Inferenzmethoden

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Wintersemester 2006/07

Blatt 5 — Abgabetermin: —

Aufgabe 5.1 (Reduktionen)

Wenden Sie die Reduktionen MULT, PURE, TAUT, SUBS, UNIT, ISOL auf die folgende Matrix solange an, bis diese nicht weiter reduziert werden kann.

$$\begin{bmatrix} \neg C & C & C & A & D & \neg D & F & H & \neg D & H & C \\ \neg A & \neg D & \neg F & H & C & E & \neg A & \neg A & \neg C & C & \neg D \\ & H & & & \neg A & & & & & \neg E & \\ & & & & \neg H & & & & & & \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5.2 (Davis-Putnam Verfahren)

Zeigen Sie mit dem Davis-Putnam-Verfahren, daß die folgende Matrix allgemeingültig ist.

$$\begin{bmatrix} A & \neg A & \neg A & A & \neg A & A \\ B & \neg B & B & \neg B & \neg B & \neg B \\ & \neg C & & \neg C & C & C \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5.3 (CLIN)

Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Matrizen mit Hilfe des Verfahrens CLIN.

$$\begin{bmatrix} P(x)^T & P(y)^F & P(ffz)^F \\ & P(fy)^T & P(fa)^F \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} Q(a,b,c,d)^T & Q(x,y,z,v)^F & Q(c,d,a,b)^F & Q(b,c,d,a)^F \\ & Q(v,x,y,z)^T & & \\ & Q(z,v,x,y)^T & & \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5.4 (Pigeonhole Prinzip / Schubfachprinzip)

Gegeben sei die (unendliche) Sequenz $P_1, P_2, \ldots$ von Mengen von Klauseln wobei P_n für $n > 0$ definiert ist als $P_n = (\bigcup_{i=1}^{n+1} \{\{\overline{x_{1i}}, \ldots, \overline{x_{ni}}\}\}) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{1 \leq j < k \leq n+1} \{\{x_{ij}, x_{ik}\}\})$.

Interpretiert man die aussagenlogische Variable x_{ij} als 'Das Loch i ist durch die Taube j belegt', dann formalisiert P_n die Aussage, daß $n+1$ Tauben nicht in n Löcher passen.

5.4–a Geben Sie P_2 und P_3 als Matrix an.

5.4–b Beweisen Sie die Gütltigkeit von P_2. Wählen Sie dazu $\{\overline{x_{11}}, \overline{x_{21}}\}$ als Startklausel.

5.4–c Zeigen Sie über ein Symmetrieargument, daß bereits der Beweis von $\overline{x_{11}}$ einen Beweis für die gesamte Matrix darstellt.

Aufgabe 5.5 (Gleichheitsaxiome)

$$
\begin{array}{ll}
x \doteq x & \text{Reflexivität} \\
x \doteq y \Rightarrow y \doteq x & \text{Symmetrie} \\
x \doteq y \wedge y \doteq z \Rightarrow x \doteq z & \text{Transitivität} \\
x_i \doteq y \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \doteq f(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n) & \text{Substitutivität} \\
x_i \doteq y \Rightarrow [P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \Leftrightarrow P(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n)] & \text{Substitutivität}
\end{array}
$$

Die obenstehenden Axiome können für Beweise mit Gleichheiten zu einer Formel hinzugefügt werden. Begründen Sie, weshalb statt dieser Axiomenmenge stets auch die folgende ausreicht, um einen Beweis einer tautologischen Formel zu finden.

$$
\begin{array}{ll}
x \doteq x & \text{Reflexivität} \\
x_i \doteq y \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \doteq f(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n) & \text{Substitutivität} \\
x_i \doteq y \Rightarrow [P(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \Rightarrow P(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n)] & \text{Substitutivität}
\end{array}
$$

Aufgabe 5.6 (Gleichheitskonnektionen)

Es sei $\circ$ eine zweistellige Funktion. Repräsentieren Sie die folgenden Formeln als Matrix und beweisen Sie diese mit Hilfe des allgemeinen Extensionsverfahrens (a) unter Hinzunahme benötigter Gleichheitsaxiome bzw. (b) unter Verwendung von Gleichheitskonnektionen.

