Inferenzmethoden

Teil I

Beweiskalküle

Formalisierung von Beweisen

Inferenzmethoden

Einheit 1

Formale Logik - kurzgefaßt

1. Syntax & Semantik der Prädikatenlogik
2. Inferenzkalküle für die Prädikatenlogik

Formale Kalküle

Simulation semantischer Schlußfolgerungen durch Regeln für symbolische Manipulation

Formale Kalküle

Simulation semantischer Schlußfolgerungen durch Regeln für symbolische Manipulation

- **Regelanwendung ohne Nachdenken**
  - Umgeht Mehrdeutigkeiten der natürlichen Sprache
  - Erlaubt schematische Lösung mathematischer Probleme

  Beispiele: Differentialkalkül, Fourier-Transformationen, Computer Algebra, Formale Logik

Formale Kalküle

Simulation semantischer Schlußfolgerungen durch Regeln für symbolische Manipulation

- **Regelanwendung ohne Nachdenken**
  - Umgeht Mehrdeutigkeiten der natürlichen Sprache
  - Erlaubt schematische Lösung mathematischer Probleme

  Beispiele: Differentialkalkül, Fourier-Transformationen, Computer Algebra, Formale Logik

- **Kernbestandteile:**
  - Formale Sprache (Syntax + Semantik)
  - Ableitungssystem (Axiome + Inferenzregeln)

Formale Kalküle

Simulation semantischer Schlußfolgerungen durch Regeln für symbolische Manipulation

- **Regelanwendung ohne Nachdenken**
  - Umgeht Mehrdeutigkeiten der natürlichen Sprache
  - Erlaubt schematische Lösung mathematischer Probleme

  Beispiele: Differentialkalkül, Fourier-Transformationen,
  Computer Algebra, Formale Logik

- **Kernbestandteile:**
  - Formale Sprache (Syntax + Semantik)
  - Ableitungssystem (Axiome + Inferenzregeln)

- **Wichtige Eigenschaften logischer Kalküle**
  - Korrekt, vollständig, automatisierbar
  - Leicht verständlich, ausdrucksstark

Beschreibung formaler Sprachen

- **Syntax: Präzisierung des Vokabulars**
  - Formale Struktur der Sprache (Notation, textliche Erscheinungsform)
  - Beschreibbar durch mathematische Definitionsgleichungen
    oder durch formale Grammatiken

Beschreibung formaler Sprachen

- **Syntax: Präzisierung des Vokabulars**
  - Formale Struktur der Sprache (Notation, textliche Erscheinungsform)
  - Beschreibbar durch mathematische Definitionsgleichungen
    oder durch formale Grammatiken
- **Semantik: Präzisierung der Bedeutung von Text**
  - Interpretation syntaktisch korrekter Ausdrücke in informaler Zielsprache
    Beschreibbar durch Interpretationsfunktion: Quellsymbole $\mapsto$ Zielobjekte

Beschreibung formaler Sprachen

- **Syntax: Präzisierung des Vokabulars**
  – Formale Struktur der Sprache (Notation, textliche Erscheinungsform)
  – Beschreibbar durch mathematische Definitionsgleichungen
  oder durch formale Grammatiken

- **Semantik: Präzisierung der Bedeutung von Text**
  – Interpretation syntaktisch korrekter Ausdrücke in informaler Zielsprache
  Beschreibbar durch Interpretationsfunktion: Quellsymbole $\mapsto$ Zielobjekte

  . . . *aber was ist die Bedeutung der Zielsprache?*

Beschreibung formaler Sprachen

- **Syntax: Präzisierung des Vokabulars**
  – Formale Struktur der Sprache (Notation, textliche Erscheinungsform)
  – Beschreibbar durch mathematische Definitionsgleichungen
    oder durch formale Grammatiken

- **Semantik: Präzisierung der Bedeutung von Text**
  – Interpretation syntaktisch korrekter Ausdrücke in informaler Zielsprache
    Beschreibbar durch Interpretationsfunktion: Quellsymbole $\mapsto$ Zielobjekte
  ... *aber was ist die Bedeutung der Zielsprache?*
  – Direkte Semantik für Grundlagentheorien (Mengentheorie, Typentheorie)
    Mathematische Präzisierung der intuitiven Bedeutung

Syntax der Prädikatenlogik

- **(Abzählbare) Alphabete für erlaubte Symbole**
  - $\mathcal{V}$: Variablensymbole $\quad x,y,z,a,b,c,\ldots$
  - $\mathcal{F}^i$: i-stellige Funktionssymbole, $\quad \boldsymbol{\mathcal{F}} = \bigcup_{i=0}^{\infty}\mathcal{F}^i \quad f,g,h,\ldots$
  - $\mathcal{P}^i$: i-stellige Prädikatssymbole, $\quad \boldsymbol{\mathcal{P}} = \bigcup_{i=0}^{\infty}\mathcal{P}^i \quad P,Q,R,\ldots$

Syntax der Prädikatenlogik

- **(Abzählbare) Alphabete für erlaubte Symbole**
  - $\mathcal{V}$: Variablensymbole $x,y,z,a,b,c,\ldots$
  - $\mathcal{F}^i$: i-stellige Funktionssymbole, $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \bigcup_{i=0}^{\infty}\mathcal{F}^i$ $f,g,h,\ldots$
  - $\mathcal{P}^i$: i-stellige Prädikatssymbole, $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \bigcup_{i=0}^{\infty}\mathcal{P}^i$ $P,Q,R,\ldots$
- **Terme**
  - Variablen $x \in \mathcal{V}$, Konstante $f \in \mathcal{F}^0$ (atomare Terme)
  - $f(t_1,\ldots,t_n)$, wobei $t_1,..,t_n$ Terme, $f \in \mathcal{F}^n$

Syntax der Prädikatenlogik

- **(Abzählbare) Alphabete für erlaubte Symbole**
  - $\mathcal{V}$: Variablensymbole $\qquad x,y,z,a,b,c,\ldots$
  - $\mathcal{F}^i$: i-stellige Funktionssymbole, $\quad \boldsymbol{\mathcal{F}} = \bigcup_{i=0}^{\infty}\mathcal{F}^i \qquad f,g,h,\ldots$
  - $\mathcal{P}^i$: i-stellige Prädikatssymbole, $\quad \boldsymbol{\mathcal{P}} = \bigcup_{i=0}^{\infty}\mathcal{P}^i \qquad P,Q,R,\ldots$

- **Terme**
  - Variablen $x \in \mathcal{V}$, Konstante $f \in \mathcal{F}^0$ $\qquad$ (atomare Terme)
  - $f(t_1,\ldots,t_n)$, wobei $t_1, .., t_n$ Terme, $f \in \mathcal{F}^n$

- **Formeln**
  - Konstante ff, Aussagenvariable $P \in \mathcal{P}^0$ $\qquad$ (atomare Formeln)
  - $P(t_1,\ldots,t_n)$, wobei $t_1, .., t_n$ Terme, $P \in \mathcal{P}^n$
  - $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $\forall x\, A$, $\exists x\, A$, (A) $\qquad$ (A, B Formeln, $x \in \mathcal{V}$)

Beispiele für Terme und Formeln

- **Korrekte Terme**
  - `x`
  - `24`
  - `vater(peter)`
  - `max(2,3,4)`, `max(plus(4,plus(5,5)),23,5)`

Beispiele für Terme und Formeln

- **Korrekte Terme**
  - `x` — $\mathtt{x} \in \mathcal{V}$
  - `24` — $\mathtt{24} \in \mathcal{F}^0$
  - `vater(peter)` — $\mathtt{peter} \in \mathcal{V}$, $\mathtt{vater} \in \mathcal{F}^1$
  - `max(2,3,4)`, `max(plus(4,plus(5,5)),23,5)`

    Kontext bestimmt Rolle von Symbolen

Beispiele für Terme und Formeln

- **Korrekte Terme**
  - x $\qquad$ x $\in \mathcal{V}$
  - 24 $\qquad$ 24 $\in \mathcal{F}^0$
  - vater(peter) $\qquad$ peter $\in \mathcal{V}$, vater $\in \mathcal{F}^1$
  - max(2,3,4), max(plus(4,plus(5,5)),23,5)

  Kontext bestimmt Rolle von Symbolen

- **Korrekte Formeln**
  - (4=plus(2,3)) $\Rightarrow$ ff
  - Sein $\vee$ $\neg$Sein, lange_währt $\Rightarrow$ endlich_gut
  - $\forall$x $\exists$y $\leq$(*(y,y),x) $\wedge$ <(x,*(plus(y,1),plus(y,1)))

Beispiele für Terme und Formeln

- **Korrekte Terme**
  - `x` — $\texttt{x} \in \mathcal{V}$
  - `24` — $\texttt{24} \in \mathcal{F}^0$
  - `vater(peter)` — $\texttt{peter} \in \mathcal{V}$, $\texttt{vater} \in \mathcal{F}^1$
  - `max(2,3,4)`, `max(plus(4,plus(5,5)),23,5)`

    Kontext bestimmt Rolle von Symbolen
- **Korrekte Formeln**
  - $\texttt{(4=plus(2,3))} \Rightarrow \mathsf{ff}$
  - $\texttt{Sein} \vee \neg\texttt{Sein}$, $\texttt{lange\_währt} \Rightarrow \texttt{endlich\_gut}$
  - $\forall \texttt{x}\ \exists \texttt{y}\ \leq\texttt{(*(y,y),x)} \wedge \texttt{<(x,*(plus(y,1),plus(y,1)))}$
- **Keine Formeln**
  - `plus(plus(2,3),4)`

Beispiele für Terme und Formeln

- **Korrekte Terme**
  - x — $\texttt{x} \in \mathcal{V}$
  - 24 — $\texttt{24} \in \mathcal{F}^0$
  - vater(peter) — $\texttt{peter} \in \mathcal{V}$, $\texttt{vater} \in \mathcal{F}^1$
  - max(2,3,4), max(plus(4,plus(5,5)),23,5)

    Kontext bestimmt Rolle von Symbolen
- **Korrekte Formeln**
  - (4=plus(2,3)) $\Rightarrow$ ff
  - Sein $\vee$ $\neg$Sein, lange_währt $\Rightarrow$ endlich_gut
  - $\forall$x $\exists$y $\leq$(*(y,y),x) $\wedge$ <(x,*(plus(y,1),plus(y,1)))
- **Keine Formeln**
  - plus(plus(2,3),4) — Term
  - $\wedge$ so_weiter

Beispiele für Terme und Formeln

- **Korrekte Terme**
  - x — $x \in \mathcal{V}$
  - 24 — $24 \in \mathcal{F}^0$
  - vater(peter) — $\texttt{peter} \in \mathcal{V}$, $\texttt{vater} \in \mathcal{F}^1$
  - max(2,3,4), max(plus(4,plus(5,5)),23,5)

    Kontext bestimmt Rolle von Symbolen
- **Korrekte Formeln**
  - $(4{=}\texttt{plus}(2,3)) \Rightarrow \mathsf{ff}$
  - $\texttt{Sein} \lor \neg\texttt{Sein}$, $\quad \texttt{lange\_währt} \Rightarrow \texttt{endlich\_gut}$
  - $\forall x\ \exists y\ \leq(*(y,y),x)\ \land\ <(x,*(\texttt{plus}(y,1),\texttt{plus}(y,1)))$
- **Keine Formeln**
  - plus(plus(2,3),4) — Term
  - $\land$ so_weiter — Formel links von $\land$ fehlt
  - $\forall x\ \ x(4){=}x$

Beispiele für Terme und Formeln

- **Korrekte Terme**
  - `x` — $\texttt{x} \in \mathcal{V}$
  - `24` — $\texttt{24} \in \mathcal{F}^0$
  - `vater(peter)` — $\texttt{peter} \in \mathcal{V}$, $\texttt{vater} \in \mathcal{F}^1$
  - `max(2,3,4)`, `max(plus(4,plus(5,5)),23,5)`

    Kontext bestimmt Rolle von Symbolen
- **Korrekte Formeln**
  - `(4=plus(2,3))` $\Rightarrow$ ff
  - `Sein` $\vee$ $\neg$`Sein`, `lange_währt` $\Rightarrow$ `endlich_gut`
  - $\forall$`x` $\exists$`y` $\leq$`(*(y,y),x)` $\wedge$ `<(x,*(plus(y,1),plus(y,1)))`
- **Keine Formeln**
  - `plus(plus(2,3),4)` — Term
  - $\wedge$ `so_weiter` — Formel links von $\wedge$ fehlt
  - $\forall$`x x(4)=x` — Variable als Funktionszeichen
  - $\forall$`f f(4)=0`

Beispiele für Terme und Formeln

- **Korrekte Terme**
  - `x` — $x \in \mathcal{V}$
  - `24` — $24 \in \mathcal{F}^0$
  - `vater(peter)` — $\texttt{peter} \in \mathcal{V}$, $\texttt{vater} \in \mathcal{F}^1$
  - `max(2,3,4)`, `max(plus(4,plus(5,5)),23,5)`

    Kontext bestimmt Rolle von Symbolen
- **Korrekte Formeln**
  - `(4=plus(2,3))` $\Rightarrow$ ff
  - `Sein` $\vee$ $\neg$`Sein`, `lange_währt` $\Rightarrow$ `endlich_gut`
  - $\forall$`x` $\exists$`y` $\leq$`(*(y,y),x)` $\wedge$ `<(x,*(plus(y,1),plus(y,1)))`
- **Keine Formeln**
  - `plus(plus(2,3),4)` — Term
  - $\wedge$ `so_weiter` — Formel links von $\wedge$ fehlt
  - $\forall$`x x(4)=x` — Variable als Funktionszeichen
  - $\forall$`f f(4)=0` — Quantifizierung über Funktionszeichen (higher-order)

Konventionen sparen Klammern

$\exists$y gerade(y) $\wedge$ $\geq$(y,2) $\Rightarrow$ =(y,2) $\wedge$ >(y,20) **heißt?**

Konventionen sparen Klammern

$\exists$y gerade(y) $\wedge$ $\geq$(y,2) $\Rightarrow$ =(y,2) $\wedge$ >(y,20) **heißt?**

– $\exists$y (gerade(y) $\wedge$ $\geq$(y,2)) $\Rightarrow$ (=(y,2) $\wedge$ >(y,20)) ??

Konventionen sparen Klammern

$\exists$y gerade(y) $\wedge$ $\geq$(y,2) $\Rightarrow$ =(y,2) $\wedge$ >(y,20) **heißt?**

- $\exists$y (gerade(y) $\wedge$ $\geq$(y,2)) $\Rightarrow$ (=(y,2) $\wedge$ >(y,20)) ??
- $\exists$y gerade(y) $\wedge$ ($\geq$(y,2) $\Rightarrow$ (=(y,2) $\wedge$ >(y,20))) ??

Konventionen sparen Klammern

$\exists$y gerade(y) $\wedge$ $\geq$(y,2) $\Rightarrow$ =(y,2) $\wedge$ >(y,20) **heißt?**

– $\exists$y (gerade(y) $\wedge$ $\geq$(y,2)) $\Rightarrow$ (=(y,2) $\wedge$ >(y,20)) ??
– $\exists$y gerade(y) $\wedge$ ($\geq$(y,2) $\Rightarrow$ (=(y,2) $\wedge$ >(y,20))) ??
– $\exists$y (gerade(y) $\wedge$ ($\geq$(y,2) $\Rightarrow$ =(y,2))) $\wedge$ >(y,20) ??

Konventionen sparen Klammern

$\exists$y gerade(y) $\wedge$ $\geq$(y,2) $\Rightarrow$ =(y,2) $\wedge$ >(y,20) **heißt?**

- $\exists$y (gerade(y) $\wedge$ $\geq$(y,2)) $\Rightarrow$ (=(y,2) $\wedge$ >(y,20)) ??
- $\exists$y gerade(y) $\wedge$ ($\geq$(y,2) $\Rightarrow$ (=(y,2) $\wedge$ >(y,20))) ??
- $\exists$y (gerade(y) $\wedge$ ($\geq$(y,2) $\Rightarrow$ =(y,2))) $\wedge$ >(y,20) ??

- **Prioritäten zwischen verschiedenen Konnektiven**

  $\neg$ bindet stärker als $\wedge$, dann folgt $\vee$, dann $\Rightarrow$, dann $\exists$, dann $\forall$.

$A \wedge \neg B$	entspricht	$A \wedge (\neg B)$
$A \wedge B \vee C$	entspricht	$(A \wedge B) \vee C$
$\exists x\ A \wedge B$	entspricht	$\exists x\ (A \wedge B)$

  Achtung: Unterschiedliche Konventionen in verschiedenen Lehrbüchern

Konventionen sparen Klammern

$\exists$y gerade(y) $\wedge$ $\geq$(y,2) $\Rightarrow$ =(y,2) $\wedge$ >(y,20) **heißt?**

– $\exists$y (gerade(y) $\wedge$ $\geq$(y,2)) $\Rightarrow$ (=(y,2) $\wedge$ >(y,20)) ??
– $\exists$y gerade(y) $\wedge$ ($\geq$(y,2) $\Rightarrow$ (=(y,2) $\wedge$ >(y,20))) ??
– $\exists$y (gerade(y) $\wedge$ ($\geq$(y,2) $\Rightarrow$ =(y,2))) $\wedge$ >(y,20) ??

- **Prioritäten zwischen verschiedenen Konnektiven**

  $\neg$ bindet stärker als $\wedge$, dann folgt $\vee$, dann $\Rightarrow$, dann $\exists$, dann $\forall$.

$A \wedge \neg B$	entspricht	$A \wedge (\neg B)$
$A \wedge B \vee C$	entspricht	$(A \wedge B) \vee C$
$\exists x\; A \wedge B$	entspricht	$\exists x\; (A \wedge B)$

  Achtung: Unterschiedliche Konventionen in verschiedenen Lehrbüchern

- **Rechtsassoziativität bei Iteration von $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$**

  – $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ entspricht $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

Konventionen sparen Klammern

$\exists$`y gerade(y)` $\wedge$ $\geq$`(y,2)` $\Rightarrow$ `=(y,2)` $\wedge$ `>(y,20)` heißt?

– $\exists$`y (gerade(y)` $\wedge$ $\geq$`(y,2))` $\Rightarrow$ `(=(y,2)` $\wedge$ `>(y,20))` ??
– $\exists$`y gerade(y)` $\wedge$ `(`$\geq$`(y,2)` $\Rightarrow$ `(=(y,2)` $\wedge$ `>(y,20)))` ??
– $\exists$`y (gerade(y)` $\wedge$ `(`$\geq$`(y,2)` $\Rightarrow$ `=(y,2)))` $\wedge$ `>(y,20)` ??

- **Prioritäten zwischen verschiedenen Konnektiven**

  $\neg$ bindet stärker als $\wedge$, dann folgt $\vee$, dann $\Rightarrow$, dann $\exists$, dann $\forall$.

