

# Inferenzmethoden

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Wintersemester 2006/07

Blatt 6 — Abgabetermin: —

## Aufgabe 6.1 (Vervollständigung von Termersetzungssystemen)

Wandeln Sie das folgende Gleichungssystem in ein Termersetzungssystem um. Wenden Sie auf dieses Termersetzungssystem das Knuth-Bendix-Verfahren solange an, bis Sie ein vollständiges Regelsystem erhalten haben (oder bis Sie mehr als sechs neue Reduktionsregeln erzeugt haben).

$$\begin{aligned}
 \emptyset &= x \cup x \\
 x \cup (x \cap y) &= y \\
 x &= (x \odot y) \cup y \\
 y &= x \cap (x \cup y) \\
 (x \cup y) \odot y &= x
 \end{aligned}$$

## Aufgabe 6.2 (Theoriekonnektionen mit Rewriting)

Beweisen Sie die folgende Matrix mit Hilfe des Extensionsverfahrens. Hierbei sei in dem zu verwendenden Unifikationsalgorithmus die Gruppentheorie mit Hilfe von *lazy narrowing* eingebaut. Geben Sie bei der Darstellung ihrer Lösung die Theoriekonnektionen und die zugehörigen Substitutionen an. In den Fällen, in denen zur Unifikation *lazy narrowing* eingesetzt wird, sind die benötigten Schritte aufzuführen. Verwenden Sie dabei die in der Vorlesung angegebenen Reduktionsregeln für die Gruppentheorie.

$$\left[ \begin{array}{cccc}
 P(u, v, b)^T & P(\overline{(a \cdot b)} \cdot ((a \cdot b) \cdot c), b, b)^F & Q(w, x, y)^F & R(z \cdot (\bar{c} \cdot c), z \cdot (\bar{z} \cdot b))^F \\
 Q(f(u), u, v)^T & & R(x, y)^T &
 \end{array} \right]$$

## Aufgabe 6.3 (Induktion)

Die folgende Formel  $G$  formalisiert die Aussage, daß jede natürliche Zahl gerade oder ungerade ist:

$$\begin{aligned}
 G &=_{df} [ \text{even}(0) \\
 &\quad \wedge \forall x (\text{even}(x) \Rightarrow \text{even}(x'')) \\
 &\quad \wedge \forall x (\text{odd}(x) \Rightarrow \text{odd}(x'')) \\
 &\quad \wedge \forall x (\text{even}(x) \Rightarrow \text{odd}(x')) ] \\
 &\Rightarrow \forall x (\text{even}(x) \vee \text{odd}(x))
 \end{aligned}$$

Dabei realisiert  $'$  die Nachfolgerfunktion. Weiterhin wollen wir von dem Induktionsschema  $P[0/x] \wedge P[0'/x] \wedge \forall y (P[y/x] \Rightarrow P[y''/x]) \Rightarrow \forall x P$  (ohne die Vorbedingung, daß es sich immer um natürliche Zahlen handeln muß) ausgehen. Geben Sie eine geeignete Instantiierung des Induktionsschemas an und führen Sie mit deren Hilfe einen Konnektionsbeweis der Formel  $G$  aus. Dabei soll  $P$  *nicht* mit  $G$  instantiiert werden.

**Aufgabe 6.4** (Präfix-Unifikation)

Unifizieren Sie die folgenden Präfix-Strings zunächst informal und anschließend mit den 10 in der Vorlesung angegebenen Transformationsregeln

6.4-a  $aBcD$  und  $aEf$

6.4-b  $a_0A_2a_3$  und  $a_0a_5A_6$  sowie  $a_0A_4$  und  $a_0a_5a_7$  (gleichzeitig)

**Aufgabe 6.5** (Intuitionismus)

Welche der folgenden Aussagen gilt intuitionistisch, welche nur klassisch?

