-Hilbert Kalkül, im Kalkül des natürlichen Schließens $\mathcal{NK}$, im Sequenzenkalkül $\mathcal{NK}$ (jeweils nur die erste Formel), in Refinement Logic, und im Tableaux-Kalkül.

1.5–a $A \lor B \Rightarrow \neg(\neg A \land \neg B)$

1.5–b $\exists x\ \neg Px \Rightarrow \neg(\forall x\ Px)$

Lösung 1.1 *Ziel dieser Aufgabe ist es, den Sinn und die Anwendungen von Semantik mit Hilfe von Interpretationen zu illustrieren. Überdies soll gleichzeitig vermittelt werden, wie schnell die syntaktische Erscheinungsform eine Bedeutung suggeriert, die mitunter von der intendierten Interpretation abweicht. Hier die Lösungen im einzelnen:*

1.1–a $\iota(\forall \mathtt{x}\ \neg(\mathtt{x=x+1}))$: **nicht** wahr. *Gegenbeispiel:* $\iota_{\mathtt{x}}^{\Omega}$ *oder auch* ι_{x}^{ω}.

1.1–b $\iota(\forall \mathtt{x,y}\ \mathtt{x+1=y+1} \Rightarrow \mathtt{x=y})$: wahr.

1.1–c $\iota(\forall \mathtt{x}\ \mathtt{x+0=x})$: wahr.

1.1–d $\iota(\forall \mathtt{x}\ \mathtt{0+x=x})$: **nicht** wahr. *Gegenbeispiel:* $\iota_{\mathtt{x}}^{\Omega}$ *oder auch* $\iota_{\mathtt{x}}^{\omega}$.

1.1–e $\iota(\forall \mathtt{x}\ \neg(\mathtt{0=x+1}))$: wahr.

1.1–f $\iota(\forall \mathtt{x}\ \neg(\mathtt{x=0}) \Rightarrow \exists \mathtt{y}\ \mathtt{x=y+1})$: wahr.

1.1–g $\iota(\forall \mathtt{x,y,z}\ \mathtt{x+(y+z)=(x+y)+z})$: **nicht** wahr. *Gegenbeispiel:* $(\iota_{\mathtt{y}}^{\Omega})_{\mathtt{z}}^{\omega}$

1.1–h $\iota(\forall \mathtt{x,y}\ \mathtt{x+y=y+x})$: **nicht** wahr. *Gegenbeispiel:* $(\iota_{\mathtt{x}}^{\omega})_{\mathtt{y}}^{\Omega}$.

1.1–i $\iota(\forall \mathtt{x,y}\ \mathtt{0+x=x} \Rightarrow \mathtt{(0+x)+y=x+(y+0)})$: wahr.

Lösung 1.2

1.2–a $(\exists \mathtt{x}\ \mathtt{Px} \wedge \mathtt{Qx}) \Rightarrow (\exists \mathtt{x}\ \mathtt{Px}) \wedge (\exists \mathtt{x}\ \mathtt{Qx})$ gültig

Wenn ι die Formel $\exists \mathtt{x}\ \mathtt{Px} \wedge \mathtt{Qx}$ wahr macht, dann muß ι_x^u für ein $u \in \mathcal{U}$ die Formel $\mathtt{Px} \wedge \mathtt{Qx}$ wahr machen. Für dieses u wird dann auch $\mathtt{Px}$ und $\mathtt{Qx}$ unter ι_x^u wahr, also sind $\exists \mathtt{x}\ \mathtt{Px}$ und $\exists \mathtt{x}\ \mathtt{Qx}$ wahr unter ι. Da ι in obigem Argument beliebig wahr, ist die Formel $(\exists \mathtt{x}\ \mathtt{Px} \wedge \mathtt{Qx}) \Rightarrow (\exists \mathtt{x}\ \mathtt{Px}) \wedge (\exists \mathtt{x}\ \mathtt{Qx})$ allgemeingültig.