  $A \wedge \neg B$ entspricht $A \wedge (\neg B)$
  $A \wedge B \vee C$ entspricht $(A \wedge B) \vee C$
  $\exists x\ A \wedge B$ entspricht $\exists x\ (A \wedge B)$

  Achtung: Unterschiedliche Konventionen in verschiedenen Lehrbüchern

- **Rechtsassoziativität bei Iteration von $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$**
  – $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ entspricht $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

- **Keine Klammern bei Funktions-/Prädikatssymbolen**
  – Px entspricht $P(x)$ und fxy entspricht $f(x,y)$
  – $\exists xyz\ A$ entspricht $\exists x \exists y \exists z\ A$ und $\forall xyz\ A$ entspricht $\forall x \forall y \forall z\ A$

Formelbäume: Interne Darstellung von Formeln

- **Abstrakter Syntaxbaum, erzeugt durch Parsen der Formel**

Formelbäume: Interne Darstellung von Formeln

- **Abstrakter Syntaxbaum, erzeugt durch Parsen der Formel**
- **Baumstruktur, annotiert mit Konnektiven und Symbolen**

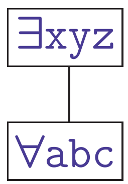
Formelbäume: Interne Darstellung von Formeln

- **Abstrakter Syntaxbaum, erzeugt durch Parsen der Formel**
- **Baumstruktur, annotiert mit Konnektiven und Symbolen**
- **Formelbaum für** $\forall\texttt{abc}\,\exists\texttt{xyz}\ \ \texttt{Pxc} \land \texttt{P(fzb,b)} \lor \neg\texttt{P(fay,y)}$

$$\boxed{\forall\texttt{abc}}$$

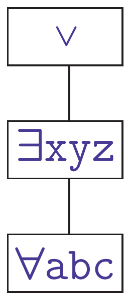
Formelbäume: Interne Darstellung von Formeln

- **Abstrakter Syntaxbaum, erzeugt durch Parsen der Formel**
- **Baumstruktur, annotiert mit Konnektiven und Symbolen**
- **Formelbaum für** $\forall\texttt{abc}\,\exists\texttt{xyz}\ \texttt{Pxc} \land \texttt{P(fzb,b)} \lor \neg\texttt{P(fay,y)}$



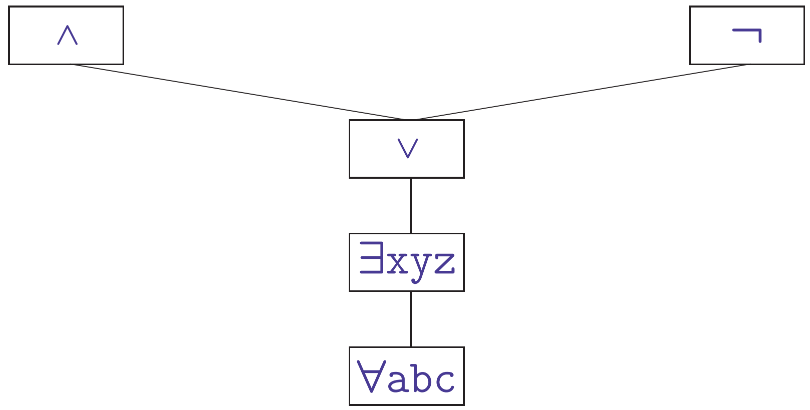
Formelbäume: Interne Darstellung von Formeln

- **Abstrakter Syntaxbaum, erzeugt durch Parsen der Formel**
- **Baumstruktur, annotiert mit Konnektiven und Symbolen**
- **Formelbaum für** $\forall$`abc` $\exists$`xyz Pxc` $\wedge$ `P(fzb,b)` $\vee$ $\neg$`P(fay,y)`



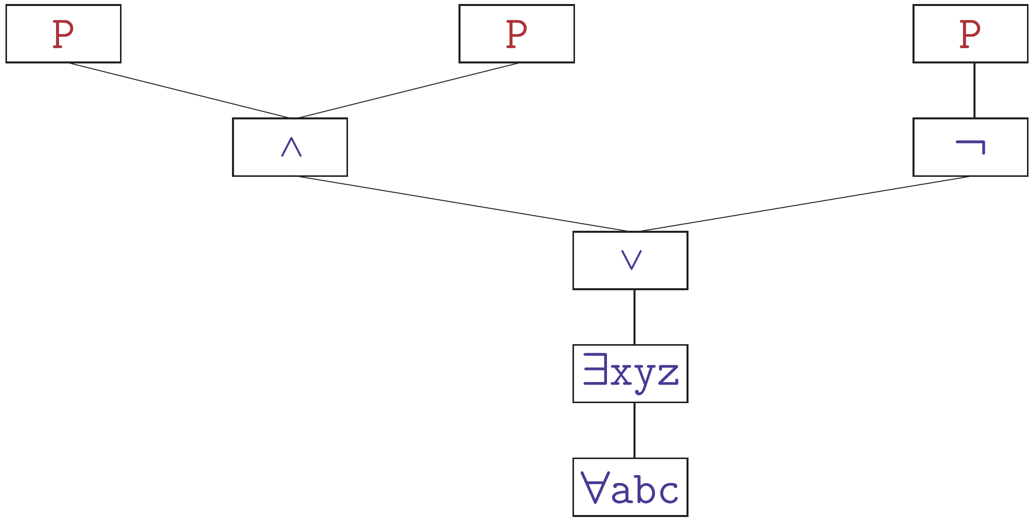
Formelbäume: Interne Darstellung von Formeln

- **Abstrakter Syntaxbaum, erzeugt durch Parsen der Formel**
- **Baumstruktur, annotiert mit Konnektiven und Symbolen**
- **Formelbaum für** $\forall$abc $\exists$xyz Pxc $\wedge$ P(fzb,b) $\vee$ $\neg$P(fay,y)



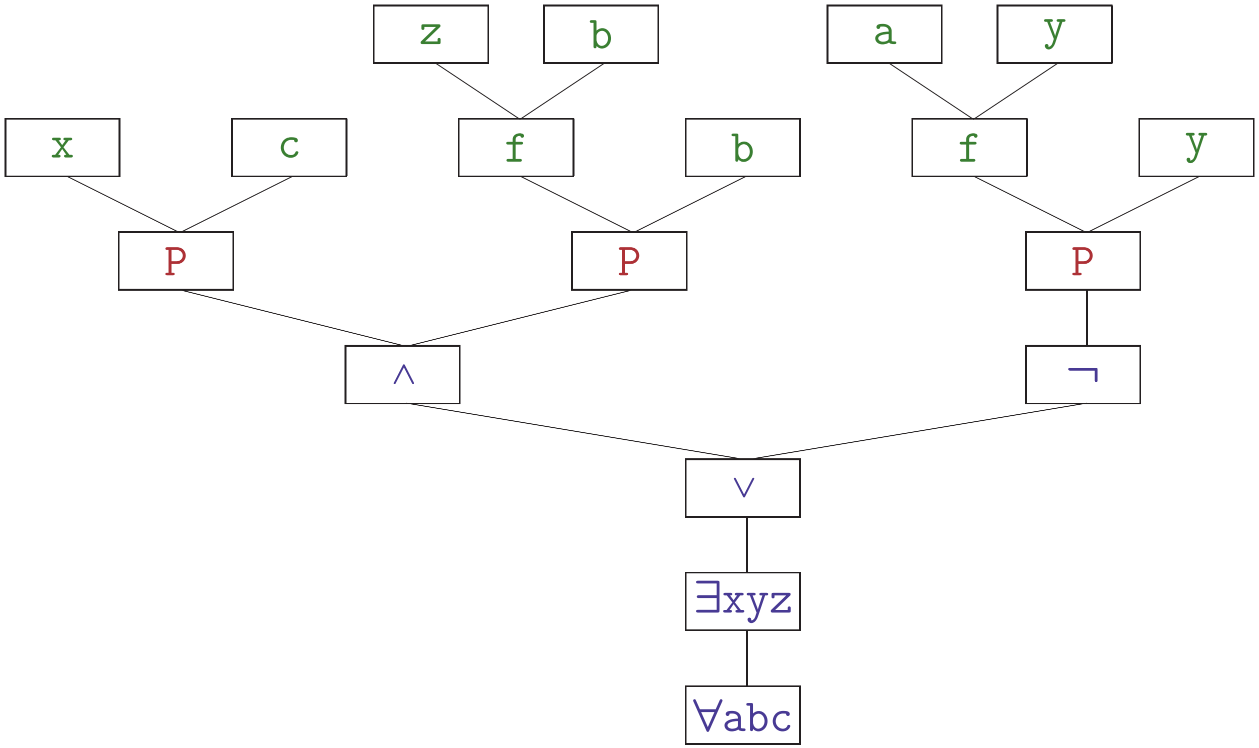
Formelbäume: Interne Darstellung von Formeln

- **Abstrakter Syntaxbaum, erzeugt durch Parsen der Formel**
- **Baumstruktur, annotiert mit Konnektiven und Symbolen**
- **Formelbaum für** `∀abc ∃xyz Pxc ∧ P(fzb,b) ∨ ¬P(fay,y)`



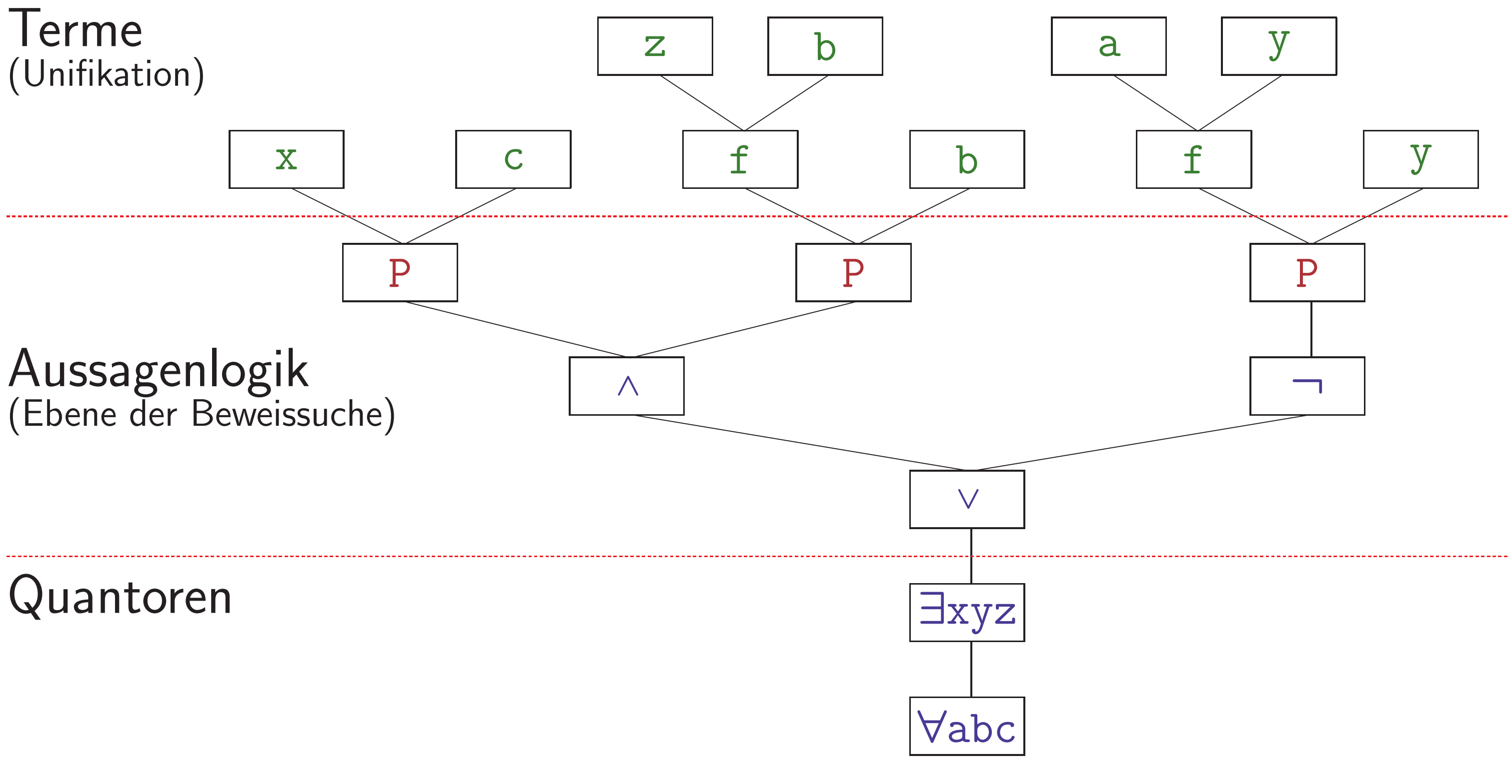
Formelbäume: Interne Darstellung von Formeln

- **Abstrakter Syntaxbaum, erzeugt durch Parsen der Formel**
- **Baumstruktur, annotiert mit Konnektiven und Symbolen**
- **Formelbaum für** $\forall$abc $\exists$xyz Pxc $\wedge$ P(fzb,b) $\vee$ $\neg$P(fay,y)



Formelbäume: Interne Darstellung von Formeln

- **Abstrakter Syntaxbaum, erzeugt durch Parsen der Formel**
- **Baumstruktur, annotiert mit Konnektiven und Symbolen**
- **Formelbaum für** $\forall$abc $\exists$xyz Pxc $\wedge$ P(fzb,b) $\vee$ $\neg$P(fay,y)



Gerichtete azyklische Graphen (DAG's)

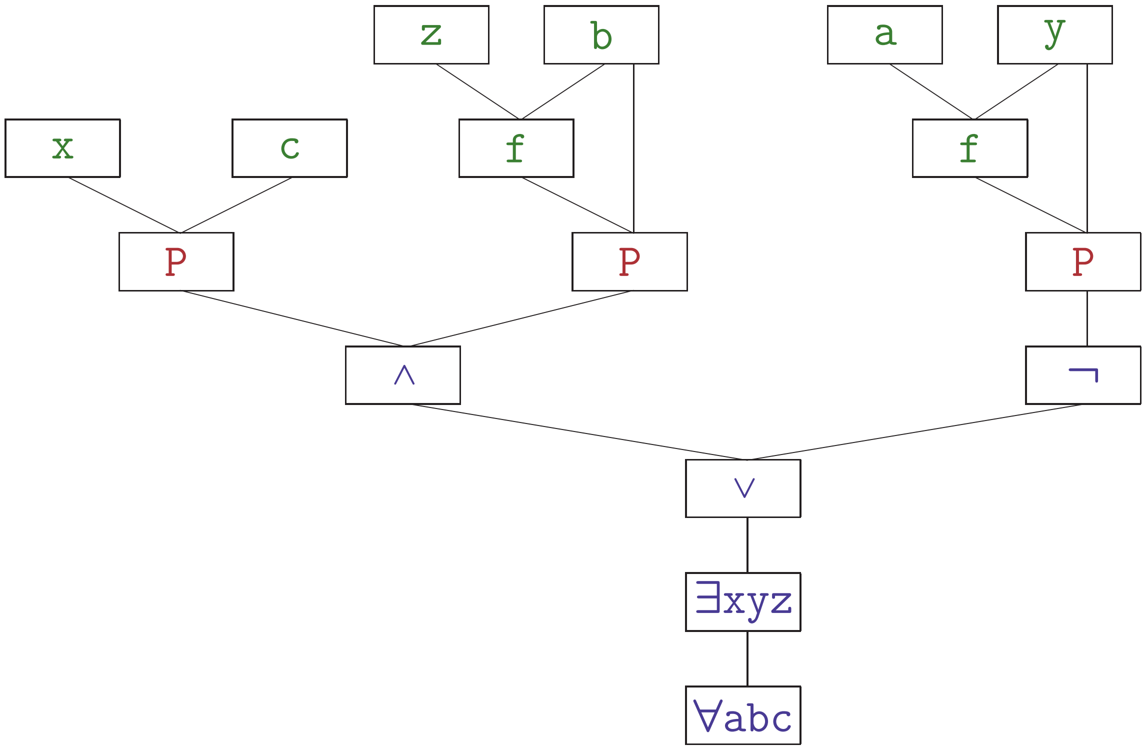
- **Structure Sharing: Zusammenlegung identischer Teilbäume**

Gerichtete azyklische Graphen (DAG's)

- **Structure Sharing: Zusammenlegung identischer Teilbäume**
- **Effizientere Darstellung von Formeln ohne unnötige Kopien**

Gerichtete azyklische Graphen (DAG's)

- **Structure Sharing: Zusammenlegung identischer Teilbäume**
- **Effizientere Darstellung von Formeln ohne unnötige Kopien**
- **DAG für** $\forall$abc $\exists$xyz Pxc $\wedge$ P(fzb,b) $\vee$ $\neg$P(fay,y)



Semantik der Prädikatenlogik (I)
Interpretation in der Mengentheorie

- **Interpretation $\mathcal{I}$:**
  - **Universum $\mathcal{U}$ + Interpretationsfunktion ι**

Semantik der Prädikatenlogik (I)
Interpretation in der Mengentheorie

- **Interpretation $\mathcal{I}$:**
  - **Universum $\mathcal{U}$ + Interpretationsfunktion ι**

- **Freie Wahl von ι auf elementaren Symbolen**
  - $\iota(x)$ Objekt aus $\mathcal{U}$ $\quad (x \in \mathcal{V})$
  - $\iota(f)$ n-stellige Funktion $\phi : \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{U}$ $\quad (f \in \mathcal{F}^n)$
  - $\iota(P)$ Funktion $\Pi : \mathcal{U}^n \rightarrow \{\mathsf{wahr}, \mathsf{falsch}\}$ $\quad (P \in \mathcal{P}^n)$

Semantik der Prädikatenlogik (I)
Interpretation in der Mengentheorie

- **Interpretation $\mathcal{I}$:**
  - **Universum $\mathcal{U}$ + Interpretationsfunktion ι**
- **Freie Wahl von ι auf elementaren Symbolen**
  - $\iota(x)$ Objekt aus $\mathcal{U}$ $(x \in \mathcal{V})$
  - $\iota(f)$ n-stellige Funktion $\phi : \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{U}$ $(f \in \mathcal{F}^n)$
  - $\iota(P)$ Funktion $\Pi : \mathcal{U}^n \rightarrow \{\text{wahr}, \text{falsch}\}$ $(P \in \mathcal{P}^n)$
- **Homomorphe Fortsetzung auf Terme und Formeln**
  - $\iota(f(t_1,\ldots,t_n)) = \iota(f)(\iota(t_1),\ldots,\iota(t_n))$
  - $\iota(\text{ff}) = \text{falsch}$
  - $\iota(P(t_1,\ldots,t_n)) = \iota(P)(\iota(t_1),\ldots,\iota(t_n))$.
  - $\iota((A)) = \iota(A)$