6.5-a  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A \vee B$

6.5-b  $\neg A \vee B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

6.5-c  $\neg\neg(A \vee \neg A)$

6.5-d  $\neg(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow A \vee B$

6.5-e  $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

Geben Sie eine informale Begründung an und konstruieren Sie anschließend die Matrix mit intuitionistischen Präfixen. In den Fällen, in denen ein intuitionistischer Matrixbeweis möglich ist, konstruieren Sie schließlich einen Sequenzenbeweis in  $\mathcal{LJ}$ .

### Anhang 6.1: Transformationsregeln für $\mathcal{J}$

$R_1$	$\{\varepsilon = \varepsilon   \varepsilon\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{\}, \sigma$
$R_2$	$\{\varepsilon = \varepsilon   t^+\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{t^+ = \varepsilon   \varepsilon\}, \sigma$
$R_3$	$\{Xs = \varepsilon   Xt\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{s = \varepsilon   t\}, \sigma$
$R_4$	$\{Cs = \varepsilon   Vt\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{Vt = \varepsilon   Cs\}, \sigma$
$R_5$	$\{Vs = z   \varepsilon\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{s = \varepsilon   \varepsilon\}, [z/V] \cup \sigma$
$R_6$	$\{Vs = \varepsilon   C_1t\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{s = \varepsilon   C_1t\}, [\varepsilon/V] \cup \sigma$
$R_7$	$\{Vs = z   C_1C_2t\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{s = \varepsilon   C_2t\}, [zC_1/V] \cup \sigma$
$R_8$	$\{Vs^+ = \varepsilon   V_1t\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{V_1t = V   s^+\}, \sigma$
$R_9$	$\{Vs^+ = z^+   V_1t\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{V_1t = V'   s^+\}, [z^+V'/V] \cup \sigma$
$R_{10}$	$\{Vs = z   Xt\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{Vs = zX   t\}, \sigma$ ( $V \neq X$ , und $s = \varepsilon$ , $t \neq \varepsilon$ , oder $X$ Konstante)

- $\mathcal{V}$ : Variablenmenge,  $\mathcal{C}$ : Konstantenmenge,  $\mathcal{V}^*$ : Menge von Hilfsvariablen
- $s, t, z$ : Strings,  $s^+, t^+, z^+$ : nichtleere Strings
- $X$  Einzelsymbol,  $V \neq V_1$  Variablen,  $C, C_1, C_2$  Konstante (Einzelsymbole)
- $V'$  neue Variable, die bisher nicht in  $\sigma$  vorkam

## Lösung 6.1

Durch die Umwandlung ergibt sich das folgende Termersetzungssystem :

$$\begin{aligned} (r_1) : x \cup x &\longrightarrow \emptyset \\ (r_2) : x \cup (x \cap y) &\longrightarrow y \\ (r_3) : (x \odot y) \cup y &\longrightarrow x \\ (r_4) : x \cap (x \cup y) &\longrightarrow y \\ (r_5) : (x \cup y) \odot y &\longrightarrow x \end{aligned}$$

Durch das Knuth-Bendix Verfahren ergeben sich die folgenden neuen Regeln:

1. Superposition von  $(r_1)$  und  $(r_4)$

$$x \cap (x \cup x) \xrightarrow{(r_1)} x \cap \emptyset, \quad x \cap (x \cup x) \xrightarrow{(r_4)} x \quad \text{führt zu:}$$

$$(r_6) : x \cap \emptyset \longrightarrow x$$

2. Superposition von  $(r_1)$  und  $(r_5)$

$$(x \cup x) \odot x \xrightarrow{(r_1)} \emptyset \odot x, \quad (x \cup x) \odot x \xrightarrow{(r_5)} x \quad \text{führt zu:}$$

$$(r_7) : \emptyset \odot x \longrightarrow x$$

3. Superposition von  $(r_2)$  und  $(r_5)$

$$(x \cup (x \cap y)) \odot (x \cap y) \xrightarrow{(r_2)} y \odot (x \cap y), \quad (x \cup (x \cap y)) \odot (x \cap y) \xrightarrow{(r_5)} x \quad \text{führt zu:}$$