$$(\forall x\, Px \vee Qx) \wedge \neg Pa \wedge a \doteq b \;\Rightarrow\; Qb \tag{1}$$

$$Pa \wedge a \doteq fb \wedge (\forall x Px \Rightarrow Pfx) \;\Rightarrow\; Pfffb \tag{2}$$

$$f(a,b) \doteq c \wedge (\forall xy\, f(x,y) \doteq f(y,x)) \wedge (\forall z\, f(c,z) \doteq b) \;\Rightarrow\; f(a, f(b,a)) \doteq b \tag{3}$$

$$(\forall xyz\;\, x \circ y \doteq y \circ x \wedge z \circ e_1 \doteq z \wedge z \circ e_2 \doteq z) \;\Rightarrow\; e_1 \doteq e_2 \tag{4}$$

Aufgabe 5.7 (Paramodulation und Resolution)

Repräsentieren Sie folgenden Formeln in Klauselnormalform und beweisen Sie die so erhaltenen Formeln mit Hilfe (a) der Paramodulation bzw. (b)der E-Resolution.

(1) $(\forall x\, f(a,x) \doteq b) \wedge P(a,b) \wedge (\forall y\, \neg P(a,y) \vee Q(b,y)) \;\Rightarrow\; Q(b, f(a,c))$

(2) $(\forall x\, g(x) \doteq i(x)) \wedge b \doteq a \wedge (\forall y\, h(y, f(b,y)) \doteq g(y)) \;\Rightarrow\; h(b, f(a,b)) \doteq i(b)$

(3) $P(a,b) \wedge (\forall v\, \neg P(v,v) \vee Q(fc, fv)) \wedge a \doteq fc \wedge (\forall w\, \neg Q(w, fb) \vee R(w,b)) \wedge (\forall x\, \neg R(b,x))$
$\Rightarrow\; (\exists y\, (Pfy, y) \wedge \neg R(b,y)) \vee \exists z\, (b \not\doteq f(z)))$

Lösung 5.0

Wegen des großen Aufwands, Lösungen in LaTeXzu erstellen, gibt es zu manchen Aufgaben bisher nur handschriftliche Lösungen, die in den Übungsstunden vorgeführt wurden. Die hier angegebenen Lösungen sind vorläufig noch unvollständig und vor allem noch nicht auf die Denkweise der Polaritäten angepaßt. Ersetzen Sie Negationen durch die Polarität ^{F} und geben Sie anderen Literale entsprechend die Polarität ^{T}.

Lösung 5.1

$$\left[\begin{array}{ccccccccccc} C & \neg C & A & C & D & F & \neg D & H & \neg D & H & C \\ \neg D & \neg A & H & \neg F & C & \neg A & E & \neg A & \neg C & C & \neg D \\ H & & & & \neg A & & & & & \neg E & \\ & & & & \neg H & & & & & & \\ & & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & & \uparrow & \end{array}\right] \vdash_{ISOL(F),ISOL(E)}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} C & \neg C & A & C & D & \neg D & H & \neg D & C \\ \neg D & \neg A & H & \neg A & C & H & \neg A & \neg C & \neg D \\ H & & & & \neg A & C & & & \\ & & & & \neg H & & & & \\ \uparrow & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \end{array}\right] \vdash_{SUBS,SUBS}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} C & \neg C & A & C & H & \neg D & C \\ \neg D & \neg A & H & \neg A & \neg A & \neg C & \neg D \\ H & & & & & & \\ \uparrow & & & & & \uparrow & \uparrow \end{array}\right] \vdash_{PURE(\neg D)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \neg C & A & C & H \\ \neg A & H & \neg A & \neg A \\ \uparrow & & \uparrow & \end{array}\right] \vdash_{ISOL(C),MULT}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \neg A & A & H \\ & H & \neg A \\ & \uparrow & \end{array}\right] \vdash_{PURE(H)}$$

$$\left[\begin{array}{c} \neg A \end{array}\right]$$

Lösung 5.2

$$\begin{bmatrix} A & \neg A & \neg A & A & \neg A & A \\ B & \neg B & B & \neg B & \neg B & \neg B \\ & \neg C & & \neg C & C & C \end{bmatrix} \vdash_{SPLIT(A)}$$