Semantik der Prädikatenlogik (II)
Fortsetzung von ι auf zusammengesetzte Formeln

$$\iota(\neg A) = \begin{cases} \mathsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \mathsf{falsch} \\ \mathsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \wedge B) = \begin{cases} \mathsf{wahr} & \text{falls} \\ \mathsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \vee B) = \begin{cases} \mathsf{wahr} & \text{falls} \\ \mathsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \Rightarrow B) = \begin{cases} \mathsf{wahr} & \text{falls} \\ \mathsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\forall x\, A) = \begin{cases} \mathsf{wahr} & \text{falls} \\ \mathsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\exists x\, A) = \begin{cases} \mathsf{wahr} & \text{falls} \\ \mathsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik (II)
Fortsetzung von ι auf zusammengesetzte Formeln

$$\iota(\neg A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{falsch} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \wedge B) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{wahr} \text{ und } \iota(B) = \textsf{wahr} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \vee B) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \Rightarrow B) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\forall x\, A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\exists x\, A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik (II)
Fortsetzung von ι auf zusammengesetzte Formeln

$$\iota(\neg A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{falsch} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \wedge B) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{wahr} \text{ und } \iota(B) = \textsf{wahr} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \vee B) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{wahr} \text{ oder } \iota(B) = \textsf{wahr} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \Rightarrow B) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\forall x\, A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\exists x\, A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik (II)
Fortsetzung von ι auf zusammengesetzte Formeln

$$\iota(\neg A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{falsch} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \wedge B) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{wahr} \text{ und } \iota(B) = \textsf{wahr} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \vee B) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{wahr} \text{ oder } \iota(B) = \textsf{wahr} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \Rightarrow B) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls aus } \iota(A) = \textsf{wahr} \text{ immer } \iota(B) = \textsf{wahr} \text{ folgt} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\forall x\, A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\exists x\, A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik (II)
Fortsetzung von ι auf zusammengesetzte Formeln

$$\iota(\neg A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{falsch} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \wedge B) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{wahr} \text{ und } \iota(B) = \textsf{wahr} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \vee B) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{wahr} \text{ oder } \iota(B) = \textsf{wahr} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \Rightarrow B) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls aus } \iota(A) = \textsf{wahr} \text{ immer } \iota(B) = \textsf{wahr} \text{ folgt} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\forall x\, A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota_x^u(A) = \textsf{wahr} \text{ für alle } u \in \mathcal{U} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\boxed{\iota_x^u(x) = u, \quad \text{sonst } \iota_x^u = \iota}$$

$$\iota(\exists x\, A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik (II)
Fortsetzung von ι auf zusammengesetzte Formeln

$$\iota(\neg A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{falsch} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \wedge B) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{wahr} \text{ und } \iota(B) = \textsf{wahr} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \vee B) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{wahr} \text{ oder } \iota(B) = \textsf{wahr} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \Rightarrow B) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls aus } \iota(A) = \textsf{wahr} \text{ immer } \iota(B) = \textsf{wahr} \text{ folgt} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\forall x\, A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota_x^u(A) = \textsf{wahr} \text{ für alle } u \in \mathcal{U} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\boxed{\iota_x^u(x) = u, \quad \text{sonst } \iota_x^u = \iota}$$

$$\iota(\exists x\, A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota_x^u(A) = \textsf{wahr} \text{ für ein } u \in \mathcal{U} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik (II) – klassisch
Fortsetzung von ι auf zusammengesetzte Formeln

$$\iota(\neg A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{falsch} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \wedge B) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{wahr} \text{ und } \iota(B) = \textsf{wahr} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \vee B) = \begin{cases} \textsf{falsch} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{falsch} \text{ und } \iota(B) = \textsf{falsch} \\ \textsf{wahr} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \Rightarrow B) = \begin{cases} \textsf{falsch} & \text{falls } \iota(A) = \textsf{wahr} \text{ und } \iota(B) = \textsf{falsch} \\ \textsf{wahr} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\forall x\, A) = \begin{cases} \textsf{wahr} & \text{falls } \iota_x^u(A) = \textsf{wahr} \text{ für alle } u \in \mathcal{U} \\ \textsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$\boxed{\iota_x^u(x) = u, \quad \text{sonst } \iota_x^u = \iota}$

$$\iota(\exists x\, A) = \begin{cases} \textsf{falsch} & \text{falls } \iota_x^u(A) = \textsf{falsch} \text{ für alle } u \in \mathcal{U} \\ \textsf{wahr} & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist das wirklich dasselbe?

Interpretation von Formeln

Sei ι die "Standardinterpretation" und $\iota(\texttt{x}) = \textit{dreizehn}$

- $\iota(\leq\texttt{(max(2,3,4),7)})$

Interpretation von Formeln

Sei ι die "Standardinterpretation" und $\iota(\mathtt{x}) = \mathit{dreizehn}$

- $\iota(\leq\mathtt{(max(2,3,4),7)})$
  $= \iota(\leq)(\iota(\mathtt{max(2,3,4)}),\iota(\mathtt{7}))$

Interpretation von Formeln

Sei ι die “Standardinterpretation” und $\iota(\texttt{x}) = \textit{dreizehn}$

- $\iota(\underline{\leq}\texttt{(max(2,3,4),7)})$

$= \iota(\underline{\leq})(\iota(\texttt{max(2,3,4)}),\iota(\texttt{7}))$

$= \Pi_{\underline{\leq}}(\iota(\texttt{max})(\iota(\texttt{2}),\iota(\texttt{3}),\iota(\texttt{4})),\ \textit{sieben}))$

Interpretation von Formeln

Sei ι die "Standardinterpretation" und $\iota(\texttt{x}) = \mathit{dreizehn}$

- $\iota(\leq\texttt{(max(2,3,4),7)})$

$= \iota(\leq)(\iota(\texttt{max(2,3,4)}),\iota(\texttt{7}))$

$= \Pi_{\leq}(\iota(\texttt{max})(\iota(\texttt{2}),\iota(\texttt{3}),\iota(\texttt{4})),\ \mathit{sieben}))$

$= \Pi_{\leq}(\phi_{max}(\mathit{zwei},\mathit{drei},\mathit{vier}),\ \mathit{sieben})$

Interpretation von Formeln

Sei ι die "Standardinterpretation" und $\iota(\texttt{x}) = \mathit{dreizehn}$

- $\iota(\texttt{≤(max(2,3,4),7)})$

$= \iota(\le)(\iota(\texttt{max(2,3,4)}),\iota(\texttt{7}))$

$= \Pi_{\le}(\iota(\texttt{max})(\iota(\texttt{2}),\iota(\texttt{3}),\iota(\texttt{4})),\ \mathit{sieben}))$

$= \Pi_{\le}(\phi_{max}(\mathit{zwei},\mathit{drei},\mathit{vier}),\ \mathit{sieben})$

$= \Pi_{\le}(\mathit{vier},\ \mathit{sieben})$

Interpretation von Formeln

Sei ι die "Standardinterpretation" und $\iota(\mathtt{x}) = \mathit{dreizehn}$

- $\iota(\mathtt{\leq(max(2,3,4),7)})$
  $= \iota(\leq)(\iota(\mathtt{max(2,3,4)}),\iota(\mathtt{7}))$
  $= \Pi_{\leq}(\iota(\mathtt{max})(\iota(\mathtt{2}),\iota(\mathtt{3}),\iota(\mathtt{4})),\ \mathit{sieben}))$
  $= \Pi_{\leq}(\phi_{max}(\mathit{zwei},\mathit{drei},\mathit{vier}),\ \mathit{sieben})$
  $= \Pi_{\leq}(\mathit{vier},\ \mathit{sieben})$
  $= \mathsf{wahr}$

Interpretation von Formeln

Sei ι die "Standardinterpretation" und $\iota(\mathtt{x}) = \mathit{dreizehn}$

- $\iota(\leq\mathtt{(max(2,3,4),7)})$
  $= \iota(\leq)(\iota(\mathtt{max(2,3,4)}),\iota(\mathtt{7}))$
  $= \Pi_{\leq}(\iota(\mathtt{max})(\iota(\mathtt{2}),\iota(\mathtt{3}),\iota(\mathtt{4})),\ \mathit{sieben}))$
  $= \Pi_{\leq}(\phi_{max}(\mathit{zwei},\mathit{drei},\mathit{vier}),\ \mathit{sieben})$
  $= \Pi_{\leq}(\mathit{vier},\ \mathit{sieben})$
  $= \mathsf{wahr}$

- $\iota(\exists\mathtt{x}\ \leq\mathtt{(max(2,3,4),x)})$

Interpretation von Formeln

Sei ι die "Standardinterpretation" und $\iota(\mathtt{x}) = \mathit{dreizehn}$

- $\iota(\leq\mathtt{(max(2,3,4),7)})$
  $= \iota(\leq)(\iota(\mathtt{max(2,3,4)}),\iota(\mathtt{7}))$
  $= \Pi_{\leq}(\iota(\mathtt{max})(\iota(\mathtt{2}),\iota(\mathtt{3}),\iota(\mathtt{4})),\ \mathit{sieben}))$
  $= \Pi_{\leq}(\phi_{max}(\mathit{zwei},\mathit{drei},\mathit{vier}),\ \mathit{sieben})$
  $= \Pi_{\leq}(\mathit{vier},\ \mathit{sieben})$
  $= \mathsf{wahr}$

- $\iota(\exists\mathtt{x}\ \leq\mathtt{(max(2,3,4),x)})$
  $= \mathsf{wahr}$ gdw. $\iota^u_x(\leq\mathtt{(max(2,3,4),x)}) = \mathsf{wahr}$ für ein $u \in \mathcal{U}$ ist

Interpretation von Formeln

Sei ι die "Standardinterpretation" und $\iota(\mathtt{x}) = \mathit{dreizehn}$

- $\iota(\leq(\mathtt{max(2,3,4),7}))$
  $= \iota(\leq)(\iota(\mathtt{max(2,3,4)}),\iota(\mathtt{7}))$
  $= \Pi_{\leq}(\iota(\mathtt{max})(\iota(\mathtt{2}),\iota(\mathtt{3}),\iota(\mathtt{4})),\ \mathit{sieben}))$
  $= \Pi_{\leq}(\phi_{max}(\mathit{zwei},\mathit{drei},\mathit{vier}),\ \mathit{sieben})$
  $= \Pi_{\leq}(\mathit{vier},\ \mathit{sieben})$
  $= \mathsf{wahr}$

- $\iota(\exists\mathtt{x}\ \leq(\mathtt{max(2,3,4),x}))$
  $= \mathsf{wahr}$ gdw. $\iota_x^u(\leq(\mathtt{max(2,3,4),x})) = \mathsf{wahr}$ für ein $u \in \mathcal{U}$ ist
  $= \vdots$
  $= \mathsf{wahr}$ gdw. $\Pi_{\leq}(\mathit{vier},\iota_x^u(\mathtt{x})) = \mathsf{wahr}$ für eine Zahl u

Interpretation von Formeln

Sei ι die "Standardinterpretation" und $\iota(\mathtt{x}) = \mathit{dreizehn}$

- $\iota(\leq\mathtt{(max(2,3,4),7)})$
  $= \iota(\leq)(\iota(\mathtt{max(2,3,4)}),\iota(\mathtt{7}))$
  $= \Pi_{\leq}(\iota(\mathtt{max})(\iota(\mathtt{2}),\iota(\mathtt{3}),\iota(\mathtt{4})),\ \mathit{sieben}))$
  $= \Pi_{\leq}(\phi_{max}(\mathit{zwei},\mathit{drei},\mathit{vier}),\ \mathit{sieben})$
  $= \Pi_{\leq}(\mathit{vier},\ \mathit{sieben})$
  $= \mathsf{wahr}$

- $\iota(\exists\mathtt{x}\ \leq\mathtt{(max(2,3,4),x)})$
  $= \mathsf{wahr}$ gdw. $\iota_x^u(\leq\mathtt{(max(2,3,4),x)}) = \mathsf{wahr}$ für ein $u \in \mathcal{U}$ ist
  $= \vdots$
  $= \mathsf{wahr}$ gdw. $\Pi_{\leq}(\mathit{vier},\iota_x^u(\mathtt{x})) = \mathsf{wahr}$ für eine Zahl u
  $= \mathsf{wahr}$ gdw. $\Pi_{\leq}(\mathit{vier},u) = \mathsf{wahr}$ für eine Zahl u

Interpretation von Formeln

Sei ι die "Standardinterpretation" und $\iota(\texttt{x}) = \mathit{dreizehn}$

- $\iota(\leq\texttt{(max(2,3,4),7)})$
  $= \iota(\leq)(\iota(\texttt{max(2,3,4)}),\iota(\texttt{7}))$
  $= \Pi_{\leq}(\iota(\texttt{max})(\iota(\texttt{2}),\iota(\texttt{3}),\iota(\texttt{4})),\ \mathit{sieben}))$
  $= \Pi_{\leq}(\phi_{max}(\mathit{zwei},\mathit{drei},\mathit{vier}),\ \mathit{sieben})$
  $= \Pi_{\leq}(\mathit{vier},\ \mathit{sieben})$
  $=$ wahr

- $\iota(\exists\texttt{x}\ \leq\texttt{(max(2,3,4),x)})$
  $=$ wahr gdw. $\iota^u_x(\leq\texttt{(max(2,3,4),x)}) =$ wahr für ein $u \in \mathcal{U}$ ist
  $= \vdots$
  $=$ wahr gdw. $\Pi_{\leq}(\mathit{vier},\iota^u_x(\texttt{x})) =$ wahr für eine Zahl u
  $=$ wahr gdw. $\Pi_{\leq}(\mathit{vier},u) =$ wahr für eine Zahl u
  $=$ wahr (wähle $u = \mathit{fünf}$)

Objekt- und Metasprache

Präsentation von Kalkülen hat zwei Sprachebenen

Objekt- und Metasprache

Präsentation von Kalkülen hat zwei Sprachebenen

- **Objektsprache**:
  - Sprache des Kalküls, in dem formalisiert wird
  - Formale Sprache mit präzise definierter Syntax

Objekt- und Metasprache

Präsentation von Kalkülen hat zwei Sprachebenen

- **Objektsprache:**
  - Sprache des Kalküls, in dem formalisiert wird
  - Formale Sprache mit präzise definierter Syntax
  - Beispiel: $(\exists x\ P_1(x) \vee P_2(x)) \;\Rightarrow\; \neg(\forall x\ \neg P_1(x) \wedge \neg P_2(x))$

Objekt- und Metasprache

Präsentation von Kalkülen hat zwei Sprachebenen

- **Objektsprache:**
  - Sprache des Kalküls, in dem formalisiert wird
  - Formale Sprache mit präzise definierter Syntax
  - Beispiel: $(\exists x\ P_1(x) \vee P_2(x)) \;\Rightarrow\; \neg(\forall x\ \neg P_1(x) \wedge \neg P_2(x))$
- **Metasprache:**
  - Sprache, um Aussagen über den Kalkül zu machen
    - Beschreibung von Syntax, Semantik, Eigenschaften des Kalküls

Objekt- und Metasprache

Präsentation von Kalkülen hat zwei Sprachebenen

- **Objektsprache:**
  - Sprache des Kalküls, in dem formalisiert wird
  - Formale Sprache mit präzise definierter Syntax
  - Beispiel: $(\exists x\ P_1(x) \vee P_2(x)) \Rightarrow \neg(\forall x\ \neg P_1(x) \wedge \neg P_2(x))$
- **Metasprache:**
  - Sprache, um Aussagen über den Kalkül zu machen
    - Beschreibung von Syntax, Semantik, Eigenschaften des Kalküls
  - Natürliche, oft stark schematisierte Sprache
  - Enthält Objektsprache, angereichert um syntaktische Metavariablen

Objekt- und Metasprache

Präsentation von Kalkülen hat zwei Sprachebenen

- **Objektsprache:**
  - Sprache des Kalküls, in dem formalisiert wird
  - Formale Sprache mit präzise definierter Syntax
  - Beispiel: $(\exists \mathtt{x}\ \mathtt{P}_1(\mathtt{x}) \vee \mathtt{P}_2(\mathtt{x})) \;\Rightarrow\; \neg(\forall \mathtt{x}\ \neg\mathtt{P}_1(\mathtt{x}) \wedge \neg\mathtt{P}_2(\mathtt{x}))$
- **Metasprache:**
  - Sprache, um Aussagen über den Kalkül zu machen
    - · Beschreibung von Syntax, Semantik, Eigenschaften des Kalküls
  - Natürliche, oft stark schematisierte Sprache
  - Enthält Objektsprache, angereichert um syntaktische Metavariablen
  - Beispiel: *aus* $(\exists x\ A \vee B)$ *folgt* $\neg(\forall x\ \neg A \wedge \neg B)$

Objekt- und Metasprache

Präsentation von Kalkülen hat zwei Sprachebenen

- **Objektsprache:**
  - Sprache des Kalküls, in dem formalisiert wird
  - Formale Sprache mit präzise definierter Syntax
  - Beispiel: $(\exists \mathtt{x}\ \mathtt{P}_1(\mathtt{x}) \vee \mathtt{P}_2(\mathtt{x})) \;\Rightarrow\; \neg(\forall \mathtt{x}\ \neg \mathtt{P}_1(\mathtt{x}) \wedge \neg \mathtt{P}_2(\mathtt{x}))$
- **Metasprache:**
  - Sprache, um Aussagen über den Kalkül zu machen
    - · Beschreibung von Syntax, Semantik, Eigenschaften des Kalküls
  - Natürliche, oft stark schematisierte Sprache
  - Enthält Objektsprache, angereichert um syntaktische Metavariablen
  - Beispiel: *aus* $(\exists x\ A \vee B)$ *folgt* $\neg(\forall x\ \neg A \wedge \neg B)$
- **Unterscheidung zuweilen durch Fonts / Farben**
  - Ansonsten aus Kontext eindeutig erkennbar

Modelle und Gültigkeit

- **Modell $\mathcal{M}$ von A** $\qquad (\mathcal{M} \models A)$
  - Interpretation $\mathcal{M} = (\iota, \mathcal{U})$ mit $\iota(A) = \mathsf{wahr}$

Modelle und Gültigkeit

- **Modell $\mathcal{M}$ von A** $\qquad (\mathcal{M} \models A)$
  - Interpretation $\mathcal{M} = (\iota, \mathcal{U})$ mit $\iota(A) = \mathsf{wahr}$
- **A gültig** $\qquad$ jede Interpretation ist ein Modell für A

Modelle und Gültigkeit

- **Modell $\mathcal{M}$ von A** $(\mathcal{M} \models A)$
  - Interpretation $\mathcal{M} = (\iota, \mathcal{U})$ mit $\iota(A) = \mathsf{wahr}$
- **A gültig** jede Interpretation ist ein Modell für A
- **A erfüllbar** es gibt ein Modell für A

Modelle und Gültigkeit

- **Modell $\mathcal{M}$ von A** $(\mathcal{M} \models A)$
  - Interpretation $\mathcal{M} = (\iota,\mathcal{U})$ mit $\iota(A) = \mathsf{wahr}$
- **A gültig** jede Interpretation ist ein Modell für A
- **A erfüllbar** es gibt ein Modell für A
- **A widerlegbar** es gibt ein Modell für $\neg A$

Modelle und Gültigkeit

- **Modell $\mathcal{M}$ von A** $\qquad (\mathcal{M} \models A)$
  - Interpretation $\mathcal{M} = (\iota, \mathcal{U})$ mit $\iota(A) =$ wahr
- **A gültig** $\qquad$ jede Interpretation ist ein Modell für A
- **A erfüllbar** $\qquad$ es gibt ein Modell für A
- **A widerlegbar** $\qquad$ es gibt ein Modell für $\neg A$
- **A widersprüchlich** $\qquad$ es gibt kein Modell für A

Modelle und Gültigkeit

- **Modell $\mathcal{M}$ von A** $(\mathcal{M} \models A)$
  - Interpretation $\mathcal{M} = (\iota, \mathcal{U})$ mit $\iota(A) =$ wahr
- **A gültig** jede Interpretation ist ein Modell für A
- **A erfüllbar** es gibt ein Modell für A
- **A widerlegbar** es gibt ein Modell für $\neg A$
- **A widersprüchlich** es gibt kein Modell für A
- **A folgt logisch aus Formelmenge $\mathcal{E}$** $(\mathcal{E} \models A)$
  - Aus $\mathcal{I} \models E$ für alle $E \in \mathcal{E}$ folgt $\mathcal{I} \models A$ (semantisch gültiger Schluß)

