Übung zur Vorlesung

Inferenzmethoden

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Wintersemester 2006/07

Blatt 2 — Abgabetermin: —

Aufgabe 2.1 (Eigenschaften der Logik erster Stufe)

Beweisen Sie den Satz von Löwenheim: *In der der Logik erster Stufe kann jede erfüllbare Formel in einem abzählbaren Universum erfüllt werden.*

Was bedeutet dieser Satz für die Anwendbarkeit der Logik erster Stufe?

Aufgabe 2.2 (Matrix-Beweise)

Beweise folgende Formeln im Matrix-Kalkül.

Stellen Sie dazu zunächst den annotierten Formelbaum und die zugehörige zweidimensionale Matrixdarstellung auf. Identifizieren Sie alle Konnektionen und alle Pfade durch die Matrix. Zeigen Sie, daß alle Pfade eine solche Konnektion enthalten und geben Sie eine zulässige Substitution an, welche diese Konnektionen komplementär macht.

2.2–a $\mathtt{A} \vee \mathtt{B} \;\Rightarrow\; \neg(\neg\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{B})$

2.2–b $\exists\mathtt{x}\ \neg\mathtt{Px} \;\Rightarrow\; \neg(\forall\mathtt{x}\ \mathtt{Px})$

2.2–c $(\forall \mathtt{x,y,z}\ \mathtt{S(x,y)} \wedge \mathtt{S(y,z)} \;\Rightarrow\; \mathtt{G(x,z)})$
$\wedge\ (\forall \mathtt{x,y}\ \mathtt{G(x,y)} \;\Rightarrow\; \mathtt{S(x,y)})$
$\Rightarrow\ \forall \mathtt{a,b,c,d}\ (\mathtt{S(a,b)} \wedge \mathtt{S(c,d)} \wedge \mathtt{S(b,c)} \;\Rightarrow\; (\exists \mathtt{u}\ \mathtt{G(a,u)}))$

2.2–d $(\forall \mathtt{x,y,z}\ \mathtt{S(x,y)} \wedge \mathtt{S(y,z)} \;\Rightarrow\; \mathtt{G(x,z)})$
$\wedge\ (\forall \mathtt{x,y}\ \mathtt{G(x,y)} \;\Rightarrow\; \mathtt{S(x,y)})$
$\Rightarrow\ \forall \mathtt{a,b,c,d}\ (\mathtt{S(a,b)} \wedge \mathtt{S(c,d)} \wedge \mathtt{S(b,c)} \;\Rightarrow\; \mathtt{G(a,d)})$

Konstruieren Sie aus dem fertigen Matrixbeweis die induzierte Reduktionsordnung, linearisieren Sie diese und erzeugen Sie daraus einen Tableauxbeweis.

Aufgabe 2.3 (Logik-Puzzle)

Lösen Sie das sogenannte "Agatha Murder Puzzle" mithilfe des Matrix-Verfahrens.

```
1.  Agatha hates Charles
2.  Agatha hates herself
3.  If a person is not richer than Agatha then the Butler hates that person
4.  If Agatha hates somebody then Charles does not hate that person
5.  If Agatha hates somebody then the Butler hates that person too
6.  Everyone likes at least one of Agatha, the Butler, or Charles
7.  Nobody kills a person that is not richer
8.  If you kill someone, you must hate that person

Agatha is dead
Show that neither Charles nor the Butler killed her
```

Versuchen Sie zunächst ein informales, logisches Argument. Formulieren Sie dann obige Aussagen in der Logik erster Stufe und konstruieren Sie daraus schrittweise den Matrixbeweis.

Lösung 2.1 Zum Beweis des Satzes von Löwenheim verwenden wir Teile des Vollständigkeitsbeweises für analytische Tableaux.

Es sei X eine erfüllbare Formel. Dann können wir für X ein vollständiges Tableau $\mathcal{T}$ mit der systematischen Beweismethode konstruieren. Da X erfüllbar ist, kann $\mathcal{T}$ nicht geschlossen sein, besitzt also mindestens einen Zweig θ, der eine Hintikka Folge ist. Wie im Vollständigkeitsbeweis gezeigt, ist θ damit erfüllbar durch eine Interpretation über dem Universum der Terme, also über einem abzählbaren Universum. Da X zum Zweig θ gehört, ist X über demselben Universum erfüllbar.