Fall 1:

$$\begin{bmatrix} \neg B & B & \neg B \\ \neg C & & C \end{bmatrix} \vdash_{UNIT(B),UNIT(C)} \begin{bmatrix} \Box & B & C \end{bmatrix}$$

Fall 2:

$$\begin{bmatrix} B & \neg B & \neg B \\ & \neg C & C \end{bmatrix} \vdash_{UNIT(B),UNIT(C)} \begin{bmatrix} B & \Box & C \end{bmatrix}$$

Lösung 5.3

Die Lösung muß noch erarbeitet werden.

Lösung 5.4

5.4–a
$$\begin{bmatrix} \overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{13}} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{21} & x_{22} \\ \overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{23}} & x_{12} & x_{13} & x_{13} & x_{22} & x_{23} & x_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{13}} & \overline{x_{14}} & x_{11} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{21} & x_{21} & x_{22} & x_{22} & x_{23} & x_{31} & x_{31} & x_{31} & x_{32} & x_{32} & x_{33} \\ \overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{23}} & \overline{x_{24}} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{13} & x_{14} & x_{14} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{23} & x_{24} & x_{24} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{33} & x_{34} & x_{34} \\ \overline{x_{31}} & \overline{x_{32}} & \overline{x_{33}} & \overline{x_{34}} & & & & & & & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

5.4–b
$$\begin{bmatrix} \overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{13}} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{21} & x_{22} \\ \overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{23}} & x_{12} & x_{13} & x_{13} & x_{22} & x_{23} & x_{23} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} & \overline{x_{13}} & x_{11} & x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{21} & x_{22} \\ \overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} & \overline{x_{23}} & x_{12} & x_{13} & x_{13} & x_{22} & x_{23} & x_{23} \end{bmatrix}$$

5.4–c Die Beweisketten sind praktisch “dieselben”

Lösung 5.5

5.5–a Die Symmetrie kann mit dem folgenden Substitutivitätsaxiom erzeugt werden, wobei auch das Axiom der Reflexivität benötigt wird:

Aus $x \doteq x$ und $x \doteq y \;\Rightarrow\; (x \doteq x \;\Rightarrow\; y \doteq x)$

folgt $x \doteq y \;\Rightarrow\; y \doteq x$

5.5–b Die Transitivität ergibt sich aus der Symmetrie und dem folgenden Substitutivitätsaxiom:

Aus $x \doteq y \;\Rightarrow\; y \doteq x$ und $y \doteq x \;\Rightarrow\; (y \doteq z \Rightarrow x \doteq z)$

folgt $x \doteq y \;\Rightarrow\; (y \doteq z \Rightarrow x \doteq z)$

5.5–c Die zweite Teil der Äquivalenz im Substitutivitätsschema für Prädikate folgt aus der Anwendung der Symmetrie und der Anwendung der (einseitigen) Substitutivität.

Aus $x_i \doteq y \;\Rightarrow\; y \doteq x_i$ und $y \doteq x_i \Rightarrow [P(x_1,\ldots,y,\ldots,x_n) \Rightarrow P(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)]$

folgt $x_i \doteq y \Rightarrow [P(x_1,\ldots,y,\ldots,x_n) \Rightarrow P(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)]$

und mit $x_i \doteq y \Rightarrow [P(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) \Rightarrow P(x_1,\ldots,y,\ldots,x_n)]$

auch $x_i \doteq y \Rightarrow [P(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) \Leftrightarrow P(x_1,\ldots,y,\ldots,x_n)]$

Lösung 5.6

5.6–a 1. Benötigtes Axiom: $z \doteq y \Rightarrow (Q(z) \Rightarrow Q(y))$

$$\left[\begin{array}{lllll} z \doteq y^F & P(x)^T & P(a)^F & a \doteq b^T & Q(b)^F \\ Q(z)^F & Q(x)^T & & & \\ Q(y)^T & & & & \end{array}\right] \quad [a/x, b/y, a/z]$$

Es bringt wenig, das Axiom $z \doteq y \Rightarrow (P(z) \Rightarrow P(y))$ zu verwenden, da der Beweis dann ohne die Symmetrie der Gleichheit nicht weiterkäme