1.2–b $(\exists \mathtt{x}\ \mathtt{Px}) \wedge (\exists \mathtt{x}\ \mathtt{Qx}) \Rightarrow (\exists \mathtt{x}\ \mathtt{Px} \wedge \mathtt{Qx})$ nicht gültig aber erfüllbar

Die Aussage wird wahr, wenn z.B. `P` und `Q` identisch interpretiert werden.

Sie wird falsch wenn z.B. `P x` mit $x = 4$ und `Q x` mit $x = 5$ interpretiert wird.

1.2–c $\neg(\exists \mathtt{x}\ \mathtt{Px} \Rightarrow \forall \mathtt{x}\ \mathtt{Px})$ erfüllbar aber nicht gültig

denn $\exists \mathtt{x}\ \mathtt{Px} \Rightarrow \forall \mathtt{x}\ \mathtt{Px}$ ist erfüllbar im einelementigen Universum oder wenn `P x` konstant mit `wahr` interpretiert wird.

1.2–d $\neg(\exists \mathtt{x}\ \mathtt{Px}) \Rightarrow \forall \mathtt{x}\ \mathtt{Px}$ erfüllbar im leeren Universum

Lösung 1.3 Grobe Idee:

Axiom 1 sagt unter anderem daß es zu jedem Objekt ein größeres gibt und nach Axiom 2 kann dieses nicht das Objekt selbst sein. Axiom 3 verbietet (zusammen mit Axiom 2) die Vergleichbarkeit im Kreis. Damit brauchen wir jedes mal ein neues Element, was größer ist, was die Endlichkeit verletzt.

Lösung 1.4 *Ziel dieser Aufgabe ist es, aufgrund der Entscheidung, welche Auftreten der Variablen frei bzw. gebunden sind, den jeweils vorliegenden Fall für die Substitutionsregeln zu erkennen:*

1.4–a
$$\begin{aligned} & (\exists \mathtt{y}\ \mathtt{P(x,y,z)} \ \Rightarrow\ \forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y,z)})[\mathtt{f(a)}/\mathtt{x}] \\ = \ & \exists \mathtt{y}\ (\mathtt{P(x,y,z)})[\mathtt{f(a)}/\mathtt{x}] \Rightarrow (\forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y,z)})[\mathtt{f(a)}/\mathtt{x}] \\ = \ & \exists \mathtt{y}\ \mathtt{P(f(a),y,z)} \ \Rightarrow\ \forall \mathtt{z}\ (\mathtt{Q(x,y,z)})[\mathtt{f(a)}/\mathtt{x}] \\ = \ & \exists \mathtt{y}\ \mathtt{P(f(a),y,z)} \ \Rightarrow\ \forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(f(a),y,z)} \end{aligned}$$

1.4–b
$$\begin{aligned} & (\exists \mathtt{y}\ \mathtt{P(x,y,z)} \ \Rightarrow\ \forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y,z)})[\mathtt{f(a)}/\mathtt{z}] \\ = \ & \exists \mathtt{y}\ (\mathtt{P(x,y,z)})[\mathtt{f(a)}/\mathtt{z}] \Rightarrow (\forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y,z)})[\mathtt{f(a)}/\mathtt{z}] \\ = \ & \exists \mathtt{y}\ \mathtt{P(x,y,f(a))} \ \Rightarrow\ \forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y,z)} \end{aligned}$$

1.4–c
$$\begin{aligned} & (\exists \mathtt{y}\ \mathtt{P(x,y,z)} \ \Rightarrow\ \forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y,z)})[\mathtt{f(a)}/\mathtt{y}] \\ = \ & \exists \mathtt{y}\ \mathtt{P(x,y,z)} \ \Rightarrow\ \forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y,z)} \end{aligned}$$