Bedeutung: Logik erster Stufe kann überabzählbare Universen nicht von abzählbaren trennen. Für alle (logischen) Aussagen, die über den reellen Zahlen nicht gelten, gibt es bereits ein abzählbares Gegenmodell (z.B. über den rationalen Zahlen).

Anmerkungen:

1. Das Argument hier ignoriert die Tatsache, daß wir Tableaux bisher nur mit signierten Formeln diskutiert haben und die Beweise nur über die Formel X^F geführt haben. Man kann aber die Vorzeichen fallen lassen (eines dabei durch Negation ersetzen) ohne daß sich das Argument des Beweises ändert.

2. Ich habe die Aussage eines Teilbeweises im Vollständigkeitsbeweis verallgemeinert. Statt *X gültig $\Rightarrow$ X^F hat vollständiges Tableau*, benötigen wir *für jede Formel X hat X^F hat vollständiges Tableau*. Ein Blick auf die systematische Methode zeigt, daß die Gültigkeit für die Konstruktion des vollständiges Tableaus nicht benötigt wird.

Lösung 2.2

$$\begin{bmatrix} \mathtt{A}^T & \mathtt{A}^F & \mathtt{B}^T \\ \mathtt{B}^T & & \end{bmatrix}$$

2.2–a $\mathtt{A} \vee \mathtt{B} \;\Rightarrow\; \neg(\neg\mathtt{A} \wedge \neg\mathtt{B})$

$$\begin{bmatrix} \mathtt{P}\ \mathtt{a}^F & \mathtt{P}\ x^T \end{bmatrix}$$

2.2–b $\exists\mathtt{x}\ \neg\mathtt{Px} \;\Rightarrow\; \neg(\forall\mathtt{x}\ \mathtt{Px})$

$\mathtt{a}$ ist δ-Variable, $\sigma = [\mathtt{a}/x]$

2.2–c $(\forall\mathtt{x,y,z}\ \mathtt{S(x,y)} \wedge \mathtt{S(y,z)} \;\Rightarrow\; \mathtt{G(x,z)})$

$\wedge\ (\forall\mathtt{x,y}\ \mathtt{G(x,y)} \;\Rightarrow\; \mathtt{S(x,y)})$

$\Rightarrow\ \forall\mathtt{a,b,c,d}\ (\mathtt{S(a,b)} \wedge \mathtt{S(c,d)} \wedge \mathtt{S(b,c)} \;\Rightarrow\; (\exists\mathtt{u}\ \mathtt{G(a,u)}))$

$$\begin{bmatrix} \mathtt{S}(x,y)^F & \mathtt{G}(x,y)^F & \mathtt{S(a,b)}^T & \mathtt{S(c,d)}^T & \mathtt{S(b,c)}^T & \mathtt{G}(\mathtt{a},u)^F \\ \mathtt{S}(y,z)^F & \mathtt{S}(x,y)^T & & & & \\ \mathtt{G}(x,z)^T & & & & & \end{bmatrix}$$

$\mathtt{a,b,c,d}$ sind δ-Variablen, $\sigma = [\mathtt{a}/x, \mathtt{b}/y, \mathtt{c}/z, \mathtt{c}/u]$

2.2–d $(\forall\mathtt{x,y,z}\ \mathtt{S(x,y)} \wedge \mathtt{S(y,z)} \;\Rightarrow\; \mathtt{G(x,z)})$

$\wedge\ (\forall\mathtt{x,y}\ \mathtt{G(x,y)} \;\Rightarrow\; \mathtt{S(x,y)})$

$\Rightarrow\ \forall\mathtt{a,b,c,d}\ (\mathtt{S(a,b)} \wedge \mathtt{S(c,d)} \wedge \mathtt{S(b,c)} \;\Rightarrow\; \mathtt{G(a,d)})$