Modelle und Gültigkeit

- **Modell $\mathcal{M}$ von A** $(\mathcal{M} \models A)$
  – Interpretation $\mathcal{M} = (\iota,\mathcal{U})$ mit $\iota(A) = \mathsf{wahr}$
- **A gültig** jede Interpretation ist ein Modell für A
- **A erfüllbar** es gibt ein Modell für A
- **A widerlegbar** es gibt ein Modell für $\neg A$
- **A widersprüchlich** es gibt kein Modell für A
- **A folgt logisch aus Formelmenge $\mathcal{E}$** $(\mathcal{E} \models A)$
  – Aus $\mathcal{I} \models E$ für alle $E \in \mathcal{E}$ folgt $\mathcal{I} \models A$ (semantisch gültiger Schluß)

Deduktionstheorem: $\boxed{\mathcal{E} \cup \{E\} \models F \text{ genau dann, wenn } \mathcal{E} \models E \Rightarrow F}$

Modelle und Gültigkeit

- **Modell $\mathcal{M}$ von A** $(\mathcal{M} \models A)$
  - Interpretation $\mathcal{M} = (\iota, \mathcal{U})$ mit $\iota(A) = \mathsf{wahr}$
- **A gültig** jede Interpretation ist ein Modell für A
- **A erfüllbar** es gibt ein Modell für A
- **A widerlegbar** es gibt ein Modell für $\neg A$
- **A widersprüchlich** es gibt kein Modell für A
- **A folgt logisch aus Formelmenge $\mathcal{E}$** $(\mathcal{E} \models A)$
  - Aus $\mathcal{I} \models E$ für alle $E \in \mathcal{E}$ folgt $\mathcal{I} \models A$ (semantisch gültiger Schluß)

Deduktionstheorem: $\boxed{\mathcal{E} \cup \{E\} \models F \text{ genau dann, wenn } \mathcal{E} \models E \Rightarrow F}$

- **Theorie $\mathcal{T}$**
  - Erfüllbare Formelmenge mit allen Formeln, die daraus logisch folgen

Gültigkeit von Formeln

$$(\leq\texttt{(4,+(3,1))} \;\Rightarrow\; \leq\texttt{(+(3,1),4))} \;\Rightarrow\; \leq\texttt{(+(3,1),4)}$$

Gültigkeit von Formeln

$$(\leq(4,+(3,1)) \;\Rightarrow\; \leq(+(3,1),4)) \;\Rightarrow\; \leq(+(3,1),4)$$

erfüllbar, nicht gültig

Gültigkeit von Formeln

$(\leq(4,+(3,1)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$

erfüllbar, nicht gültig

$\leq(4,+(3,1)) \land \neg\leq(4,+(3,1))$

Gültigkeit von Formeln

$(\leq(4,+(3,1)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$

erfüllbar, nicht gültig

$\leq(4,+(3,1)) \wedge \neg\leq(4,+(3,1))$ unerfüllbar

Gültigkeit von Formeln

$(\leq(4,+(3,1)) \;\Rightarrow\; \leq(+(3,1),4)) \;\Rightarrow\; \leq(+(3,1),4)$

erfüllbar, nicht gültig

$\leq(4,+(3,1)) \;\wedge\; \neg\leq(4,+(3,1))$ unerfüllbar

$(\leq(4,+(3,1)) \wedge \leq(+(3,1),4)) \;\Rightarrow\; \leq(+(3,1),4)$

Gültigkeit von Formeln

$(\leq(4,+(3,1)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$

erfüllbar, nicht gültig

$\leq(4,+(3,1)) \wedge \neg\leq(4,+(3,1))$ unerfüllbar

$(\leq(4,+(3,1)) \wedge \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$ gültig

Gültigkeit von Formeln

$(\leq(4,+(3,1)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$

erfüllbar, nicht gültig

$\leq(4,+(3,1)) \land \neg\leq(4,+(3,1))$ unerfüllbar

$(\leq(4,+(3,1)) \land \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$ gültig

$\forall x\; x<0$

Gültigkeit von Formeln

$(\leq(4,+(3,1)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$

erfüllbar, nicht gültig

$\leq(4,+(3,1)) \wedge \neg\leq(4,+(3,1))$ unerfüllbar

$(\leq(4,+(3,1)) \wedge \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$ gültig

$\forall x\ x<0$ erfüllbar, nicht gültig

Gültigkeit von Formeln

$(\leq(4,+(3,1)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$

erfüllbar, nicht gültig

$\leq(4,+(3,1)) \land \neg\leq(4,+(3,1))$ unerfüllbar

$(\leq(4,+(3,1)) \land \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$ gültig

$\forall x \; x<0$ erfüllbar, nicht gültig

$\exists x \; x>0$

Gültigkeit von Formeln

$(\leq(4,+(3,1)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$

erfüllbar, nicht gültig

$\leq(4,+(3,1)) \wedge \neg\leq(4,+(3,1))$ unerfüllbar

$(\leq(4,+(3,1)) \wedge \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$ gültig

$\forall x\ x<0$ erfüllbar, nicht gültig

$\exists x\ x>0$ erfüllbar, nicht gültig

Gültigkeit von Formeln

$(\leq(4,+(3,1)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$

erfüllbar, nicht gültig

$\leq(4,+(3,1)) \wedge \neg\leq(4,+(3,1))$ unerfüllbar

$(\leq(4,+(3,1)) \wedge \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$ gültig

$\forall x\ x<0$ erfüllbar, nicht gültig

$\exists x\ x>0$ erfüllbar, nicht gültig

$\neg(\exists x\ x>0)$

Gültigkeit von Formeln

$(\leq(4,+(3,1)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$

erfüllbar, nicht gültig

$\leq(4,+(3,1)) \wedge \neg\leq(4,+(3,1))$ unerfüllbar

$(\leq(4,+(3,1)) \wedge \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$ gültig

$\forall x\ x<0$ erfüllbar, nicht gültig

$\exists x\ x>0$ erfüllbar, nicht gültig

$\neg(\exists x\ x>0)$ erfüllbar, nicht gültig

Gültigkeit von Formeln

$(\leq(4,+(3,1)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$

erfüllbar, nicht gültig

$\leq(4,+(3,1)) \wedge \neg\leq(4,+(3,1))$ unerfüllbar

$(\leq(4,+(3,1)) \wedge \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$ gültig

$\forall x\ x<0$ erfüllbar, nicht gültig

$\exists x\ x>0$ erfüllbar, nicht gültig

$\neg(\exists x\ x>0)$ erfüllbar, nicht gültig

Symbole $\leq$, +, 3, 4, 1, > haben keine feste Bedeutung

Inferenzkalküle

Syntaktische Manipulation formaler Ausdrücke unter Berücksichtigung der Semantik

Syntaktische Manipulation formaler Ausdrücke unter Berücksichtigung der Semantik

- **Inferenz:** Erzeugung von logischen Konsequenzen einer Formelmenge

  aus A *und* $A \Rightarrow B$ *folgt* B: $\quad \dfrac{A,\ \ A \Rightarrow B}{B}$

Syntaktische Manipulation formaler Ausdrücke unter Berücksichtigung der Semantik

- **Inferenz:** Erzeugung von logischen Konsequenzen einer Formelmenge

  $$\boxed{\textit{aus } A \textit{ und } A \Rightarrow B \textit{ folgt } B: \qquad \frac{A,\ \ A \Rightarrow B}{B}}$$

- **Regelschema** $\dfrac{\boldsymbol{A_1, \ldots, A_n}}{\boldsymbol{C}}$: *aus* $\underbrace{A_1 \textit{ und } \ldots A_n}_{\textit{Prämissen}}$ *folgt* $\underbrace{C}_{\textit{Konklusion}}$
  - **Axiom**: Regel ohne Prämissen
  - $\boldsymbol{\Gamma \vdash_{rs} C}$: Konkrete Anwendung des Regelschemas rs

Syntaktische Manipulation formaler Ausdrücke unter Berücksichtigung der Semantik

- **Inferenz:** Erzeugung von logischen Konsequenzen einer Formelmenge

  $$\boxed{\textit{aus } A \textit{ und } A \Rightarrow B \textit{ folgt } B\text{:} \qquad \frac{A,\ \ A \Rightarrow B}{B}}$$

- **Regelschema** $\dfrac{\boldsymbol{A_1, \ldots, A_n}}{\boldsymbol{C}}$: $\quad$ *aus* $\underbrace{A_1 \textit{ und } \ldots A_n}_{\textit{Prämissen}}$ *folgt* $\underbrace{C}_{\textit{Konklusion}}$
  - **Axiom**: Regel ohne Prämissen
  - $\boldsymbol{\Gamma \vdash_{rs} C}$: Konkrete Anwendung des Regelschemas rs

- **Theorem**
  - Formel, die sich durch Anwendung endlich vieler Regeln ableiten läßt

Inferenzkalküle

Syntaktische Manipulation formaler Ausdrücke unter Berücksichtigung der Semantik

- **Inferenz:** Erzeugung von logischen Konsequenzen einer Formelmenge

  $$\boxed{\textit{aus } A \textit{ und } A \Rightarrow B \textit{ folgt } B: \qquad \frac{A,\ \ A \Rightarrow B}{B}}$$

- **Regelschema** $\dfrac{\boldsymbol{A_1, \ldots, A_n}}{\boldsymbol{C}}$: $\quad$ *aus* $\underbrace{A_1 \textit{ und } \ldots A_n}_{\textit{Prämissen}}$ *folgt* $\underbrace{C}_{\textit{Konklusion}}$
  - **Axiom**: Regel ohne Prämissen
  - $\boldsymbol{\Gamma \vdash_{rs} C}$: Konkrete Anwendung des Regelschemas rs

- **Theorem**
  - Formel, die sich durch Anwendung endlich vieler Regeln ableiten läßt

- **Wahrheit ist nicht dasselbe wie Beweisbarkeit**
  - **Korrektheit** eines Kalküls: alle Theoreme sind gültig

    ... einer Regel: Gültigkeit der Konklusion folgt aus Gültigkeit der Prämissen
  - **Vollständigkeit**: alle gültigen Aussagen sind Theoreme

Kalkülarten (I)

Kalküle sind Hilfsmittel, keine Beweismethode

Kalkülarten (I)

Kalküle sind Hilfsmittel, keine Beweismethode

- **Synthetisch**
  - Schlüsse von Axiomen zur Aussage
  - Bottom-up Vorgehensweise
  - Übliche Art, fertige Beweise zu präsentieren

Kalkülarten (I)

Kalküle sind Hilfsmittel, keine Beweismethode

- **Synthetisch**
  - Schlüsse von Axiomen zur Aussage
  - Bottom-up Vorgehensweise
  - Übliche Art, fertige Beweise zu präsentieren
- **Analytisch**
  - Schlüsse von Zielaussage zu notwendigen Voraussetzungen
  - Top-down Vorgehensweise
  - Hilfreicher für Entwicklung von Beweisen

KALKÜLARTEN (II)

- **Axiom-orientiert: Frege–Hilbert–Kalküle**
  – Sehr mächtig, aber aufwendige Beweissuche (synthetisch)

Kalkülarten (II)

- **Axiom-orientiert: Frege–Hilbert–Kalküle**
  – Sehr mächtig, aber aufwendige Beweissuche (synthetisch)
- **Konnektivorientiert**

Kalkülarten (II)

- **Axiom-orientiert: Frege–Hilbert–Kalküle**
  – Sehr mächtig, aber aufwendige Beweissuche (synthetisch)
- **Konnektivorientiert**
  Natürliches Schließen $\mathcal{NK}$, $\mathcal{NJ}$ (synthetisch)
  – Einfache Regeln für Einführung und Analyse von Konnektiven
  – Separate globale Verwaltung von noch offenen Annahmen

Kalkülarten (II)

- **Axiom-orientiert: Frege–Hilbert–Kalküle**
  - Sehr mächtig, aber aufwendige Beweissuche (synthetisch)

- **Konnektivorientiert**

  Natürliches Schließen $\mathcal{NK}$, $\mathcal{NJ}$ (synthetisch)
  - Einfache Regeln für Einführung und Analyse von Konnektiven
  - Separate globale Verwaltung von noch offenen Annahmen

  Sequenzenkalküle $\mathcal{LK}$, $\mathcal{LJ}$ (synthetisch)
  - Natürliche Inferenzregeln mit lokaler Verwaltung von Annahmen

Kalkülarten (II)

- **Axiom-orientiert**: **Frege–Hilbert–Kalküle**
  – Sehr mächtig, aber aufwendige Beweissuche (synthetisch)

- **Konnektivorientiert**

  Natürliches Schließen $\mathcal{NK}$, $\mathcal{NJ}$ (synthetisch)
  – Einfache Regeln für Einführung und Analyse von Konnektiven
  – Separate globale Verwaltung von noch offenen Annahmen

  Sequenzenkalküle $\mathcal{LK}$, $\mathcal{LJ}$ (synthetisch)
  – Natürliche Inferenzregeln mit lokaler Verwaltung von Annahmen

  Refinement Logic (analytisch)
  – Analytischer Sequenzenkalkül, **gut für interaktive Beweissuche**

Kalkülarten (II)

- **Axiom-orientiert: Frege–Hilbert–Kalküle**
  – Sehr mächtig, aber aufwendige Beweissuche (synthetisch)

- **Konnektivorientiert**

  Natürliches Schließen $\mathcal{NK}$, $\mathcal{NJ}$ (synthetisch)
  – Einfache Regeln für Einführung und Analyse von Konnektiven
  – Separate globale Verwaltung von noch offenen Annahmen

  Sequenzenkalküle $\mathcal{LK}$, $\mathcal{LJ}$ (synthetisch)
  – Natürliche Inferenzregeln mit lokaler Verwaltung von Annahmen

  Refinement Logic (analytisch)
  – Analytischer Sequenzenkalkül, **gut für interaktive Beweissuche**

  Tableaux-Kalküle (analytisch)
  – Kompakte, unabhängig entstandene Variante des Sequenzenkalküls

Kalkülarten (II)

- **Axiom-orientiert: Frege–Hilbert–Kalküle**
  – Sehr mächtig, aber aufwendige Beweissuche (synthetisch)

- **Konnektivorientiert**

  Natürliches Schließen $\mathcal{NK}$, $\mathcal{NJ}$ (synthetisch)
  – Einfache Regeln für Einführung und Analyse von Konnektiven
  – Separate globale Verwaltung von noch offenen Annahmen

  Sequenzenkalküle $\mathcal{LK}$, $\mathcal{LJ}$ (synthetisch)
  – Natürliche Inferenzregeln mit lokaler Verwaltung von Annahmen

  Refinement Logic (analytisch)
  – Analytischer Sequenzenkalkül, **gut für interaktive Beweissuche**

  Tableaux-Kalküle (analytisch)
  – Kompakte, unabhängig entstandene Variante des Sequenzenkalküls

- **Maschinennah: Resolutions-/Konnektionskalküle**
  – Maschinennahe analytische Kalküle, gut für automatisches Beweisen

Frege–Hilbert–Kalküle

- **Sehr viele Axiomenschemata**

(A1)	$A \Rightarrow A$	(A11)	$(A \wedge B \ \vee\ C) \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
(A2)	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$	(A12)	$(A \vee C) \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B \ \vee\ C)$
(A3)	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	(A13)	$(A \vee B) \wedge C \Rightarrow (A \wedge C \ \vee\ B \wedge C)$
(A4)	$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	(A14)	$(A \wedge C \ \vee\ B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge C$
(A5)	$A \Rightarrow A \vee B$	(A15)	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
(A6)	$A \Rightarrow B \vee A$	(A16)	$A \wedge \neg A \Rightarrow B$
(A7)	$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$	(A17)	$(A \ \wedge\ (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
(A8)	$A \wedge B \Rightarrow A$	(A18)	$(A \wedge C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \Rightarrow B))$
(A9)	$A \wedge B \Rightarrow B$	(A19)	$(A \Rightarrow (A \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg A$
(A10)	$(C \Rightarrow A) \Rightarrow ((C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow A \wedge B))$	$\vdots$	$\vdots$

Frege–Hilbert–Kalküle

- **Sehr viele Axiomenschemata**

(A1)	$A \Rightarrow A$	(A11)	$(A \wedge B \ \vee \ C) \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
(A2)	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$	(A12)	$(A \vee C) \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B \ \vee \ C)$
(A3)	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	(A13)	$(A \vee B) \wedge C \Rightarrow (A \wedge C \ \vee \ B \wedge C)$
(A4)	$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	(A14)	$(A \wedge C \ \vee \ B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge C$
(A5)	$A \Rightarrow A \vee B$	(A15)	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
(A6)	$A \Rightarrow B \vee A$	(A16)	$A \wedge \neg A \Rightarrow B$
(A7)	$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$	(A17)	$(A \ \wedge \ (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
(A8)	$A \wedge B \Rightarrow A$	(A18)	$(A \wedge C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \Rightarrow B))$
(A9)	$A \wedge B \Rightarrow B$	(A19)	$(A \Rightarrow (A \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg A$
(A10)	$(C \Rightarrow A) \Rightarrow ((C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow A \wedge B))$	$\vdots$	$\vdots$

- **Nur eine Inferenzregel**

(mp) $$\frac{A \ , \ A \Rightarrow B}{B}$$

Frege–Hilbert–Kalküle

- **Sehr viele Axiomenschemata**

(A1)	$A \Rightarrow A$	(A11)	$(A \wedge B \ \vee \ C) \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
(A2)	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$	(A12)	$(A \vee C) \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B \ \vee \ C)$
(A3)	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	(A13)	$(A \vee B) \wedge C \Rightarrow (A \wedge C \ \vee \ B \wedge C)$
(A4)	$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	(A14)	$(A \wedge C \ \vee \ B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge C$
(A5)	$A \Rightarrow A \vee B$	(A15)	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
(A6)	$A \Rightarrow B \vee A$	(A16)	$A \wedge \neg A \Rightarrow B$
(A7)	$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$	(A17)	$(A \ \wedge \ (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
(A8)	$A \wedge B \Rightarrow A$	(A18)	$(A \wedge C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \Rightarrow B))$
(A9)	$A \wedge B \Rightarrow B$	(A19)	$(A \Rightarrow (A \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg A$
(A10)	$(C \Rightarrow A) \Rightarrow ((C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow A \wedge B))$	$\vdots$	$\vdots$

- **Nur eine Inferenzregel**

$$\text{(mp)} \qquad \frac{A \ , \ A \Rightarrow B}{B}$$

- **Beweise mathematisch elegant aber unnatürlich**

(1)	$A \wedge B \Rightarrow A$	(A8)
(2)	$A \wedge B \Rightarrow B$	(A9)
(3)	$(A \wedge B \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \wedge B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \wedge B \Rightarrow B \wedge A))$	(A10)
(4)	$(A \wedge B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \wedge B \Rightarrow B \wedge A)$	(mp mit (2), (3))
(5)	$(A \wedge B \Rightarrow B \wedge A)$	(mp mit (1), (4))

Natürliche Deduktion $\mathcal{NK}$

- **Lesbare, kompaktifizierte Beweisdarstellung**
  - Beweisbaum mit Formeln und schematischen Inferenzregeln als Übergänge
  - Globale Verwaltung temporärer Annahmen
  - Synthetischer Aufbau (ungünstig für Suche nach Beweisen)

Natürliche Deduktion $\mathcal{NK}$

- **Lesbare, kompaktifizierte Beweisdarstellung**
  - Beweisbaum mit Formeln und schematischen Inferenzregeln als Übergänge
  - Globale Verwaltung temporärer Annahmen
  - Synthetischer Aufbau (ungünstig für Suche nach Beweisen)
- **Inferenzfiguren gruppiert nach logischen Symbolen**
  - Einführungsregel: Welche Voraussetzungen machen eine Formel gültig?
  - Eliminationsregel: Was folgt aus einer gegebenen Formel?