1.4–d
$$\begin{aligned} & (\exists \mathtt{y}\ \mathtt{P(x,y,z)} \ \Rightarrow\ \forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y,z)})[\mathtt{f(z)}/\mathtt{x}] \\ = \ & \exists \mathtt{y}\ (\mathtt{P(x,y,z)})[\mathtt{f(z)}/\mathtt{x}] \Rightarrow (\forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y,z)})[\mathtt{f(z)}/\mathtt{x}] \\ = \ & \exists \mathtt{y}\ \mathtt{P(f(z),y,z)} \Rightarrow (\forall \mathtt{z'}\ (\mathtt{Q(x,y,z)})[\mathtt{z'}/\mathtt{z}])[\mathtt{f(z)}/\mathtt{x}] \\ = \ & \exists \mathtt{y}\ \mathtt{P(f(z),y,z)} \ \Rightarrow\ \forall \mathtt{z'}\ (\mathtt{Q(x,y,z')})[\mathtt{f(z)}/\mathtt{x}] \\ = \ & \exists \mathtt{y}\ \mathtt{P(f(z),y,z)} \ \Rightarrow\ \forall \mathtt{z'}\ \mathtt{Q(f(z),y,z')} \end{aligned}$$

1.4–e
$$\begin{aligned} & (\exists \mathtt{y}\ \mathtt{P(x,y,z)} \ \Rightarrow\ \forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y,z)})[\mathtt{f(y)}/\mathtt{z}] \\ = \ & (\exists \mathtt{y'}\ (\mathtt{P(x,y,z)} \ \Rightarrow\ \forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y,z)})[\mathtt{y'}/\mathtt{y}])[\mathtt{f(y)}/\mathtt{z}] \\ = \ & (\exists \mathtt{y'}\ (\mathtt{P(x,y,z)})[\mathtt{y'}/\mathtt{y}] \Rightarrow (\forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y,z)})[\mathtt{y'}/\mathtt{y}])[\mathtt{f(y)}/\mathtt{z}] \\ = \ & (\exists \mathtt{y'}\ \mathtt{P(x,y',z)} \Rightarrow \forall (\mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y,z)})[\mathtt{y'}/\mathtt{y}])[\mathtt{f(y)}/\mathtt{z}] \\ = \ & (\exists \mathtt{y'}\ \mathtt{P(x,y',z)} \ \Rightarrow\ \forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y',z)})[\mathtt{f(y)}/\mathtt{z}] \\ = \ & \exists \mathtt{y'}\ (\mathtt{P(x,y',z)})[\mathtt{f(y)}/\mathtt{z}] \Rightarrow (\forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y',z)})[\mathtt{f(y)}/\mathtt{z}] \\ = \ & \exists \mathtt{y'}\ \mathtt{P(x,y',f(y))} \ \Rightarrow\ \forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y',z)} \end{aligned}$$

1.4–f
$$\begin{aligned} & (\exists \mathtt{y}\ \mathtt{P(x,y,z)} \ \Rightarrow\ \forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y,z)})[\mathtt{f(x)}/\mathtt{z}] \\ = \ & \exists \mathtt{y}\ (\mathtt{P(x,y,z)})[\mathtt{f(x)}/\mathtt{z}] \Rightarrow (\forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y,z)})[\mathtt{f(x)}/\mathtt{z}] \\ = \ & \exists \mathtt{y}\ \mathtt{P(x,y,f(x))} \ \Rightarrow\ \forall \mathtt{z}\ \mathtt{Q(x,y,z)} \end{aligned}$$

Lösung 1.5 *Ziel dieser Aufgabe ist es die verschiedenen Formen der Logik–Kalküle in bezug auf deren Stärken und Schwächen kennenzulernen. Daneben soll natürlich der Zusammenhang zwischen semantischer Gültigkeit und syntaktischer Ableitbarkeit erfahren werden können.*

Die formalen Beweise sind am leichtesten herzuleiten, wenn man mit dem Tableauxbeweis oder dem analytischen Sequenzenbeweis beginnt. Sie sind etwas zeichenintensiv und werden vielleicht gegen Ende des Semesters erzeugt ... wenn ich die Zeit finde.