2. Benötigtes Axiom: $z \doteq y \Rightarrow [P(z) \Rightarrow P(y]$

$$\left[\begin{array}{lllll} P(fffb)^F & Px^F & P(a)^T & a \doteq fb^T & z \doteq y^F \\ & Pfx^T & & & P(z)^F \\ & & & & P(y^T \end{array}\right] \quad [ffb/x_1,\; fb/x_2, a/z, fb/y]$$

3. Benötigte Axiome:
$f(a,b) \doteq f(b,a) \Rightarrow (f(a,f(a,b)) \doteq b \Rightarrow f(a,f(b,a)) \doteq b)$
$f(a,b) \doteq c \Rightarrow (f(a,c) \doteq b \Rightarrow f(a,f(a,b)) \doteq b)$
$f(c,a) \doteq f(a,c) \Rightarrow (f(c,a) \doteq b \Rightarrow f(a,c) \doteq b)$

$$\left[\begin{array}{lllllll} f(a,f(b,a)) \doteq b^F & f(a,b) \doteq f(b,a)^F & f(x,y) \doteq f(y,x)^T & f(a,b) \doteq c^F & f(a,b) \doteq c^T & f(c,a) \doteq f(a,c)^F & f(c,z) \doteq b^T \\ & f(a,f(a,b)) \doteq b^F & & f(a,c) \doteq b^F & & f(c,a) \doteq b^F & \\ & f(a,f(b,a)) \doteq b^F & & f(a,f(a,b)) \doteq b^T & & f(a,c) \doteq b^T & \end{array}\right]$$

$[a/x_1,\ b/y_1,\ c/x_2,\ a/y_2,\ a/z]$

4. Benötigte Axiome:
$e_2{\circ}e_1 \doteq e_2 \Rightarrow (e_1 \doteq e_2{\circ}e_1 \Rightarrow e_1 \doteq e_2)$
$e_2{\circ}e_1 \doteq e_1 \Rightarrow e_1 \doteq e_2{\circ}e_1$ (Symmetrie)
$e_1{\circ}e_2 \doteq e_2{\circ}e_1 \Rightarrow (e_1 \circ e_2 \doteq e_1 \Rightarrow e_2{\circ}e_1 \doteq e_1)$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} e_1 \doteq e_2^{F} & e_2{\circ}e_1 \doteq e_2^{F} & z{\circ}e_1 \doteq z^{T} & e_2{\circ}e_1 \doteq e_1^{F} & e_1{\circ}e_2 \doteq e_2{\circ}e_1^{F} & x{\circ}y \doteq y{\circ}x^{T} & z'{\circ}e_2 \doteq z'^{T} \\ & e_1 \doteq e_2{\circ}e_1^{F} & & e_1 \doteq e_2{\circ}e_1^{T} & e_1{\circ}e_2 \doteq e_1^{F} & & \\ & e_1 \doteq e_2^{T} & & & e_2{\circ}e_1 \doteq e_1^{T} & & \end{array}\right]$$

$[e_2/z,\ e_1/x,\ e_2/y,\ e_1/z']$

5.6–b

1.

$$\left[\begin{array}{cccc} P(x)^{T} & P(a)^{F} & a \doteq b^{T} & Q(b)^{F} \\ Q(x)^{T} & & & \end{array}\right] \quad [a/x]$$

2.

$$\left[\begin{array}{cccc} P(fffb)^{F} & Px^{F} & P(a)^{T} & a \doteq fb^{T} \\ & Pfx^{T} & & \end{array}\right] \quad [ffb/x_1/fb/x_2]$$

3.

$$\left[\begin{array}{cccc} f(a,f(b,a)) \doteq b^{F} & f(x,y) \doteq f(y,x)^{T} & f(a,b) \doteq c^{T} & f(c,z) \doteq b^{T} \end{array}\right]$$

Keine Substitution (nur für interne Verarbeitung der Gleicheitskonnektionen)

4.

$$\left[\begin{array}{cccc} e_1 \doteq e_2^{F} & z{\circ}e_1 \doteq z^{T} & x{\circ}y \doteq y{\circ}x^{T} & z'{\circ}e_2 \doteq z'^{T} \end{array}\right]$$