$$(r_8) : y \odot (x \cap y) \longrightarrow x$$

4. Superposition von  $(r_3)$  und  $(r_4)$

$$(x \odot y) \cap ((x \odot y) \cup y) \xrightarrow{(r_3)} (x \odot y) \cap x, \quad (x \odot y) \cap ((x \odot y) \cup y) \xrightarrow{(r_4)} y \quad \text{führt zu:}$$

$$(r_9) : (x \odot y) \cap x \longrightarrow y$$

## Lösung 6.2

Als Lösung ergibt sich die folgende Matrix mit den zugehörigen Theorie-Konnektionen:

$$\left[ \begin{array}{cccc} P(u, v, b)^T & P(\overline{(a \cdot b)} \cdot ((a \cdot b) \cdot c), b, b)^F & Q(w, x, y)^F & R(z \cdot (\bar{c} \cdot c), z \cdot (\bar{z} \cdot b))^F \\ Q(f(u), u, v)^T & & R(x, y)^T & \end{array} \right]$$

$\sigma_1$  (über  $P$ ),  $\sigma_2$  (unter  $Q$ ),  $\sigma_3$  (unter  $R$ )

Die zugehörigen Substitutionen:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= [\overline{(a \cdot b)} \cdot ((a \cdot b) \cdot c) / u, b / v] \\ \sigma_2 &= [f(\overline{(a \cdot b)} \cdot ((a \cdot b) \cdot c)) / w, \overline{(a \cdot b)} \cdot ((a \cdot b) \cdot c) / x, b / y] \\ \sigma_3 &= [c / z] \end{aligned}$$

Nur bei der Konnektion mit der Substitution  $\sigma_3$  muß lazy narrowing eingesetzt werden. Hierbei benötigen wir die folgenden Regeln der Gruppentheorie:

$$\begin{aligned} r_2 &: x \cdot e && \longrightarrow && x \\ r_3 &: \bar{x} \cdot x && \longrightarrow && e \\ r_5 &: \bar{x} \cdot (x \cdot y) && \longrightarrow && y \\ r_9 &: x \cdot (\bar{x} \cdot y) && \longrightarrow && y \end{aligned}$$

Die Schritte des lazy narrowing:

$$\begin{aligned} \overline{(a \cdot b)} \cdot ((a \cdot b) \cdot c) &= z \cdot (\bar{c} \cdot c), & b &= z \cdot (\bar{z} \cdot b) \\ y_1 = z \cdot (\bar{c} \cdot c), & x_1 = (a \cdot b), & y_1 = c, & b = z \cdot (\bar{z} \cdot b) && \text{lazy narrowing mit } r_5 \\ y_1 = z \cdot (\bar{c} \cdot c), & y_1 = c, & b = z \cdot (\bar{z} \cdot b) &&& \text{Variablenelimination } (x_1) \\ c = z \cdot (\bar{c} \cdot c), & b = z \cdot (\bar{z} \cdot b) &&&& \text{Variablenelimination } (y_1) \\ c = z \cdot e, & x_2 = c, & b = z \cdot (\bar{z} \cdot b) &&& \text{lazy narrowing mit } r_3 \\ c = z \cdot e, & b = z \cdot (\bar{z} \cdot b) &&&& \text{Variablenelimination } (x_2) \\ c = x_3, & x_3 = z, & b = z \cdot (\bar{z} \cdot b) &&& \text{lazy narrowing mit } r_2 \\ c = z, & b = z \cdot (\bar{z} \cdot b) &&&& \text{Variablenelimination } (x_3) \\ b = c \cdot (\bar{c} \cdot b) &&&&& \text{Variablenelimination } (z) \\ b = y_4, & y_4 = b, & x_4 = c &&& \text{lazy narrowing mit } r_9 \\ b = y_4, & y_4 = b &&&& \text{Variablenelimination } (x_4) \\ b = b &&&&& \text{Variablenelimination } (y_4) \end{aligned}$$