1.5–a $A \vee B \;\Rightarrow\; \neg(\neg A \wedge \neg B)$

Refinement Logic

$\vdash$ A ∨ B ⇒ ¬(¬A ∧ ¬B)	BY impI
1. A ∨ B $\vdash$ ¬(¬A ∧ ¬B)	BY notI
1.1. A ∨ B, ¬A ∧ ¬B $\vdash$ ff	BY andE 2
1.1.1. A ∨ B, ¬A, ¬B $\vdash$ ff	BY orE 1
1.1.1.1. A, ¬A, ¬B $\vdash$ ff	BY notE 2
1.1.1.1.1. A, ¬A, ¬B $\vdash$ A	BY hypothesis 1
1.1.1.2. B, ¬A, ¬B $\vdash$	BY notE 3
1.1.1.1.1. A, ¬A, ¬B $\vdash$ B	BY hypothesis 1

Tableaux-Beweis

$A \vee B \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)^F$	α
$\neg(\neg A \wedge \neg B)^F$	α
$A \vee B^T$	β
$\neg A \wedge \neg B^T$	α
$\neg A^T$	α
$\neg B^T$	α
A^F	
B^F	
B^T B^T	
× ×	

Der Frege-Hilbert Beweis ist am tückischsten zu finden. Man muß zunächst $A \Rightarrow \neg\neg A$ beweisen, dann $\neg\neg A \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$, dasselbe für B.

(1)	$(A \wedge \neg A) \Rightarrow (A \wedge \neg\neg A))$	*(A 16)*
(2)	$(A \wedge \neg A) \Rightarrow (A \wedge \neg\neg A)) \Rightarrow A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (A \wedge \neg\neg A))$	*(A 18)*
(3)	$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (A \wedge \neg\neg A))$	*modus ponens (1,2)*
(4)	$(\neg A \Rightarrow (A \wedge \neg\neg A)) \Rightarrow \neg\neg A)$	*(A 19)*
(5)	$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (A \wedge \neg\neg A)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (A \wedge \neg\neg A)) \Rightarrow \neg\neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)$	*(A 3)*
(6)	$(A \Rightarrow \neg\neg A)$	*2xmodus ponens (3,4,5)*
(7)	$((\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A)$	*(A 8)*
(8)	$((\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B))$	*(A 15)*
(9)	$(\neg\neg A \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B))$	*modus ponens (7,8)*
(10)	$(A \Rightarrow \neg\neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B))$	*(A 3)*
(11)	$(A \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B))$	*2xmodus ponens (6,9,10)*
(12)	$(B \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B))$	*ANALOG*
(13)	$(A \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B))$	*(A 7)*
(14)	$A \vee B \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	*2xmodus ponens (11,12,13)*

1.5–b `∃x ¬Px ⇒ ¬(∀x Px)`

Refinement Logic

```
⊢ ∃x ¬Px ⇒ ¬(∀x Px)                                    BY impI
1.   ∃x ¬Px ⊢ ¬(∀x Px)                                 BY notI
1.1.   ∃x ¬Px, (∀x Px) ⊢ ff                            BY exE 1
1.1.1.   ¬Pa, (∀x Px) ⊢ ff                             BY notE 1
1.1.1.1.   ¬Pa, (∀x Px) ⊢ Pa                           BY allE 2 a
1.1.1.1.1.  ¬Pa, (∀x Px), Pa ⊢ Pa                      BY hypothesis 1
```

Tableaux

$\exists x \neg Px \Rightarrow \neg(\forall x Px)^F$	α
$\exists x \neg Px^T$	$\delta(a)$
$\neg(\forall x Px)^F$	α
$(\forall x Px)^T$	$\gamma(a)$
$\neg Pa^T$	α
Pa^F	
Pa^T	
$\times$	