$[e_2/z,\ e_1/z']$

Lösung 5.7

Die Klauselnormalformen (mit Negation ¬ anstelle des Vorzeichens ^{F}):

(1) $\{f(a,x)\doteq b\}, \{P(a,b)\}, \{\neg P(a,y), Q(b,y)\}\{\neg Q(b,f(a,c)\}$

(2) $\{g(x)\doteq i(x)\}, \{b\doteq a\}, \{h(y,f(b,y))\doteq g(y)\}, \{h(b,f(a,b)) \not\doteq i(b)\}$

(3) $\{P(a,b)\}, \{\neg P(v,v), Q(fc,f(v))\}, \{a\doteq fc\}, \{\neg Q(w,fb), R(w,b)\}, \{\neg R(b,x)\},$

$\{\neg P(fy,y), R(b,y)\}, \{b\doteq f(z)\}$

5.7–a Die Beweise mit Hilfe von Paramodulation:

(1) $\{\neg Q(b,f(a,c)\}, \{\neg P(a,y), Q(b,y)\} \vdash_{RES} \{\neg P(a,f(a,c))\}$
$\{\neg P(a,f(a,c))\}, \{f(a,x)\doteq b\} \vdash_{PARA} \{\neg P(a,b)\}$
$\{\neg P(a,b)\}, \{P(a,b)\} \vdash_{RES} \{\}$

(2) $\{h(b,f(a,b)) \not\doteq i(b)\}, \{g(x)\doteq i(x)\} \vdash_{PARA} \{h(b,f(a,b)) \not\doteq g(b)\}$
$\{h(b,f(a,b)) \not\doteq g(b)\}, \{b\doteq a\} \vdash_{PARA} \{h(b,f(b,b)) \not\doteq g(b)\}$
$\{h(b,f(b,b)) \not\doteq g(b)\}, \{h(y,f(b,y))\doteq g(y)\} \vdash_{RES} \{\}$

(3) $\{P(a,b)\}, \{a\doteq fc\} \vdash_{PARA} \{P(fc,b)\}$
$\{P(fc,b)\}, \{b\doteq fz_1\} \vdash_{PARA} \{P(fc,fz_1)\}$
$\{P(fc,fz_1)\}, \{\neg P(v,v), Q(fc,f(v))\} \vdash_{RES} \{Q(fc,ffc)\}$
$\{Q(fc,ffc)\}, \{b\doteq f(z_2)\} \vdash_{PARA} \{Q(fc,fb)\}$
$\{Q(fc,fb)\}, \{\neg Q(w,fb), R(w,b)\} \vdash_{RES} \{R(fc,b)\}$
$\{R(fc,b)\}, \{b\doteq f(z_3)\} \vdash_{PARA} \{R(b,b)\}$
$\{R(b,b)\}, \{\neg R(b,x)\} \vdash_{RES} \{\}$

5.7–b Die Beweise mit Hilfe der E-Resolution:

(1) $\{\neg Q(b,f(a,c)\}, \{\neg P(a,y), Q(b,y)\} \vdash_{RES} \{\neg P(a,f(a,c))\}$
$\{\neg P(a,f(a,c))\}, \{f(a,x)\doteq b\}, \{P(a,b)\} \vdash_{E-RES} \{\}$

(2) $\{h(b,f(a,b)) \not\doteq i(b)\}, \{g(x)\doteq i(x)\}, \{b\doteq a\}, \{h(y,f(b,y))\doteq g(y)\} \vdash_{E-RES} \{\}$

(3) $\{P(a,b)\}, \{a\doteq fc\}, \{b\doteq fz_1\}, \{\neg P(v,v), Q(fc,f(v))\} \vdash_{E-RES} \{Q(fc,ffc)\}$
$\{Q(fc,ffc)\}, \{b\doteq f(z_2)\}, \{\neg Q(w,fb), R(w,b)\} \vdash_{E-RES} \{R(fc,b)\}$
$\{R(fc,b)\}, \{b\doteq f(z_3)\}, \{\neg R(b,x)\} \vdash_{E-RES} \{\}$