### Lösung 6.3

Die Ausgangsmatrix für  $G$  ist

$$\left[ \begin{array}{cccccc} \text{even}(0)^T & \text{even}(x)^F & \text{odd}(y)^F & \text{even}(z)^F & \text{even}(a)^F & \text{odd}(a)^F \\ & \text{even}(x'')^T & \text{odd}(y'')^T & \text{odd}(z')^T & & \end{array} \right]$$

Für den Beweis muß man das Schema mit der Zielformel  $\text{even}(x) \vee \text{odd}(x)$  instantiieren, also die Formel

$$\begin{aligned} & ( (\text{even}(0) \vee \text{odd}(0)) \wedge (\text{even}(0') \vee \text{odd}(0')) \wedge \forall y (\text{even}(y) \vee \text{odd}(y)) \Rightarrow (\text{even}(y'') \vee \text{odd}(y'')) ) \\ & \Rightarrow \forall x (\text{even}(x) \vee \text{odd}(x)) \end{aligned}$$

als weitere Voraussetzung der Matrix hinzufügen. Wie in der Vorlesung gibt dies eine stark verschachtelte Matrix mit einem relativ geradlinigen Konnektionsbeweis.

Wegen des großen Aufwands, diese Zeichnung in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X zu erstellen, wird dieser Beweis nur handschriftlich erzeugt.

## Lösung 6.4

6.4–a  $aBcD$  und  $aEf$

Informal  $\sigma = [Bc/E, f/D]$

Mit dem Verfahren

$$\begin{array}{l}
 \{aBcD = \varepsilon | aEf\}, \quad \square \\
 \xrightarrow{R_3} \{BcD = \varepsilon | Ef\}, \quad \square \\
 \xrightarrow{R_8} \{Ef = B | cD\}, \quad \square \\
 \xrightarrow{R_{10}} \{Ef = Bc | D\}, \quad \square \\
 \xrightarrow{R_9} \{D = V | f\}, \quad [BcV/E] \\
 \xrightarrow{R_{10}} \{D = Vf | \varepsilon\}, \quad [BcV/E] \\
 \xrightarrow{R_5} \{\varepsilon = \varepsilon | \varepsilon\}, \quad [BcV/E, Vf/D] \\
 \xrightarrow{R_1} \{\}, \quad [BcV/E, Vf/D]
 \end{array}$$

Der Unifikator ist allgemeiner, da er mögliche Überlappungen mitberücksichtigt. Zu überprüfen wäre noch, ob es in einem der Schritte Alternativen gibt, die zu anderen mgus führen.

6.4–b  $a_0A_2a_3$  und  $a_0a_5A_6$  sowie  $a_0A_4$  und  $a_0a_5a_7$  (gleichzeitig)