$\wedge$-I	$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$		$\wedge$-E	$\dfrac{A \wedge B}{A}$	$\dfrac{A \wedge B}{B}$
$\vee$-I	$\dfrac{A}{A \vee B}$	$\dfrac{B}{A \vee B}$	$\vee$-E	$\dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C}$	
$\Rightarrow$-I	$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B}$		$\Rightarrow$-E	$\dfrac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$	
$\neg$-I	$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \mathsf{ff}\end{matrix}}{\neg A}$		$\neg$-E	$\dfrac{\neg A \quad A}{\mathsf{ff}}$	
axiom	$\dfrac{}{A \vee \neg A}$		ff-E	$\dfrac{\mathsf{ff}}{A}$	

Natürliche Deduktion $\mathcal{NK}$

- **Lesbare, kompaktifizierte Beweisdarstellung**
  - Beweisbaum mit Formeln und schematischen Inferenzregeln als Übergänge
  - Globale Verwaltung temporärer Annahmen
  - Synthetischer Aufbau (ungünstig für Suche nach Beweisen)
- **Inferenzfiguren gruppiert nach logischen Symbolen**
  - Einführungsregel: Welche Voraussetzungen machen eine Formel gültig?
  - Eliminationsregel: Was folgt aus einer gegebenen Formel?

$\wedge$-I	$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$	$\wedge$-E	$\dfrac{A \wedge B}{A} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B}$
$\vee$-I	$\dfrac{A}{A \vee B} \qquad \dfrac{B}{A \vee B}$	$\vee$-E	$\dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C}$
$\Rightarrow$-I	$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B}$	$\Rightarrow$-E	$\dfrac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$
$\neg$-I	$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \mathsf{ff}\end{matrix}}{\neg A}$	$\neg$-E	$\dfrac{\neg A \quad A}{\mathsf{ff}}$
axiom	$\dfrac{}{A \vee \neg A}$	ff-E	$\dfrac{\mathsf{ff}}{A}$

  - Einziges Axiom $(A \vee \neg A)$ nur für klassische Logik erforderlich

Beispiel: $((\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}) \wedge (\mathtt{B} \Rightarrow \mathtt{C})) \;\Rightarrow\; (\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{C})$ mathematischer Beweis

1. Wir nehmen an $(\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}) \wedge (\mathtt{B} \Rightarrow \mathtt{C})$ sei erfüllt

Beispiel: $((\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}) \wedge (\mathtt{B} \Rightarrow \mathtt{C})) \;\Rightarrow\; (\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{C})$ mathematischer Beweis

1. Wir nehmen an $(\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}) \wedge (\mathtt{B} \Rightarrow \mathtt{C})$ sei erfüllt

2. Wir nehmen weiter an, daß $\mathtt{A}$ gilt.

BEISPIEL: $((\texttt{A} \Rightarrow \texttt{B}) \wedge (\texttt{B} \Rightarrow \texttt{C})) \Rightarrow (\texttt{A} \Rightarrow \texttt{C})$ MATHEMATISCHER BEWEIS

1. Wir nehmen an $(\texttt{A} \Rightarrow \texttt{B}) \wedge (\texttt{B} \Rightarrow \texttt{C})$ sei erfüllt

2. Wir nehmen weiter an, daß $\texttt{A}$ gilt.

3. Aus der ersten Annahme folgt $(\texttt{A} \Rightarrow \texttt{B})$

Beispiel: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \;\Rightarrow\; (A \Rightarrow C)$
mathematischer Beweis

1. Wir nehmen an $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ sei erfüllt

2. Wir nehmen weiter an, daß A gilt.

3. Aus der ersten Annahme folgt $(A \Rightarrow B)$

4. und mit der zweiten dann auch B.

Beispiel: $((\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}) \wedge (\mathtt{B} \Rightarrow \mathtt{C})) \;\Rightarrow\; (\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{C})$ mathematischer Beweis

1. Wir nehmen an $(\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}) \wedge (\mathtt{B} \Rightarrow \mathtt{C})$ sei erfüllt
2. Wir nehmen weiter an, daß $\mathtt{A}$ gilt.
3. Aus der ersten Annahme folgt $(\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B})$
4. und mit der zweiten dann auch $\mathtt{B}$.
5. Aus der ersten Annahme folgt auch, daß $(\mathtt{B} \Rightarrow \mathtt{C})$ gilt

Beispiel: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ mathematischer Beweis

1. Wir nehmen an $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ sei erfüllt
2. Wir nehmen weiter an, daß A gilt.
3. Aus der ersten Annahme folgt $(A \Rightarrow B)$
4. und mit der zweiten dann auch B.
5. Aus der ersten Annahme folgt auch, daß $(B \Rightarrow C)$ gilt
6. und mit der vierten dann auch C.

Beispiel: $((A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ mathematischer Beweis

1. Wir nehmen an $(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)$ sei erfüllt
2. Wir nehmen weiter an, daß A gilt.
3. Aus der ersten Annahme folgt $(A \Rightarrow B)$
4. und mit der zweiten dann auch B.
5. Aus der ersten Annahme folgt auch, daß $(B \Rightarrow C)$ gilt
6. und mit der vierten dann auch C.
7. Es ergibt sich, daß C unter der Annahme A gilt. Also folgt $A \Rightarrow C$

Beispiel: $((A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ mathematischer Beweis

1. Wir nehmen an $(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)$ sei erfüllt
2. Wir nehmen weiter an, daß A gilt.
3. Aus der ersten Annahme folgt $(A \Rightarrow B)$
4. und mit der zweiten dann auch B.
5. Aus der ersten Annahme folgt auch, daß $(B \Rightarrow C)$ gilt
6. und mit der vierten dann auch C.
7. Es ergibt sich, daß C unter der Annahme A gilt. Also folgt $A \Rightarrow C$
8. Insgesamt folgt $A \Rightarrow C$ unter der Annahme $(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)$.
   Damit gilt die Behauptung: $((A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Beispiel: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
Beweis in $\mathcal{NK}$

1. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ Annahme
2. Wir nehmen weiter an, daß A gilt.
3. Aus der ersten Annahme folgt $(A \Rightarrow B)$
4. und mit der zweiten dann auch B.
5. Aus der ersten Annahme folgt auch, daß $(B \Rightarrow C)$ gilt
6. und mit der vierten dann auch C.
7. Es ergibt sich, daß C unter der Annahme A gilt. Also folgt $A \Rightarrow C$.
8. Insgesamt folgt $A \Rightarrow C$ unter der Annahme $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.
   Damit gilt die Behauptung: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Beispiel: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \;\Rightarrow\; (A \Rightarrow C)$
Beweis in $\mathcal{NK}$

1. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ — Annahme
2. A — Annahme
3. Aus der ersten Annahme folgt $(A \Rightarrow B)$
4. und mit der zweiten dann auch B.
5. Aus der ersten Annahme folgt auch, daß $(B \Rightarrow C)$ gilt
6. und mit der vierten dann auch C.
7. Es ergibt sich, daß C unter der Annahme A gilt. Also folgt $A \Rightarrow C$.
8. Insgesamt folgt $A \Rightarrow C$ unter der Annahme $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.

   Damit gilt die Behauptung: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \;\Rightarrow\; (A \Rightarrow C)$

Beispiel: $((\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}) \wedge (\mathtt{B} \Rightarrow \mathtt{C})) \;\Rightarrow\; (\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{C})$ Beweis in $\mathcal{NK}$

1. $(\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}) \wedge (\mathtt{B} \Rightarrow \mathtt{C})$ — Annahme
2. $\mathtt{A}$ — Annahme
3. $(\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B})$ — $\wedge$-E mit (1)
4. und mit der zweiten dann auch $\mathtt{B}$.
5. Aus der ersten Annahme folgt auch, daß $(\mathtt{B} \Rightarrow \mathtt{C})$ gilt
6. und mit der vierten dann auch $\mathtt{C}$.
7. Es ergibt sich, daß $\mathtt{C}$ unter der Annahme $\mathtt{A}$ gilt. Also folgt $\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{C}$.
8. Insgesamt folgt $\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{C}$ unter der Annahme $(\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}) \wedge (\mathtt{B} \Rightarrow \mathtt{C})$.
   Damit gilt die Behauptung: $((\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{B}) \wedge (\mathtt{B} \Rightarrow \mathtt{C})) \;\Rightarrow\; (\mathtt{A} \Rightarrow \mathtt{C})$

Beispiel: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \;\Rightarrow\; (A \Rightarrow C)$ Beweis in $\mathcal{NK}$

1. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ — Annahme
2. A — Annahme
3. $(A \Rightarrow B)$ — $\wedge$-E mit (1)
4. B — $\Rightarrow$-E mit (2) und (3)
5. Aus der ersten Annahme folgt auch, daß $(B \Rightarrow C)$ gilt
6. und mit der vierten dann auch C.
7. Es ergibt sich, daß C unter der Annahme A gilt. Also folgt $A \Rightarrow C$.
8. Insgesamt folgt $A \Rightarrow C$ unter der Annahme $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.
   Damit gilt die Behauptung: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \;\Rightarrow\; (A \Rightarrow C)$

Beispiel: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
Beweis in $\mathcal{NK}$

1. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ — Annahme
2. A — Annahme
3. $(A \Rightarrow B)$ — $\wedge$-E mit (1)
4. B — $\Rightarrow$-E mit (2) und (3)
5. $(B \Rightarrow C)$ — $\wedge$-E mit (1)
6. und mit der vierten dann auch C.
7. Es ergibt sich, daß C unter der Annahme A gilt. Also folgt $A \Rightarrow C$.
8. Insgesamt folgt $A \Rightarrow C$ unter der Annahme $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.
   Damit gilt die Behauptung: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Beispiel: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ Beweis in $\mathcal{NK}$

1. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ — Annahme
2. A — Annahme
3. $(A \Rightarrow B)$ — $\wedge$-E mit (1)
4. B — $\Rightarrow$-E mit (2) und (3)
5. $(B \Rightarrow C)$ — $\wedge$-E mit (1)
6. C — $\Rightarrow$-E mit (4) und (5)
7. Es ergibt sich, daß C unter der Annahme A gilt. Also folgt $A \Rightarrow C$.
8. Insgesamt folgt $A \Rightarrow C$ unter der Annahme $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.
   Damit gilt die Behauptung: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Beispiel: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \;\Rightarrow\; (A \Rightarrow C)$
Beweis in $\mathcal{NK}$

1. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	Annahme
2. A	Annahme
3. $(A \Rightarrow B)$	$\wedge$-E mit (1)
4. B	$\Rightarrow$-E mit (2) und (3)
5. $(B \Rightarrow C)$	$\wedge$-E mit (1)
6. C	$\Rightarrow$-E mit (4) und (5)
7. $(A \Rightarrow C)$	$\Rightarrow$-I mit (2) und (6) — (2) entfällt

8. Insgesamt folgt $A \Rightarrow C$ unter der Annahme $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.
   Damit gilt die Behauptung: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \;\Rightarrow\; (A \Rightarrow C)$

Beispiel: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
Beweis in $\mathcal{NK}$

1. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ — Annahme
2. A — Annahme
3. $(A \Rightarrow B)$ — $\wedge$-E mit (1)
4. B — $\Rightarrow$-E mit (2) und (3)
5. $(B \Rightarrow C)$ — $\wedge$-E mit (1)
6. C — $\Rightarrow$-E mit (4) und (5)
7. $(A \Rightarrow C)$ — $\Rightarrow$-I mit (2) und (6) — (2) entfällt
8. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ — $\Rightarrow$-I mit (1) und (7) — (1) entfällt

Beispiel: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
Beweis in $\mathcal{NK}$

1.	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	Annahme
2.	A	Annahme
3.	$(A \Rightarrow B)$	$\wedge$-E mit (1)
4.	B	$\Rightarrow$-E mit (2) und (3)
5.	$(B \Rightarrow C)$	$\wedge$-E mit (1)
6.	C	$\Rightarrow$-E mit (4) und (5)
7.	$(A \Rightarrow C)$	$\Rightarrow$-I mit (2) und (6) — (2) entfällt
8.	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	$\Rightarrow$-I mit (1) und (7) — (1) entfällt

Schematischer Beweis in Baumstruktur

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \quad \dfrac{[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)]}{(A \Rightarrow B)}\ \wedge\text{-}E}{B}\ \Rightarrow\text{-}E \qquad \dfrac{[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)]}{(B \Rightarrow C)}\ \wedge\text{-}E}{C}\ \Rightarrow\text{-}E}{(A \Rightarrow C)}\ \Rightarrow\text{-}I}{((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)}\ \Rightarrow\text{-}I
$$

Sequenzenkalküle

- **Modifikation von Natürlicher Deduktion**
  - Schließen über Aussagen mit Annahmen (Mengen von Formeln)

Sequenzenkalküle

- **Modifikation von Natürlicher Deduktion**
  – Schließen über Aussagen mit Annahmen (Mengen von Formeln)
- **Grundkonzept Sequenz:** $\underbrace{A_1, .., A_n}_{\text{Antezedent } \mathbf{\Gamma}} \vdash \underbrace{B_1, .., B_m}_{\text{Sukzedent } \mathbf{\Phi}}$
  – Lesart "*Eine der Formeln B_i folgt aus den Annahmen $A_1,\ldots,A_n$*"
  – Zielsequenz $\vdash C$ ("*Formel C gilt ohne weitere Annahmen*")

SEQUENZENKALKÜLE

- **Modifikation von Natürlicher Deduktion**
  – Schließen über Aussagen mit Annahmen (Mengen von Formeln)
- **Grundkonzept Sequenz:** $\underbrace{\boldsymbol{A_1,..,A_n}}_{\text{Antezedent } \boldsymbol{\Gamma}} \vdash \underbrace{\boldsymbol{B_1,..,B_m}}_{\text{Sukzedent } \boldsymbol{\Phi}}$
  – Lesart "*Eine der Formeln B_i folgt aus den Annahmen $A_1,\ldots,A_n$*"
  – Zielsequenz $\vdash C$ ("*Formel C gilt ohne weitere Annahmen*")
- **Semantik entspricht** $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_m$
  – Homomorphe Fortsetzung von Interpretationen

$$\iota(A_1,\ldots,A_n \vdash B_1,\ldots,B_m) = \begin{cases} \mathsf{wahr} & \text{falls aus } \iota(A_1) = \mathsf{wahr} \\ & \text{und } \ldots \iota(A_n) = \mathsf{wahr} \\ & \text{immer } \iota(B_1) = \mathsf{wahr} \\ & \text{oder } \ldots \iota(B_m) = \mathsf{wahr} \text{ folgt} \\ \mathsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

SEQUENZENKALKÜLE

- **Modifikation von Natürlicher Deduktion**
  - Schließen über Aussagen mit Annahmen (Mengen von Formeln)
- **Grundkonzept Sequenz:** $\underbrace{A_1, .., A_n}_{\text{Antezedent } \Gamma} \vdash \underbrace{B_1, .., B_m}_{\text{Sukzedent } \Phi}$
  - Lesart "*Eine der Formeln B_i folgt aus den Annahmen $A_1,\ldots,A_n$*"
  - Zielsequenz $\vdash C$ ("*Formel C gilt ohne weitere Annahmen*")
- **Semantik entspricht** $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_m$
  - Homomorphe Fortsetzung von Interpretationen

$$\iota(A_1,\ldots,A_n \vdash B_1,\ldots,B_m) = \begin{cases} \mathsf{wahr} & \text{falls aus } \iota(A_1) = \mathsf{wahr} \\ & \text{und } \ldots \iota(A_n) = \mathsf{wahr} \\ & \text{immer } \iota(B_1) = \mathsf{wahr} \\ & \text{oder } \ldots \iota(B_m) = \mathsf{wahr} \text{ folgt} \\ \mathsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Begriffe Modell, Gültigkeit, Erfüllbarkeit analog**

Inferenz in Sequenzenkalkülen

- **Synthetische Beweise wie bei $\mathcal{NK}$**
  - Lokale Sicht: keine globale Verwaltung von Annahmen nötig

Inferenz in Sequenzenkalkülen

- **Synthetische Beweise wie bei $\mathcal{NK}$**
  – Lokale Sicht: keine globale Verwaltung von Annahmen nötig
- **Regeln manipulieren Sequenzen statt Formeln**
  – Eliminationsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln links für Antezedent ($-L$)

Inferenz in Sequenzenkalkülen

- **Synthetische Beweise wie bei $\mathcal{NK}$**
  - Lokale Sicht: keine globale Verwaltung von Annahmen nötig
- **Regeln manipulieren Sequenzen statt Formeln**
  - Eliminationsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln links für Antezedent ($-L$)

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge\!-E \quad \textit{wird zu} \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi} \wedge\!-L$$

Inferenz in Sequenzenkalkülen

- **Synthetische Beweise wie bei $\mathcal{NK}$**
  - Lokale Sicht: keine globale Verwaltung von Annahmen nötig
- **Regeln manipulieren Sequenzen statt Formeln**
  - Eliminationsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln links für Antezedent ($-L$)

$$\frac{A \wedge B}{A}\ \wedge\!-\!E \qquad \textit{wird zu} \qquad \frac{\Gamma, A \ \vdash\ \Phi}{\Gamma, A \wedge B \ \vdash\ \Phi}\ \wedge\!-\!L$$

  - Einführungsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln rechts für Sukzedent ($-R$)

Inferenz in Sequenzenkalkülen

- **Synthetische Beweise wie bei $\mathcal{NK}$**
  - Lokale Sicht: keine globale Verwaltung von Annahmen nötig
- **Regeln manipulieren Sequenzen statt Formeln**
  - Eliminationsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln links für Antezedent ($-L$)

$$\frac{A \wedge B}{A}\ \wedge\text{-}E \qquad \textit{wird zu} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}\ \wedge\text{-}L$$

  - Einführungsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln rechts für Sukzedent ($-R$)

$$\begin{array}{llll}
\neg\text{-}R & \dfrac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi, \neg A} & \neg\text{-}L & \dfrac{\Gamma \vdash \Phi, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Phi} \\
\wedge\text{-}R & \dfrac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad \Gamma \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \wedge B} & \wedge\text{-}L & \dfrac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi} \quad \dfrac{\Gamma, B \vdash \Phi}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi} \\
\vee\text{-}R & \dfrac{\Gamma \vdash \Phi, A}{\Gamma \vdash \Phi, A \vee B} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \vee B} & \vee\text{-}L & \dfrac{\Gamma, A \vdash \Phi \quad \Gamma, B \vdash \Phi}{\Gamma, A \vee B \vdash \Phi} \\
\Rightarrow\text{-}R & \dfrac{\Gamma, A \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \Rightarrow B} & \Rightarrow\text{-}L & \dfrac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad \Delta, B \vdash \Psi}{\Gamma, \Delta, A \Rightarrow B \vdash \Phi, \Psi} \\
\textit{axiom} & \dfrac{}{A \vdash A} & \textit{Schnitt} & \dfrac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad A, \Delta \vdash \Psi}{\Gamma, \Delta \vdash \Phi, \Psi}
\end{array}$$

Inferenz in Sequenzenkalkülen

- **Synthetische Beweise wie bei $\mathcal{NK}$**
  - Lokale Sicht: keine globale Verwaltung von Annahmen nötig
- **Regeln manipulieren Sequenzen statt Formeln**
  - Eliminationsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln links für Antezedent ($-L$)

$$\frac{A \land B}{A}\ \land\text{-}E \qquad \textit{wird zu} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma, A \land B \vdash \Phi}\ \land\text{-}L$$

  - Einführungsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln rechts für Sukzedent ($-R$)

$\neg\text{-}R$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi, \neg A}$		$\neg\text{-}L$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Phi}$
$\land\text{-}R$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad \Gamma \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \land B}$		$\land\text{-}L$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma, A \land B \vdash \Phi} \quad \dfrac{\Gamma, B \vdash \Phi}{\Gamma, A \land B \vdash \Phi}$
$\lor\text{-}R$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, A}{\Gamma \vdash \Phi, A \lor B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \lor B}$	$\lor\text{-}L$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Phi \quad \Gamma, B \vdash \Phi}{\Gamma, A \lor B \vdash \Phi}$
$\Rightarrow\text{-}R$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \Rightarrow B}$		$\Rightarrow\text{-}L$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad \Delta, B \vdash \Psi}{\Gamma, \Delta, A \Rightarrow B \vdash \Phi, \Psi}$
axiom	$\dfrac{}{A \vdash A}$		*Schnitt*	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad A, \Delta \vdash \Psi}{\Gamma, \Delta \vdash \Phi, \Psi}$

  - Mehrere Sukzedentenformeln nur für klassische Logik erforderlich

Inferenz in Sequenzenkalkülen

- **Synthetische Beweise wie bei $\mathcal{NK}$**
  – Lokale Sicht: keine globale Verwaltung von Annahmen nötig
- **Regeln manipulieren Sequenzen statt Formeln**
  – Eliminationsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln links für Antezedent ($-L$)

$$\frac{A \wedge B}{A}\ \wedge\!-\!E \qquad \textit{wird zu} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}\ \wedge\!-\!L$$

  – Einführungsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln rechts für Sukzedent ($-R$)

$\neg-R$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi, \neg A}$		$\neg-L$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Phi}$
$\wedge-R$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad \Gamma \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \wedge B}$		$\wedge-L$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}$ $\quad \frac{\Gamma, B \vdash \Phi}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}$
$\vee-R$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A}{\Gamma \vdash \Phi, A \vee B}$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \vee B}$	$\vee-L$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi \quad \Gamma, B \vdash \Phi}{\Gamma, A \vee B \vdash \Phi}$
$\Rightarrow-R$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \Rightarrow B}$		$\Rightarrow-L$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad \Delta, B \vdash \Psi}{\Gamma, \Delta, A \Rightarrow B \vdash \Phi, \Psi}$
axiom	$\frac{}{A \vdash A}$		*Schnitt*	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad A, \Delta \vdash \Psi}{\Gamma, \Delta \vdash \Phi, \Psi}$

  – Mehrere Sukzedentenformeln nur für klassische Logik erforderlich
  – Originalformulierung des Kalküls $\mathcal{LK}$ verwendet Listen von Formeln
  Kalkül benutzt strukturelle Regeln zur Simulation von Formelmengen

Sequenzenbeweis für $((A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

1. $A \vdash A$ Axiom

Sequenzenbeweis für $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \;\Rightarrow\; (A \Rightarrow C)$

1. $A \;\vdash\; A$ — Axiom
2. $B \;\vdash\; B$ — Axiom

Sequenzenbeweis für $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

1. $A \vdash A$ — Axiom
2. $B \vdash B$ — Axiom
3. $A,\ A \Rightarrow B \vdash B$ — $\Rightarrow$-E mit (1), (2)

Sequenzenbeweis für $((A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)) \;\Rightarrow\; (A \Rightarrow C)$

1. $A \;\vdash\; A$ — Axiom

2. $B \;\vdash\; B$ — Axiom

3. $A,\; A \Rightarrow B \;\vdash\; B$ — $\Rightarrow$-E mit (1), (2)

4. $C \;\vdash\; C$ — Axiom

Sequenzenbeweis für $((A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

1. $A \vdash A$ — Axiom
2. $B \vdash B$ — Axiom
3. $A,\ A \Rightarrow B \vdash B$ — $\Rightarrow$-E mit (1), (2)
4. $C \vdash C$ — Axiom
5. $A,\ A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash C$ — $\Rightarrow$-E mit (3), (4)

Sequenzenbeweis für $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

1. $A \vdash A$ — Axiom
2. $B \vdash B$ — Axiom
3. $A,\ A \Rightarrow B \vdash B$ — $\Rightarrow$-E mit (1), (2)
4. $C \vdash C$ — Axiom
5. $A,\ A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash C$ — $\Rightarrow$-E mit (3), (4)
6. $A,\ (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash C$ — $\wedge$-E

Sequenzenbeweis für $((A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

1. $A \vdash A$ — Axiom
2. $B \vdash B$ — Axiom
3. $A,\ A \Rightarrow B \vdash B$ — $\Rightarrow$-E mit (1), (2)
4. $C \vdash C$ — Axiom
5. $A,\ A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash C$ — $\Rightarrow$-E mit (3), (4)
6. $A,\ (A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C) \vdash C$ — $\land$-E
7. $(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow C$ — $\Rightarrow$-I

Sequenzenbeweis für $((A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

1.	$A \vdash A$	Axiom
2.	$B \vdash B$	Axiom
3.	$A,\ A \Rightarrow B \vdash B$	$\Rightarrow$-E mit (1), (2)
4.	$C \vdash C$	Axiom
5.	$A,\ A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash C$	$\Rightarrow$-E mit (3), (4)
6.	$A,\ (A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C) \vdash C$	$\land$-E
7.	$(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow C$	$\Rightarrow$-I
8.	$\vdash (A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	$\Rightarrow$-I

Sequenzenbeweis für $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

1.	$A \vdash A$	Axiom
2.	$B \vdash B$	Axiom
3.	$A,\ A \Rightarrow B \vdash B$	$\Rightarrow$-E mit (1), (2)
4.	$C \vdash C$	Axiom
5.	$A,\ A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash C$	$\Rightarrow$-E mit (3), (4)
6.	$A,\ (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash C$	$\wedge$-E
7.	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow C$	$\Rightarrow$-I
8.	$\vdash (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	$\Rightarrow$-I

Schematischer Beweis in Baumstruktur

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A \qquad B \vdash B}{A,\ A \Rightarrow B \vdash B}\ \Rightarrow\text{-}L \qquad C \vdash C}{A,\ A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash C}\ \Rightarrow\text{-}L}{A,\ A \Rightarrow B,\ (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash C}\ \wedge\text{-}L}{A,\ (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash C}\ \wedge\text{-}L \ \text{(mit Kontraktion)}}{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow C}\ \Rightarrow\text{-}R}{\vdash ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow A \Rightarrow C}\ \Rightarrow\text{-}R
$$

KONSTRUKTIVE VS. KLASSISCHE BEWEISKALKÜLE

- **$\mathcal{NK}$ und $\mathcal{LK}$ haben intuitionistische Varianten**
  - $\mathcal{NJ}$: Kalkül verwendet nur konnektionsbezogene Inferenzregeln
    Keine gesonderten Axiome erforderlich

Konstruktive vs. klassische Beweiskalküle

- **$\mathcal{NK}$ und $\mathcal{LK}$ haben intuitionistische Varianten**
  - $\mathcal{NJ}$: Kalkül verwendet nur konnektionsbezogene Inferenzregeln
    Keine gesonderten Axiome erforderlich
  - $\mathcal{LJ}$: Sukzedent enthält genau eine Formel ("single conclusioned")
    Regeln dürfen nie zwei oder mehr Sukzedentenformeln erzeugen

Konstruktive vs. klassische Beweiskalküle

- **$\mathcal{NK}$ und $\mathcal{LK}$ haben intuitionistische Varianten**
  - $\mathcal{NJ}$: Kalkül verwendet nur konnektionsbezogene Inferenzregeln
    Keine gesonderten Axiome erforderlich
  - $\mathcal{LJ}$: Sukzedent enthält genau eine Formel ("single conclusioned")
    Regeln dürfen nie zwei oder mehr Sukzedentenformeln erzeugen
- **Die intuitionistische Form erscheint natürlicher**
  - Die Grundform der Kalküle liefert immer die konstruktive Logik

Konstruktive vs. klassische Beweiskalküle

- **$\mathcal{NK}$ und $\mathcal{LK}$ haben intuitionistische Varianten**
  - $\mathcal{NJ}$: Kalkül verwendet nur konnektionsbezogene Inferenzregeln
    Keine gesonderten Axiome erforderlich
  - $\mathcal{LJ}$: Sukzedent enthält genau eine Formel (“single conclusioned”)
    Regeln dürfen nie zwei oder mehr Sukzedentenformeln erzeugen

- **Die intuitionistische Form erscheint natürlicher**
  - Die Grundform der Kalküle liefert immer die konstruktive Logik
  - Nichtkonstruktive Schlüsse erfordern besondere Konstrukte
    - $\mathcal{NK}$: gesondertes “künstliches” Axiom $A \vee \neg A$ wird hinzugefügt
    - $\mathcal{LK}$: zu beweisende Schlußfolgerung steht nicht eindeutig fest
      ... man kann mitten im Beweis das Beweisziel wechseln

Konstruktive vs. klassische Beweiskalküle

- **$\mathcal{NK}$ und $\mathcal{LK}$ haben intuitionistische Varianten**
  - $\mathcal{NJ}$: Kalkül verwendet nur konnektionsbezogene Inferenzregeln
    Keine gesonderten Axiome erforderlich
  - $\mathcal{LJ}$: Sukzedent enthält genau eine Formel (“single conclusioned”)
    Regeln dürfen nie zwei oder mehr Sukzedentenformeln erzeugen

- **Die intuitionistische Form erscheint natürlicher**
  - Die Grundform der Kalküle liefert immer die konstruktive Logik
  - Nichtkonstruktive Schlüsse erfordern besondere Konstrukte
    - $\mathcal{NK}$: gesondertes “künstliches” Axiom $A \vee \neg A$ wird hinzugefügt
    - $\mathcal{LK}$: zu beweisende Schlußfolgerung steht nicht eindeutig fest
      ... man kann mitten im Beweis das Beweisziel wechseln
  - Nichtkonstruktive Beweise sind allerdings zuweilen erheblich kürzer

Synthetische vs. analytische Beweiskalküle

- **Synthetische Form unterstützt Beweispräsentation**
  - Beweis führt von Annahmen zum Endergebnis
  - Offen bleibt, wie man zu den anfänglichen Annahmen kommt

Synthetische vs. analytische Beweiskalküle

- **Synthetische Form unterstützt Beweispräsentation**
  - Beweis führt von Annahmen zum Endergebnis
  - Offen bleibt, wie man zu den anfänglichen Annahmen kommt
- **Analytische Form unterstützt Beweissuche**
  - Umkehrung der Inferenzregeln bzw. ihrer Lesart

$$\frac{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}{\Gamma, A, B \vdash \Phi} \quad \wedge L$$

Synthetische vs. analytische Beweiskalküle

- **Synthetische Form unterstützt Beweispräsentation**
  - Beweis führt von Annahmen zum Endergebnis
  - Offen bleibt, wie man zu den anfänglichen Annahmen kommt
- **Analytische Form unterstützt Beweissuche**
  - Umkehrung der Inferenzregeln bzw. ihrer Lesart
  - Geeigneter zur Entwicklung von Beweisen
    - Suche hinreichende Voraussetzungen für Gültigkeit einer Aussage
    - Iterativer Prozess verfeinert Beweisziel in Teilziele, bis keine unbewiesenen Voraussetzungen übrigbleiben

$$\frac{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}{\Gamma, A, B \vdash \Phi} \quad \wedge L$$

Synthetische vs. analytische Beweiskalküle

- **Synthetische Form unterstützt Beweispräsentation**
  - Beweis führt von Annahmen zum Endergebnis
  - Offen bleibt, wie man zu den anfänglichen Annahmen kommt
- **Analytische Form unterstützt Beweissuche**
  - Umkehrung der Inferenzregeln bzw. ihrer Lesart

    $$\frac{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}{\Gamma, A, B \vdash \Phi} \quad \wedge L$$

  - Geeigneter zur Entwicklung von Beweisen
    - Suche hinreichende Voraussetzungen für Gültigkeit einer Aussage
    - Iterativer Prozess verfeinert Beweisziel in Teilziele, bis keine unbewiesenen Voraussetzungen übrigbleiben
    - Sequenzen enthalten alle beweisrelevanten Informationen für eine lokale Durchführung dieses Prozesses,

Synthetische vs. analytische Beweiskalküle

- **Synthetische Form unterstützt Beweispräsentation**
  - Beweis führt von Annahmen zum Endergebnis
  - Offen bleibt, wie man zu den anfänglichen Annahmen kommt
- **Analytische Form unterstützt Beweissuche**
  - Umkehrung der Inferenzregeln bzw. ihrer Lesart $\quad \dfrac{\Gamma, A \wedge B \ \vdash \ \Phi}{\Gamma, A, B \ \vdash \ \Phi} \quad \wedge L$
  - Geeigneter zur Entwicklung von Beweisen
    - Suche hinreichende Voraussetzungen für Gültigkeit einer Aussage
    - Iterativer Prozess verfeinert Beweisziel in Teilziele, bis keine unbewiesenen Voraussetzungen übrigbleiben
    - Sequenzen enthalten alle beweisrelevanten Informationen für eine lokale Durchführung dieses Prozesses,
  - Synthetischer Beweis ist Umkehrung des fertigen Beweisbaums

Synthetische vs. analytische Beweiskalküle

- **Synthetische Form unterstützt Beweispräsentation**
  – Beweis führt von Annahmen zum Endergebnis
  – Offen bleibt, wie man zu den anfänglichen Annahmen kommt
- **Analytische Form unterstützt Beweissuche**
  – Umkehrung der Inferenzregeln bzw. ihrer Lesart
  $$\frac{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}{\Gamma, A, B \vdash \Phi} \quad \wedge L$$
  – Geeigneter zur Entwicklung von Beweisen
    · Suche hinreichende Voraussetzungen für Gültigkeit einer Aussage
    · Iterativer Prozess verfeinert Beweisziel in Teilziele, bis keine unbewiesenen Voraussetzungen übrigbleiben
    · Sequenzen enthalten alle beweisrelevanten Informationen für eine lokale Durchführung dieses Prozesses,
  – Synthetischer Beweis ist Umkehrung des fertigen Beweisbaums
- **Refinement Logic**: analytischer Sequenzenkalkül
  – Besonders geeignet für computergestützte interaktive Beweisführung

Refinement Logic: Analytische Sequenzenbeweise

Zielorientierte Beweisführung

Zielorientierte Beweisführung

- **Inferenzregel:** Abbildung von Beweisziel in Teilziele
  - Beweisziel: einzelne Sequenz, die zu beweisen ist
  - Teilziele: endliche (evtl. leere) Liste von Sequenzen, die nach Regelanwendung noch zu zeigen sind
  - Zugriff auf Hypothesen durch *Parameter*

$$\begin{array}{l} \Gamma \vdash C \;\; \texttt{BY} \;\; \mathit{rule} \\ \quad \Gamma_1 \vdash C_1 \\ \quad\quad \vdots \\ \quad \Gamma_n \vdash C_n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash C \;\; \texttt{BY andE} \;\; i \\ \quad \Gamma, A, B, \Delta \vdash C \end{array}$$

Refinement Logic: Analytische Sequenzenbeweise

Zielorientierte Beweisführung

- **Inferenzregel:** Abbildung von Beweisziel in Teilziele
  - Beweisziel: einzelne Sequenz, die zu beweisen ist
  - Teilziele: endliche (evtl. leere) Liste von Sequenzen, die nach Regelanwendung noch zu zeigen sind
  - Zugriff auf Hypothesen durch *Parameter*

$$\begin{array}{l} \Gamma \vdash C \;\; \texttt{BY} \;\; \mathit{rule} \\ \quad \Gamma_1 \vdash C_1 \\ \quad\quad \vdots \\ \quad \Gamma_n \vdash C_n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Gamma, A \land B, \Delta \vdash C \;\; \texttt{BY andE} \;\; i \\ \quad \Gamma, A, B, \Delta \vdash C \end{array}$$

- **Beweis:** Baum mit Sequenzen und Regeln als Knoten
  - Nachfolger eines Knotens sind Teilziele der Regelanwendung auf Sequenz
  - unvollständig: manche Blätter ohne Regel
  - vollständig: Regeln der Blätter ohne Teilziele

Refinement Logic: Analytische Sequenzenbeweise

Zielorientierte Beweisführung

- **Inferenzregel:** Abbildung von Beweisziel in Teilziele
  - Beweisziel: einzelne Sequenz, die zu beweisen ist
  - Teilziele: endliche (evtl. leere) Liste von Sequenzen, die nach Regelanwendung noch zu zeigen sind
  - Zugriff auf Hypothesen durch *Parameter*

$$\begin{array}{l} \Gamma \vdash C \ \texttt{BY}\ \textit{rule} \\ \quad \Gamma_1 \vdash C_1 \\ \quad\quad \vdots \\ \quad \Gamma_n \vdash C_n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash C \ \texttt{BY andE}\ i \\ \quad \Gamma, A, B, \Delta \vdash C \end{array}$$

- **Beweis:** Baum mit Sequenzen und Regeln als Knoten
  - Nachfolger eines Knotens sind Teilziele der Regelanwendung auf Sequenz
  - unvollständig: manche Blätter ohne Regel
  - vollständig: Regeln der Blätter ohne Teilziele

- **Theorem:** Formel C mit vollständigem Beweis für $\vdash C$

Refinement Logic: Aussagenlogische Regeln

Elimination (links)	Introduktion (rechts)
andE i $\quad \Gamma,\ A \wedge B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \wedge B$ andI
orE i $\quad \Gamma,\ A \vee B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \vee B$ orI1
impE i $\quad \Gamma,\ A \Rightarrow B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ impI
notE i $\quad \Gamma,\ \neg A,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash \neg A$ notI
falseE i $\quad \Gamma,\ \mathsf{ff},\ \Delta \vdash C$	

Refinement Logic: Aussagenlogische Regeln

Elimination (links)		Introduktion (rechts)	
andE i	$\Gamma,\ A\wedge B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A\wedge B$	andI
orE i	$\Gamma,\ A\vee B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A\vee B$	orI1
impE i	$\Gamma,\ A\Rightarrow B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A\Rightarrow B$	impI
notE i	$\Gamma,\ \neg A,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash \neg A$	notI
falseE i	$\Gamma,\ \mathsf{ff},\ \Delta \vdash C$		

Refinement Logic: Aussagenlogische Regeln

Elimination (links)		Introduktion (rechts)	
andE i	$\Gamma,\ A\wedge B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A\wedge B$ $\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash B$	andI
orE i	$\Gamma,\ A\vee B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A\vee B$	orI1
impE i	$\Gamma,\ A\Rightarrow B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A\Rightarrow B$	impI
notE i	$\Gamma,\ \neg A,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash \neg A$	notI
falseE i	$\Gamma,\ \mathrm{ff},\ \Delta \vdash C$		

Refinement Logic: Aussagenlogische Regeln

Elimination (links)		Introduktion (rechts)	
andE i	$\Gamma,\ A \wedge B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \wedge B$ $\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash B$	andI
orE i	$\Gamma,\ A \vee B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \vee B$	orI1
impE i	$\Gamma,\ A \Rightarrow B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \Rightarrow B$	impI
notE i	$\Gamma,\ \neg A,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash \neg A$	notI
falseE i	$\Gamma,\ \mathsf{ff},\ \Delta \vdash C$		