Hier ist eine Klauselkopie erforderlich

$$\begin{bmatrix} \mathtt{S}(x,y)^F & \mathtt{G}(x',y')^F & \mathtt{S(a,b)}^T & \mathtt{S(c,d)}^T & \mathtt{S(b,c)}^T & \mathtt{G(a,d)}^F \\ \mathtt{S}(y,z)^F & \mathtt{S}(x',y')^T & & & & \\ \mathtt{G}(x,z)^T & & & & & \end{bmatrix}$$

$\mathtt{a,b,c,d}$ sind δ-Variablen, $\sigma = [\mathtt{a}/x^1, \mathtt{c}/y^1, \mathtt{d}/z^1, \mathtt{a}/x', \mathtt{c}/y' \mathtt{a}/x^2, \mathtt{b}/y^2, \mathtt{c}/z^2]$

Mit diesen Konnektionen sind alle Pfade abgedeckt

Lösung 2.3

Informal: Wenn Charles der Mörder wäre, müsste er Agatha hassen (8). Da Agatha sich selbst haßt (2) kann Charles sie nicht hassen (4).

Wenn der Butler der Mörder wäre, dann wäre Agatha reicher als er (7). Damit müsste der Buter sich selbst hassen (3). Außerdem haßt er Agatha und Charles, weil Agatha diese beiden haßt (1,2) und der Butler loyal ist (5). Damit ist Voraussetzung (6) verletzt ... der Buler mag weder Agatha, noch Charles, noch sich selbst.

Ausformuliert:

```
  Agatha hates Charles
∧ Agatha hates Agatha
∧ ∀p ¬(p is richer than Agatha) ⇒ The Butler hates p
∧ ∀p Agatha hates p ⇒ ¬(Charles hates p)
∧ ∀p Agatha hates p ⇒ The Butler hates p
∧ ∀p p likes Agatha ∨ p likes The Butler ∨ p likes Charles
∧ ∀p,q  p kills q ⇒ ¬(p is richer than q)
∧ ∀p,q  p kills q ⇒ p hates q
∧ ∀p,q  p likes q ⇔ ¬(p hates q)
⇒ ¬(The Butler kills Agatha) ∧ ¬(Charles kills Agatha)
```

Vereinfacht

```
  H(a,c)
∧ H(a,a)
∧ ∀p ¬R(p,a)  ⇒  H(b,p)
∧ ∀p H(a,p)   ⇒  ¬H(c,p)
∧ ∀p H(a,p)   ⇒  H(b,p)
∧ ∀p ¬H(p,a)  ∨  ¬H(p,b)  ∨ ¬H(p,c)
∧ ∀p,q  K(p,q)  ⇒  ¬R(p,q)
∧ ∀p,q  K(p,q)  ⇒  H,p,q)
⇒ ¬K(b,a) ∧ ¬K(c,a)
```

Im Matrixbeweis muß eine Klauselkopie eingesetzt werden

$$\left[\begin{array}{ccccccccc}
\mathtt{H(a,c)}^T & \mathtt{H(a,a)}^T & \mathtt{R}(p,\mathtt{a})^T & \mathtt{H(a,}p_1)^F & \mathtt{H(a,}p_2)^F & \mathtt{H}(p_3,\mathtt{a})^F & \mathtt{K}(p_4,q)^F & \mathtt{K}(p_5,q_1)^F & \mathtt{K(b,a)}^T \\
 & & \mathtt{H(b,}p)^T & \mathtt{H(c,}p_1)^F & \mathtt{H(b,}p_2)^T & \mathtt{H}(p_3,\mathtt{b})^F & \mathtt{R}(p_4,q)^F & \mathtt{H}(p_5,q_1)^T & \mathtt{K(c,a)}^T \\
 & & & & & \mathtt{H}(p_3,\mathtt{c})^F & & &
\end{array}\right]$$

Es gibt nur γ-Variablen und Konstanten, $\sigma = [\mathtt{c}/p_5, \mathtt{a}/q_1, \mathtt{a}/p_1, \mathtt{b}/p_4, \mathtt{a}/q, \mathtt{b}/p, \mathtt{b}/p_3, \mathtt{a}/p_2^1, \mathtt{c}/p_2^2]$