Informal  $\sigma = [a_5/A_2, a_5a_7/A_4, a_3/A_6]$

Mit dem Verfahren

$$\begin{array}{l}
 \{a_0A_2a_3 = \varepsilon | a_0a_5A_6, a_0A_4 = \varepsilon | a_0a_5a_7\}, \quad \square \\
 \xrightarrow{R_3^{(2x)}} \{A_2a_3 = \varepsilon | a_5A_6, A_4 = \varepsilon | a_5a_7\}, \quad \square \\
 \xrightarrow{R_{10}} \{A_2a_3 = \varepsilon | a_5A_6, A_4 = a_5 | a_7\}, \quad \square \\
 \xrightarrow{R_{10}} \{A_2a_3 = \varepsilon | a_5A_6, A_4 = a_5a_7 | \varepsilon\}, \quad \square \\
 \xrightarrow{R_5} \{A_2a_3 = \varepsilon | a_5A_6, \varepsilon = \varepsilon | \varepsilon\}, \quad [a_5a_7/A_4] \\
 \xrightarrow{R_1} \{A_2a_3 = \varepsilon | a_5A_6\}, \quad [a_5a_7/A_4] \\
 \xrightarrow{R_{10}} \{A_2a_3 = a_5 | A_6\}, \quad [a_5a_7/A_4] \\
 \xrightarrow{R_9} \{A_6 = V | a_3\}, \quad [a_5a_7/A_4, a_5V/A_2] \\
 \xrightarrow{R_{10}} \{A_6 = Va_3 | \varepsilon\}, \quad [a_5a_7/A_4, a_5V/A_2] \\
 \xrightarrow{R_5} \{\varepsilon = \varepsilon | \varepsilon\}, \quad [a_5a_7/A_4, a_5V/A_2, Va_3/A_6] \\
 \xrightarrow{R_1} \{\} \quad [a_5a_7/A_4, a_5V/A_2, Va_3/A_6]
 \end{array}$$

Hier gibt es Alternativen im Schritt 3, die ich vorerst nicht weiterverfolge.

**Lösung 6.5** Ziel dieser Aufgabe ist es, einen Begriff von der intuitionistischen Gültigkeit zu vermitteln. Mit Hilfe des Nachdenkens über den Grund, aus dem die einzelnen Aussagen gelten oder auch nicht gelten, soll dies möglichst hitzig debattiert werden.

6.5–a  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A \vee B$  gilt intuitionistisch **nicht**, da allein aus der Voraussetzung, daß man aus der Wahrheit von  $A$  immer auf diejenige von  $B$  schließen kann, nicht notwendigerweise eine Antwort auf die Frage resultiert, ob dies der Fall ist, weil nun gerade  $A$  nicht gilt oder aber weil  $B$  sowieso gilt. Jeder Beweis für diese Formel muß sich auf Tertium non datur stützen: es kann eben nur eine der zu beweisenden Möglichkeiten geben, wenn die Implikation als wahr angenommen wird.

$$\left[ \begin{array}{ccc} a_0 A_1 a_2 : A^F & a_0 a_5 A_6 : A^T & a_0 a_7 : B^F \\ a_0 A_1 A_3 : B^T & & \end{array} \right]$$

Klassisch ist die Matrix komplementär. Präfixunifikation ist nicht möglich, da wegen der ersten Konnektion die Instanz von  $A_1$  mit  $a_5$  beginnen muß, wegen der zweiten Konnektion aber entweder mit  $a_7$  beginnen oder leer sein muß. Damit ist die Matrix intuitionistisch nicht gültig.

Eine Erhöhung der intuitionistischen Multiplizität (Klausel 1) würde nichts bringen, da die kritische Variable in derselben Klausel steckt.

- 6.5–b  $\neg A \vee B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$  intuitionistisch **gültig**. Im Gegensatz zum ersten Beispiel kann man aus jeder einzelnen der beiden alternativ möglichen Voraussetzungen die Gültigkeit der Implikation folgern: wenn  $A$  nicht gilt, ist sie erfüllt und ebenso wenn  $B$  gilt.

$$\left[ \begin{array}{ccc} a_0 A_2 A_3 : A^F & a_0 a_5 A_6 : A^T & a_0 a_5 a_7 : B^F \\ a_0 A_4 : B^T & & \end{array} \right]$$

Aus klassischer Sicht ist die Matrix identisch mit der obigen. Allerdings sind jetzt die Variablen und Konstanten in den Präfixen anders verteilt. Präfixunifikation liefert  $\sigma_J = [a_5 a_7 / A_4, a_5 / A_2, a_3 / A_6]$  (siehe vorherige Aufgabe, Teil b). Damit ist die Matrix intuitionistisch komplementär.

Der Sequenzenbeweis ist sehr direkt, wenn man analytisch vorgeht. Die nötigen Regeln sind  $\Rightarrow -R$ ,  $\Rightarrow -R$ ,  $\vee -L$ ,  $\neg -L$  und zweimal *axiom*.