Refinement Logic: Aussagenlogische Regeln

Elimination (links)		Introduktion (rechts)	
andE i	$\Gamma,\ A \wedge B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \wedge B$ $\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash B$	andI
orE i	$\Gamma,\ A \vee B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \vee B$ $\Gamma \vdash A$	orI1
impE i	$\Gamma,\ A \Rightarrow B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \Rightarrow B$	impI
notE i	$\Gamma,\ \neg A,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash \neg A$	notI
falseE i	$\Gamma,\ \mathsf{ff},\ \Delta \vdash C$		

Refinement Logic: Aussagenlogische Regeln

Elimination (links)		Introduktion (rechts)	
andE i	$\Gamma,\ A \wedge B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \wedge B$ $\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash B$	andI
orE i	$\Gamma,\ A \vee B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \vee B$ $\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash A \vee B$ $\Gamma \vdash B$	orI1 orI2
impE i	$\Gamma,\ A \Rightarrow B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \Rightarrow B$	impI
notE i	$\Gamma,\ \neg A,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash \neg A$	notI
falseE i	$\Gamma,\ \mathit{ff},\ \Delta \vdash C$		

Refinement Logic: Aussagenlogische Regeln

Elimination (links)		Introduktion (rechts)	
andE i	$\Gamma,\ A\wedge B,\ \Delta \vdash C$ $\quad\Gamma,\ A,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A\wedge B$ $\quad\Gamma \vdash A$ $\quad\Gamma \vdash B$	andI
orE i	$\Gamma,\ A\vee B,\ \Delta \vdash C$ $\quad\Gamma,\ A,\ \Delta \vdash C$ $\quad\Gamma,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A\vee B$ $\quad\Gamma \vdash A$	orI1
		$\Gamma \vdash A\vee B$ $\quad\Gamma \vdash B$	orI2
impE i	$\Gamma,\ A\Rightarrow B,\ \Delta \vdash C$ $\quad\Gamma,\ A\Rightarrow B,\ \Delta \vdash A$ $\quad\Gamma,\ \Delta,\ B \vdash C$	$\Gamma \vdash A\Rightarrow B$	impI
notE i	$\Gamma,\ \neg A,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash \neg A$	notI
falseE i	$\Gamma,\ \mathit{ff},\ \Delta \vdash C$		

Refinement Logic: Aussagenlogische Regeln

Elimination (links)		Introduktion (rechts)	
andE i	$\Gamma,\ A\wedge B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A\wedge B$ $\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash B$	andI
orE i	$\Gamma,\ A\vee B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A\vee B$ $\Gamma \vdash A$	orI1
		$\Gamma \vdash A\vee B$ $\Gamma \vdash B$	orI2
impE i	$\Gamma,\ A\Rightarrow B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A\Rightarrow B,\ \Delta \vdash A$ $\Gamma,\ \Delta,\ B \vdash C$	$\Gamma \vdash A\Rightarrow B$ $\Gamma,\ A \vdash B$	impI
notE i	$\Gamma,\ \neg A,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash \neg A$	notI
falseE i	$\Gamma,\ \mathit{ff},\ \Delta \vdash C$		

Refinement Logic: Aussagenlogische Regeln

Elimination (links)	Introduktion (rechts)
andE i $\quad \Gamma,\ A \wedge B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \wedge B$ andI $\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash B$
orE i $\quad \Gamma,\ A \vee B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \vee B$ orI1 $\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash A \vee B$ orI2 $\Gamma \vdash B$
impE i $\quad \Gamma,\ A \Rightarrow B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A \Rightarrow B,\ \Delta \vdash A$ $\Gamma,\ \Delta,\ B \vdash C$	$\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ impI $\Gamma,\ A \vdash B$
notE i $\quad \Gamma,\ \neg A,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ \neg A,\ \Delta \vdash A$	$\Gamma \vdash \neg A$ notI
falseE i $\quad \Gamma,\ \mathsf{ff},\ \Delta \vdash C$	

Refinement Logic: Aussagenlogische Regeln

Elimination (links)		Introduktion (rechts)	
andE i	$\Gamma,\ A \wedge B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \wedge B$ $\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash B$	andI
orE i	$\Gamma,\ A \vee B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \vee B$ $\Gamma \vdash A$	orI1
		$\Gamma \vdash A \vee B$ $\Gamma \vdash B$	orI2
impE i	$\Gamma,\ A \Rightarrow B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A \Rightarrow B,\ \Delta \vdash A$ $\Gamma,\ \Delta,\ B \vdash C$	$\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ $\Gamma,\ A \vdash B$	impI
notE i	$\Gamma,\ \neg A,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ \neg A,\ \Delta \vdash A$	$\Gamma \vdash \neg A$ $\Gamma,\ A \vdash \mathit{ff}$	notI
falseE i	$\Gamma,\ \mathit{ff},\ \Delta \vdash C$		

Refinement Logic: Aussagenlogische Regeln

Elimination (links)		Introduktion (rechts)	
`andE` i	$\Gamma,\ A\wedge B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A,\ B,\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A\wedge B$ $\Gamma \vdash A$ $\Gamma \vdash B$	`andI`

`orE` i	$\Gamma,\ A\vee B,\ \Delta \vdash C$
	$\Gamma,\ A,\ \Delta \vdash C$
	$\Gamma,\ B,\ \Delta \vdash C$
		$\Gamma \vdash A\vee B$
		$\Gamma \vdash A$
		
		$\Gamma \vdash A\vee B$
		$\Gamma \vdash B$
			`orI1`
			
			`orI2`

`impE` i	$\Gamma,\ A\Rightarrow B,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A\Rightarrow B,\ \Delta \vdash A$ $\Gamma,\ \Delta,\ B \vdash C$	$\Gamma \vdash A\Rightarrow B$ $\Gamma,\ A \vdash B$	`impI`
`notE` i	$\Gamma,\ \neg A,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ \neg A,\ \Delta \vdash A$	$\Gamma \vdash \neg A$ $\Gamma,\ A \vdash \mathsf{ff}$	`notI`
`falseE` i	$\Gamma,\ \mathsf{ff},\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash P\vee\neg P$	`magic`

Die `magic` *Regel wird nur für klassische Logik benötigt*

Refinement Logic: Strukturelle Regeln

Regeln sind unabhängig von Prädikatenlogik

Refinement Logic: Strukturelle Regeln

Regeln sind unabhängig von Prädikatenlogik

`hypothesis` i $\quad \Gamma,\ A,\ \Delta \vdash A$	$\Gamma,\ \Delta \vdash C$ $\quad$ `cut` i A $\quad \Gamma,\ \Delta \vdash A$ $\quad \Gamma,\ A,\ \Delta \vdash C$
`thin` i $\quad \Gamma,\ A,\ \Delta \vdash C$ $\quad \Gamma,\ \Delta \vdash C$	

Refinement Logic: Strukturelle Regeln

Regeln sind unabhängig von Prädikatenlogik

`hypothesis` i	$\Gamma,\ A,\ \Delta \vdash A$	$\Gamma,\ \Delta \vdash C$	`cut` i A
		$\Gamma,\ \Delta \vdash A$	
		$\Gamma,\ A,\ \Delta \vdash C$	
`thin` i	$\Gamma,\ A,\ \Delta \vdash C$		
	$\Gamma,\ \Delta \vdash C$		

- `hypothesis` : nötig für Abschluß von Beweisen ($\hat{=}$ *axiom*)
- `cut` : hilfreich für Strukturierung und Verkürzung ($=$ *Schnitt*
- `thin` : nützlich bei großen Sequenzen ($=$ *Ausdünnung*)

Formale Behandlung von Quantoren

Simuliere ι_x^u durch syntaktische Mechanismen

Formale Behandlung von Quantoren

Simuliere ι_x^u durch syntaktische Mechanismen

- **Semantische Analyse von Quantoren braucht ι_x^u**
  - $\iota(\forall x\ \ A)$ und $\iota(\exists x\ \ A)$ wird durch $\iota_x^u(A)$ erklärt
    - $\iota_x^u(A)$ muß für alle oder einen Wert u wahr werden

Formale Behandlung von Quantoren

Simuliere ι_x^u durch syntaktische Mechanismen

- **Semantische Analyse von Quantoren braucht ι_x^u**
  - $\iota(\forall x\ \ A)$ und $\iota(\exists x\ \ A)$ wird durch $\iota_x^u(A)$ erklärt
    - $\iota_x^u(A)$ muß für alle oder einen Wert u wahr werden
  - ι_x^u modifiziert die Interpretation ι für die gebundene Variable x
  - Syntaktisches Gegenstück ist Ersetzung der Variablen x in A durch Terme

Formale Behandlung von Quantoren

Simuliere ι_x^u durch syntaktische Mechanismen

- **Semantische Analyse von Quantoren braucht ι_x^u**
  - $\iota(\forall x\ \ A)$ und $\iota(\exists x\ \ A)$ wird durch $\iota_x^u(A)$ erklärt
    - $\iota_x^u(A)$ muß für alle oder einen Wert u wahr werden
  - ι_x^u modifiziert die Interpretation ι für die gebundene Variable x
  - Syntaktisches Gegenstück ist Ersetzung der Variablen x in A durch Terme
- **Formales Konzept: Substitution $A[t/x]$**
  - Viele alternative Schreibweisen (sehr häufig $A\{x\backslash t\}$)
  - Vorkommen der Variablen x in A werden durch den Term t ersetzt

Formale Behandlung von Quantoren

Simuliere ι_x^u durch syntaktische Mechanismen

- **Semantische Analyse von Quantoren braucht ι_x^u**
  - $\iota(\forall x\ \ A)$ und $\iota(\exists x\ \ A)$ wird durch $\iota_x^u(A)$ erklärt
    - $\iota_x^u(A)$ muß für alle oder einen Wert u wahr werden
  - ι_x^u modifiziert die Interpretation ι für die gebundene Variable x
  - Syntaktisches Gegenstück ist Ersetzung der Variablen x in A durch Terme
- **Formales Konzept: Substitution $A[t/x]$**
  - Viele alternative Schreibweisen (sehr häufig $A\{x\backslash t\}$)
  - Vorkommen der Variablen x in A werden durch den Term t ersetzt
  - Hinreichend wenn jedes Objekt des Universums durch Terme beschreibbar
    - Reelle Zahlen, Funktionenräume etc. haben zu viele Objekte
  - Allquantor ist sonst nicht vollständig repräsentierbar

Substitution $A[t/x]$ – wichtige Aspekte

Substitution $A[t/x]$ – wichtige Aspekte

- **Substitution muß Semantik erhalten**
  - Die Namen quantifizierter Variablen dürfen keine Rolle spielen
    - $\exists x\;\; A(x)$ hat dieselbe Bedeutung wie $\exists y\;\; A(y)$

Substitution $A[t/x]$ – wichtige Aspekte

- **Substitution muß Semantik erhalten**
  - Die Namen quantifizierter Variablen dürfen keine Rolle spielen
    - $\exists x\ \ A(x)$ hat dieselbe Bedeutung wie $\exists y\ \ A(y)$
  - Keine Ersetzung von x durch t in $(\exists x\ \ x{\leq}4)[t/x]$
    - Das “äußere” x hat mit dem innerhalb des Quantors nichts zu tun

SUBSTITUTION $A[t/x]$ – WICHTIGE ASPEKTE

- **Substitution muß Semantik erhalten**
  - Die Namen quantifizierter Variablen dürfen keine Rolle spielen
    - $\exists x\ \ A(x)$ hat dieselbe Bedeutung wie $\exists y\ \ A(y)$
  - Keine Ersetzung von x durch t in $(\exists x\ \ x{\leq}4)[t/x]$
    - Das "äußere" x hat mit dem innerhalb des Quantors nichts zu tun
  - Keine Ersetzung von x durch y in $(\exists y\ \ x{<}y)[y/x]$
    - Durch die Ersetzung würde ein ungewollter Selbstbezug entstehen

SUBSTITUTION $A[t/x]$ – WICHTIGE ASPEKTE

- **Substitution muß Semantik erhalten**
  – Die Namen quantifizierter Variablen dürfen keine Rolle spielen
    · $\exists x\ \ A(x)$ hat dieselbe Bedeutung wie $\exists y\ \ A(y)$
  – Keine Ersetzung von x durch t in $(\exists x\ \ x{\leq}4)[t/x]$
    · Das "äußere" x hat mit dem innerhalb des Quantors nichts zu tun
  – Keine Ersetzung von x durch y in $(\exists y\ \ x{<}y)[y/x]$
    · Durch die Ersetzung würde ein ungewollter Selbstbezug entstehen

- **Variablenvorkommen müssen identifizierbar sein**
  – Gebundenes Vorkommen x in A: x erscheint in Quantor, der A umfaßt
  – Freies Vorkommen x in A: x kommt in A vor, ohne gebunden zu sein

SUBSTITUTION $A[t/x]$ – WICHTIGE ASPEKTE

- **Substitution muß Semantik erhalten**
  - Die Namen quantifizierter Variablen dürfen keine Rolle spielen
    - $\exists x\ \ A(x)$ hat dieselbe Bedeutung wie $\exists y\ \ A(y)$
  - Keine Ersetzung von x durch t in $(\exists x\ \ x{\le}4)[t/x]$
    - Das “äußere” x hat mit dem innerhalb des Quantors nichts zu tun
  - Keine Ersetzung von x durch y in $(\exists y\ \ x{<}y)[y/x]$
    - Durch die Ersetzung würde ein ungewollter Selbstbezug entstehen
- **Variablenvorkommen müssen identifizierbar sein**
  - Gebundenes Vorkommen x in A: x erscheint in Quantor, der A umfaßt
  - Freies Vorkommen x in A: x kommt in A vor, ohne gebunden zu sein
  - Notation $\boldsymbol{A[x]}$: Ausdruck A hat mögliche freie Vorkommen von x

Substitution $A[t/x]$ – wichtige Aspekte

- **Substitution muß Semantik erhalten**
  - Die Namen quantifizierter Variablen dürfen keine Rolle spielen
    - $\exists x\ \ A(x)$ hat dieselbe Bedeutung wie $\exists y\ \ A(y)$
  - Keine Ersetzung von x durch t in $(\exists x\ \ x{\le}4)[t/x]$
    - Das "äußere" x hat mit dem innerhalb des Quantors nichts zu tun
  - Keine Ersetzung von x durch y in $(\exists y\ \ x{<}y)[y/x]$
    - Durch die Ersetzung würde ein ungewollter Selbstbezug entstehen
- **Variablenvorkommen müssen identifizierbar sein**
  - Gebundenes Vorkommen x in A: x erscheint in Quantor, der A umfaßt
  - Freies Vorkommen x in A: x kommt in A vor, ohne gebunden zu sein
  - Notation $\boldsymbol{A[x]}$: Ausdruck A hat mögliche freie Vorkommen von x
  - A heißt geschlossen falls A keine freien Variablen enthält

Vorkommen von Variablen präzisiert

- x die Variable x kommt frei vor; $y{\neq}x$ kommt nicht vor.
  ff: die Variable x kommt nicht vor

Vorkommen von Variablen präzisiert

- x — die Variable x kommt frei vor; $y{\neq}x$ kommt nicht vor.
  ff: — die Variable x kommt nicht vor
- $f(t_1, ..., t_n)$ — freie Vorkommen von x in t_i bleiben frei
  $P(t_1, ..., t_n)$ — gebundene Vorkommen von x bleiben gebunden.

Vorkommen von Variablen präzisiert

- x — die Variable x kommt frei vor; $y{\neq}x$ kommt nicht vor.
  ff: — die Variable x kommt nicht vor
- $f(t_1, ..., t_n)$ — freie Vorkommen von x in t_i bleiben frei
  $P(t_1, ..., t_n)$ — gebundene Vorkommen von x bleiben gebunden.
- $\neg A$, (A) — freie Vorkommen von x in A, B bleiben frei
  $A \wedge B$, $A \vee B$ — gebundene Vorkommen von x bleiben gebunden.
  $A \Rightarrow B$

Vorkommen von Variablen präzisiert

• x	die Variable x kommt frei vor; $y{\neq}x$ kommt nicht vor.
ff:	die Variable x kommt nicht vor
• $f(t_1, ..., t_n)$	freie Vorkommen von x in t_i bleiben frei
$P(t_1, ..., t_n)$	gebundene Vorkommen von x bleiben gebunden.
• $\neg A$, (A)	freie Vorkommen von x in A, B bleiben frei
$A \wedge B$, $A \vee B$	gebundene Vorkommen von x bleiben gebunden.
$A \Rightarrow B$	
• $\forall x\ A$	beliebige Vorkommen von x in A werden gebunden
$\exists x\ A$	Vorkommen von $y{\neq}x$ in A bleiben unverändert.

Vorkommen von Variablen präzisiert

• x	die Variable x kommt frei vor; $y{\neq}x$ kommt nicht vor.
ff:	die Variable x kommt nicht vor
• $f(t_1, ..., t_n)$	freie Vorkommen von x in t_i bleiben frei
$P(t_1, ..., t_n)$	gebundene Vorkommen von x bleiben gebunden.
• $\neg A$, (A)	freie Vorkommen von x in A, B bleiben frei
$A \wedge B$, $A \vee B$	gebundene Vorkommen von x bleiben gebunden.
$A \Rightarrow B$	
• $\forall x\ A$	beliebige Vorkommen von x in A werden gebunden
$\exists x\ A$	Vorkommen von $y{\neq}x$ in A bleiben unverändert.

$$(\forall x\ P(x) \ \wedge\ Q(x)) \ \wedge\ R(x)$$

VORKOMMEN VON VARIABLEN PRÄZISIERT

• x	die Variable x kommt frei vor; $y{\neq}x$ kommt nicht vor.
ff:	die Variable x kommt nicht vor
• $f(t_1, ..., t_n)$	freie Vorkommen von x in t_i bleiben frei
$P(t_1, ..., t_n)$	gebundene Vorkommen von x bleiben gebunden.
• $\neg A$, (A)	freie Vorkommen von x in A, B bleiben frei
$A \wedge B$, $A \vee B$	gebundene Vorkommen von x bleiben gebunden.
$A \Rightarrow B$	
• $\forall x\ \ A$	beliebige Vorkommen von x in A werden gebunden
$\exists x\ \ A$	Vorkommen von $y{\neq}x$ in A bleiben unverändert.

$$(\forall \mathtt{x}\ \underbrace{\mathtt{P(x)}\ \wedge\ \mathtt{Q(x)}}_{\mathtt{x}\ \textit{frei}})\ \wedge\ \underbrace{\mathtt{R(x)}}_{\mathtt{x}\ \textit{frei}}$$

Vorkommen von Variablen präzisiert

- x — die Variable x kommt frei vor; $y{\neq}x$ kommt nicht vor.
  ff: — die Variable x kommt nicht vor
- $f(t_1, ..., t_n)$, $P(t_1, ..., t_n)$ — freie Vorkommen von x in t_i bleiben frei, gebundene Vorkommen von x bleiben gebunden.
- $\neg A$, (A), $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ — freie Vorkommen von x in A, B bleiben frei, gebundene Vorkommen von x bleiben gebunden.
- $\forall x\ A$, $\exists x\ A$ — beliebige Vorkommen von x in A werden gebunden. Vorkommen von $y{\neq}x$ in A bleiben unverändert.

$$\overbrace{(\forall \mathtt{x}\ \underbrace{\mathtt{P(x)}\ \wedge\ \mathtt{Q(x)}}_{\mathtt{x}\ \textit{frei}})}^{\mathtt{x}\ \textit{gebunden}} \wedge \underbrace{\mathtt{R(x)}}_{\mathtt{x}\ \textit{frei}}$$

Vorkommen von Variablen präzisiert

- x — die Variable x kommt frei vor; $y{\neq}x$ kommt nicht vor.
  ff: — die Variable x kommt nicht vor

- $f(t_1, ..., t_n)$ — freie Vorkommen von x in t_i bleiben frei
  $P(t_1, ..., t_n)$ — gebundene Vorkommen von x bleiben gebunden.