- 6.5–c  $\neg \neg (A \vee \neg A)$  ist intuitionistisch **gültig**. Während man es zwar ablehnt etwas als wahr zu akzeptieren, dessen Gegenteil für widersprüchlich befunden wurde, ist es durchaus legitim, etwas für falsch zu halten dessen Gegenteil nicht falsch sein kann. Der Intuitionist erkennt demnach an, daß es kein Problem geben kann, das nicht entweder selbst wahr ist oder aber dessen Gegenteil wahr ist.

$$\left[ a_0 A_1 a_3 : A^F \quad a_0 A_1 a_4 A_5 : A^T \right]$$

Klassisch ist die Matrix bereits komplementär. Präfixunifikation ist jedoch nicht möglich. Verwendung einer intuitionistischen Multiplizität ist erforderlich

$$\left[ a_0 A_1^1 a_3 : A^F \quad a_0 A_1^1 a_4 A_5 : A^T \quad a_0 A_1^2 a_7 : A^F \quad a_0 A_1^2 a_8 A_9 : A^T \right]$$

Präfixunifikation liefert  $\sigma_J = [A_1^1 a_4 / A_1^2, a_7 / A_5]$  (analog zur vorherigen Aufgabe, Teil a). Damit ist die Matrix intuitionistisch komplementär.

Der analytische (!!)-Sequenzenbeweis beginnt  $\neg -R$ , kopiert dann die Formel  $\neg(A \vee \neg A)$  im Antezedent (*Kontraktion-L*), verwendet dann  $\neg -L$  um  $A \vee \neg A$  im Sukzedent zu haben (aber immer noch eine Kopie von  $\neg(A \vee \neg A)$  im Antezedent). Mit  $\vee -R$  (zweite Regel) entsteht  $\neg A$  im Sukzedent. Wir wenden wiederum  $\neg -R$  an und erhalten  $\neg(A \vee \neg A)$ ,  $A$  im Antezedent. Nun wenden wir  $\neg -L$  auf unsere Kopie von  $\neg(A \vee \neg A)$  an und anschließend  $\vee -R$  (erste Regel), was uns schließlich die Sequenz  $A \vdash A$  liefert, die mit der *axiom*-Regel abgeschlossen wird.

Ohne die Kopie von  $\neg(A \vee \neg A)$  ist der Beweis nicht zu führen. Den Hinweis kann man aus dem Matrixbeweis entnehmen.

6.5-d  $\neg(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow A \vee B$  gilt intuitionistisch **nicht**. Es handelt sich hier um eine abgewandelte de-Morgan-Regel, von der bekannt sein sollte, daß sie in der vorliegenden Richtung nur klassisch gilt.

$$\left[ \begin{array}{ccc} a_0 A_1 a_3 A_4 : A^T & a_0 a_8 : A^F & a_0 a_9 : B^F \\ a_0 A_1 a_5 A_6 : B^T & & \end{array} \right]$$

Klassisch ist die Matrix komplementär. Präfixunifikation ist nicht möglich, da die Konstanten der konnektierten Präfixe im Konflikt stehen. Damit ist die Matrix intuitionistisch nicht gültig.

6.5-e  $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$  gilt intuitionistisch **nicht**

$$\left[ \begin{array}{ccc} a_0 A_1 a_2 A_3 : A^T & a_0 A_1 a_2 a_4 : B^F & a_0 a_6 : A^F \\ & a_0 A_1 A_5 : A^T & \end{array} \right]$$

Klassisch ist die Nichtnormalformmatrix komplementär. Beim Beweis spielt  $B$  keine Rolle. Präfixunifikation ist nicht möglich, da die Konstanten der Präfixe in der ersten Konnektion im Konflikt stehen. Damit ist die Matrix intuitionistisch nicht gültig.