- $\neg A$, (A) — freie Vorkommen von x in A, B bleiben frei
  $A \wedge B$, $A \vee B$ — gebundene Vorkommen von x bleiben gebunden.
  $A \Rightarrow B$

- $\forall x\ A$ — beliebige Vorkommen von x in A werden gebunden
  $\exists x\ A$ — Vorkommen von $y{\neq}x$ in A bleiben unverändert.

$$\overbrace{\overbrace{(\forall \mathtt{x}\ \underbrace{\mathtt{P(x)} \wedge \mathtt{Q(x)}}_{\mathtt{x}\ \textit{frei}})}^{\mathtt{x}\ \textit{gebunden}} \wedge \underbrace{\mathtt{R(x)}}_{\mathtt{x}\ \textit{frei}}}^{\mathtt{x}\ \textit{frei und gebunden}}$$

Substitution $A[t/x]$ formal

Endliche Abbildung σ von Variablen in Terme

– $\boldsymbol{\sigma = [t_1, .., t_n/x_1, .., x_n]} \mathrel{\hat{=}} \sigma(x_1){=}t_1, \ldots, \sigma(x_n){=}t_n$

– $\boldsymbol{A\sigma}$: Anwendung von σ auf den Ausdruck A

– $\boldsymbol{\tau\,\sigma}$: Komposition von τ und σ (σ idempotent falls $\sigma\,\sigma = \sigma$)

Substitution $A[t/x]$ formal

Endliche Abbildung σ von Variablen in Terme

- $\boldsymbol{\sigma = [t_1,..,t_n/x_1,..,x_n]} \hat{=} \sigma(x_1)=t_1, \ldots, \sigma(x_n)=t_n$
- $\boldsymbol{A\sigma}$: Anwendung von σ auf den Ausdruck A
- $\boldsymbol{\tau\,\sigma}$: Komposition von τ und σ (σ idempotent falls $\sigma\,\sigma = \sigma$)

$$\lfloor x \rfloor [t/x] \quad = t$$

Substitution $A[t/x]$ formal

Endliche Abbildung σ von Variablen in Terme

– $\boldsymbol{\sigma = [t_1, .., t_n/x_1, .., x_n]} \hat{=} \sigma(x_1){=}t_1, \ldots, \sigma(x_n){=}t_n$

– $\boldsymbol{A\sigma}$: Anwendung von σ auf den Ausdruck A

– $\boldsymbol{\tau\,\sigma}$: Komposition von τ und σ (σ idempotent falls $\sigma\,\sigma = \sigma$)

$\lfloor x \rfloor [t/x]$	$= t$	$\lfloor x \rfloor [t/y]$	$= x$		$(y{\neq}x)$

Substitution $A[t/x]$ formal

Endliche Abbildung σ von Variablen in Terme

– $\boldsymbol{\sigma = [t_1, .., t_n/x_1, .., x_n]} \mathrel{\hat{=}} \sigma(x_1){=}t_1, \ldots, \sigma(x_n){=}t_n$
– $\boldsymbol{A\sigma}$: Anwendung von σ auf den Ausdruck A
– $\boldsymbol{\tau\,\sigma}$: Komposition von τ und σ (σ idempotent falls $\sigma\,\sigma = \sigma$)

$$\lfloor x \rfloor [t/x] = t \qquad \lfloor x \rfloor [t/y] = x \quad (y{\neq}x)$$

$$\lfloor f(t_1, .., t_n) \rfloor \sigma = f(t_1\sigma, .., t_n\sigma)$$

$$\lfloor P(t_1, .., t_n) \rfloor \sigma = P(t_1\sigma, .., t_n\sigma)$$

Substitution $A[t/x]$ formal

Endliche Abbildung σ von Variablen in Terme

- $\boldsymbol{\sigma = [t_1, .., t_n/x_1, .., x_n]} \mathrel{\hat{=}} \sigma(x_1)=t_1,\ldots,\ \sigma(x_n)=t_n$
- $\boldsymbol{A\sigma}$: Anwendung von σ auf den Ausdruck A
- $\boldsymbol{\tau\,\sigma}$: Komposition von τ und σ (σ idempotent falls $\sigma\,\sigma = \sigma$)

$\lfloor x \rfloor[t/x]$	$= t$	$\lfloor x \rfloor[t/y]$	$= x$	$(y{\neq}x)$
$\lfloor f(t_1, .., t_n) \rfloor\sigma$	$= f(t_1\sigma, .., t_n\sigma)$	$\lfloor \mathsf{ff} \rfloor\sigma$	$= \mathsf{ff}$	
$\lfloor P(t_1, .., t_n) \rfloor\sigma$	$= P(t_1\sigma, .., t_n\sigma)$			

SUBSTITUTION $A[t/x]$ FORMAL

Endliche Abbildung σ von Variablen in Terme

– $\boldsymbol{\sigma = [t_1, .., t_n/x_1, .., x_n]} \mathrel{\hat{=}} \sigma(x_1){=}t_1, \ldots, \sigma(x_n){=}t_n$

– $\boldsymbol{A\sigma}$: Anwendung von σ auf den Ausdruck A

– $\boldsymbol{\tau\,\sigma}$: Komposition von τ und σ (σ idempotent falls $\sigma\,\sigma = \sigma$)

$\lfloor x \rfloor [t/x]$	$= t$	$\lfloor x \rfloor [t/y]$	$= x$	$(y{\neq}x)$
$\lfloor f\,(t_1, .., t_n) \rfloor \sigma$	$= f\,(t_1\sigma, .., t_n\sigma)$	$\lfloor \mathsf{ff} \rfloor \sigma$	$= \mathsf{ff}$	
$\lfloor P\,(t_1, .., t_n) \rfloor \sigma$	$= P\,(t_1\sigma, .., t_n\sigma)$			
$\lfloor \neg A \rfloor \sigma$	$= \neg A\sigma$	$\lfloor A \wedge B \rfloor \sigma$	$= A\sigma \wedge B\sigma$	
$\lfloor A \vee B \rfloor \sigma$	$= A\sigma \vee B\sigma$	$\lfloor A \Rightarrow B \rfloor \sigma$	$= A\sigma \Rightarrow B\sigma$	
$\lfloor (A) \rfloor \sigma$	$= (A\sigma)$			

Substitution $A[t/x]$ formal

Endliche Abbildung $\boldsymbol{\sigma}$ von Variablen in Terme

- $\boldsymbol{\sigma = [t_1, .., t_n / x_1, .., x_n]} \mathrel{\hat{=}} \sigma(x_1){=}t_1, \ldots, \sigma(x_n){=}t_n$
- $\boldsymbol{A\sigma}$: Anwendung von σ auf den Ausdruck A
- $\boldsymbol{\tau\,\sigma}$: Komposition von τ und σ (σ idempotent falls $\sigma\,\sigma = \sigma$)

$\lfloor x \rfloor [t/x]$	$= t$	$\lfloor x \rfloor [t/y]$	$= x$	$(y{\neq}x)$
$\lfloor f(t_1, .., t_n) \rfloor \sigma$	$= f(t_1\sigma, .., t_n\sigma)$	$\lfloor \mathsf{ff} \rfloor \sigma$	$= \mathsf{ff}$	
$\lfloor P(t_1, .., t_n) \rfloor \sigma$	$= P(t_1\sigma, .., t_n\sigma)$			
$\lfloor \neg A \rfloor \sigma$	$= \neg A\sigma$	$\lfloor A \wedge B \rfloor \sigma$	$= A\sigma \wedge B\sigma$	
$\lfloor A \vee B \rfloor \sigma$	$= A\sigma \vee B\sigma$	$\lfloor A \Rightarrow B \rfloor \sigma$	$= A\sigma \Rightarrow B\sigma$	
$\lfloor (A) \rfloor \sigma$	$= (A\sigma)$			
$\lfloor \forall x \;\; A \rfloor [t/x]$	$= \forall x \;\; A$	$\lfloor \exists x \;\; A \rfloor [t/x]$	$= \exists x \;\; A$	

Substitution $A[t/x]$ formal

Endliche Abbildung σ von Variablen in Terme

- $\boldsymbol{\sigma = [t_1, .., t_n/x_1, .., x_n]} \hat{=} \sigma(x_1){=}t_1, \ldots, \sigma(x_n){=}t_n$
- $\boldsymbol{A\sigma}$: Anwendung von σ auf den Ausdruck A
- $\boldsymbol{\tau\,\sigma}$: Komposition von τ und σ $\quad$ (σ idempotent falls $\sigma\,\sigma = \sigma$)

$\lfloor x \rfloor [t/x]$	$= t$	$\lfloor x \rfloor [t/y]$	$= x$	$(y{\neq}x)$
$\lfloor f(t_1, .., t_n) \rfloor \sigma$	$= f(t_1\sigma, .., t_n\sigma)$	$\lfloor \mathsf{ff} \rfloor \sigma$	$= \mathsf{ff}$	
$\lfloor P(t_1, .., t_n) \rfloor \sigma$	$= P(t_1\sigma, .., t_n\sigma)$			
$\lfloor \neg A \rfloor \sigma$	$= \neg A\sigma$	$\lfloor A \wedge B \rfloor \sigma$	$= A\sigma \wedge B\sigma$	
$\lfloor A \vee B \rfloor \sigma$	$= A\sigma \vee B\sigma$	$\lfloor A \Rightarrow B \rfloor \sigma$	$= A\sigma \Rightarrow B\sigma$	
$\lfloor (A) \rfloor \sigma$	$= (A\sigma)$			
$\lfloor \forall x\ \ A \rfloor [t/x]$	$= \forall x\ \ A$	$\lfloor \exists x\ \ A \rfloor [t/x]$	$= \exists x\ \ A$	
$\lfloor \forall x\ \ A \rfloor [t/y]$	$= \lfloor \forall z\ \ A[z/x] \rfloor [t/y]$	$\lfloor \exists x\ \ A \rfloor [t/y]$	$= \lfloor \exists z\ \ A[z/x] \rfloor [t/y]$	*

*: *$y{\neq}x$, y frei in A, x frei in t, z neue Variable*

SUBSTITUTION $A[t/x]$ FORMAL

Endliche Abbildung σ von Variablen in Terme

– $\boldsymbol{\sigma = [t_1, .., t_n/x_1, .., x_n]} \hat{=} \sigma(x_1){=}t_1, \ldots, \sigma(x_n){=}t_n$

– $\boldsymbol{A\sigma}$: Anwendung von σ auf den Ausdruck A

– $\boldsymbol{\tau\,\sigma}$: Komposition von τ und σ (σ idempotent falls $\sigma\,\sigma = \sigma$)

$\lfloor x \rfloor [t/x]$	$= t$	$\lfloor x \rfloor [t/y]$	$= x$	$(y{\neq}x)$
$\lfloor f\,(t_1, .., t_n) \rfloor \sigma$	$= f\,(t_1\sigma, .., t_n\sigma)$	$\lfloor \mathsf{ff} \rfloor \sigma$	$= \mathsf{ff}$	
$\lfloor P\,(t_1, .., t_n) \rfloor \sigma$	$= P\,(t_1\sigma, .., t_n\sigma)$			
$\lfloor \neg A \rfloor \sigma$	$= \neg A\sigma$	$\lfloor A \wedge B \rfloor \sigma$	$= A\sigma \wedge B\sigma$	
$\lfloor A \vee B \rfloor \sigma$	$= A\sigma \vee B\sigma$	$\lfloor A \Rightarrow B \rfloor \sigma$	$= A\sigma \Rightarrow B\sigma$	
$\lfloor (A) \rfloor \sigma$	$= (A\sigma)$			
$\lfloor \forall x\ \ A \rfloor [t/x]$	$= \forall x\ \ A$	$\lfloor \exists x\ \ A \rfloor [t/x]$	$= \exists x\ \ A$	
$\lfloor \forall x\ \ A \rfloor [t/y]$	$= \lfloor \forall z\ \ A[z/x] \rfloor [t/y]$	$\lfloor \exists x\ \ A \rfloor [t/y]$	$= \lfloor \exists z\ \ A[z/x] \rfloor [t/y]$	*
$\lfloor \forall x\ \ A \rfloor [t/y]$	$= \forall x\ \ \lfloor A[t/y] \rfloor$	$\lfloor \exists x\ \ A \rfloor [t/y]$	$= \exists x\ \ \lfloor A[t/y] \rfloor$	**

*: *$y{\neq}x$, y frei in A, x frei in t, z neue Variable*

**: *$y{\neq}x$, y nicht frei in A oder x nicht frei in t*

Substitution ausgewertet

$\lfloor$(∀y R(+(x,y)) ∧ ∃x x=y) ∧ P(x)$\rfloor$[-(y,4)/x]

Substitution ausgewertet

$$\lfloor(\forall y\ R(+(x,y))\ \wedge\ \exists x\ x{=}y)\ \wedge\ P(x)\rfloor[-(y,4)/x]$$

$$=\lfloor(\forall y\ R(+(x,y))\ \wedge\ \exists x\ x{=}y)\rfloor[-(y,4)/x]$$

$$\wedge\ \lfloor P(x)\rfloor[-(y,4)/x]$$

Substitution ausgewertet

$$\lfloor(\forall y\ R(+(x,y))\ \wedge\ \exists x\ \ x{=}y)\ \wedge\ P(x)\rfloor[-(y,4)/x]$$

$$= \lfloor(\forall y\ R(+(x,y))\ \wedge\ \exists x\ \ x{=}y)\rfloor[-(y,4)/x]$$

$$\wedge\ \lfloor P(x)\rfloor[-(y,4)/x]$$

$$= (\forall z\ \lfloor R(+(x,z))\ \wedge\ \exists x\ \ x{=}z\rfloor[-(y,4)/x])$$

$$\wedge\ P(-(y,4))$$

Substitution ausgewertet

$$\lfloor(\forall y\ R(+(x,y))\ \wedge\ \exists x\ \ x{=}y)\ \wedge\ P(x)\rfloor[-(y,4)/x]$$

$$= \lfloor(\forall y\ R(+(x,y))\ \wedge\ \exists x\ \ x{=}y)\rfloor[-(y,4)/x]$$

$$\wedge\ \lfloor P(x)\rfloor[-(y,4)/x]$$

$$= (\forall z\ \lfloor R(+(x,z))\ \wedge\ \exists x\ \ x{=}z\rfloor[-(y,4)/x])$$

$$\wedge\ P(-(y,4))$$

$$= (\forall z\ \lfloor R(+(x,z))\rfloor[-(y,4)/x]\ \wedge\ \lfloor\exists x\ \ x{=}z\rfloor[-(y,4)/x])$$

$$\wedge\ P(-(y,4))$$

Substitution ausgewertet

$$\lfloor(\forall y\ R(+(x,y))\ \wedge\ \exists x\ \ x{=}y)\ \wedge\ P(x)\rfloor[-(y,4)/x]$$

$$= \lfloor(\forall y\ R(+(x,y))\ \wedge\ \exists x\ \ x{=}y)\rfloor[-(y,4)/x]$$
$$\wedge\ \lfloor P(x)\rfloor[-(y,4)/x]$$

$$= (\forall z\ \lfloor R(+(x,z))\ \wedge\ \exists x\ \ x{=}z\rfloor[-(y,4)/x])$$
$$\wedge\ P(-(y,4))$$

$$= (\forall z\ \lfloor R(+(x,z))\rfloor[-(y,4)/x]\ \wedge\ \lfloor\exists x\ \ x{=}z\rfloor[-(y,4)/x])$$
$$\wedge\ P(-(y,4))$$

$$= (\forall z\ R(+(-(y,4),z))\ \wedge\ \exists x\ \ x{=}z)\ \wedge\ P(-(y,4))$$

Refinement Logic: Prädikatenlogische Regeln

Simuliere $\iota_x^u(A)$ durch $\iota(A[t/x])$

– $\iota(\forall x\ \ A) =$ wahr, wenn $\iota_x^u(A) =$ wahr für alle $u \in \iota(T)$

Refinement Logic: Prädikatenlogische Regeln

Simuliere $\iota_x^u(A)$ durch $\iota(A[t/x])$

– $\iota(\forall x\ A)$ = wahr, wenn $\iota_x^u(A)$ = wahr für alle $u \in \iota(T)$

– $\forall x\ A$ ist gültig, wenn $A[x'/x]$ gültig ist für eine neue Variable x'

- Die Interpretation von x' ist nicht weiter festgelegt
  also muß A für jede Zuordnung eines Objekts u zu x' wahr sein

Refinement Logic: Prädikatenlogische Regeln

Simuliere $\iota_x^u(A)$ durch $\iota(A[t/x])$

– $\iota(\forall x\ \ A)$ = wahr, wenn $\iota_x^u(A)$ = wahr für alle $u \in \iota(T)$

– $\forall x\ \ A$ ist gültig, wenn $A[x'/x]$ gültig ist für eine neue Variable x'

- Die Interpretation von x' ist nicht weiter festgelegt
  also muß A für jede Zuordnung eines Objekts u zu x' wahr sein

– $\iota(\exists x\ \ A)$ = wahr, wenn $\iota(A[t/x])$ = wahr für einen Term t

Refinement Logic: Prädikatenlogische Regeln

Simuliere $\iota_x^u(A)$ durch $\iota(A[t/x])$

– $\iota(\forall x\ A)$ = wahr, wenn $\iota_x^u(A)$ = wahr für alle $u \in \iota(T)$

– $\forall x\ A$ ist gültig, wenn $A[x'/x]$ gültig ist für eine neue Variable x'

- Die Interpretation von x' ist nicht weiter festgelegt
  also muß A für jede Zuordnung eines Objekts u zu x' wahr sein

– $\iota(\exists x\ A)$ = wahr, wenn $\iota(A[t/x])$ = wahr für einen Term t

– $\exists x\ A$ ist gültig, wenn $A[t/x]$ gültig ist für einen Term t

Refinement Logic: Prädikatenlogische Regeln

Simuliere $\iota_x^u(A)$ durch $\iota(A[t/x])$

– $\iota(\forall x\;\; A)$ = wahr, wenn $\iota_x^u(A)$ = wahr für alle $u \in \iota(T)$

– $\forall x\;\; A$ ist gültig, wenn $A[x'/x]$ gültig ist für eine neue Variable x'

  · Die Interpretation von x' ist nicht weiter festgelegt
  also muß A für jede Zuordnung eines Objekts u zu x' wahr sein

– $\iota(\exists x\;\; A)$ = wahr, wenn $\iota(A[t/x])$ = wahr für einen Term t

– $\exists x\;\; A$ ist gültig, wenn $A[t/x]$ gültig ist für einen Term t

Elimination (links)		Introduktion (rechts)	
`allE` i t	$\Gamma,\ \forall x\;\; A,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ \forall x\;\; A,\ A[t/x],\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash \forall x\;\; A$ $\Gamma \vdash A[x'/x]$	`allI` *
`exE` i **	$\Gamma,\ \exists x\;\; A,\ \Delta \vdash C$ $\Gamma,\ A[x'/x],\ \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash \exists x\;\; A$ $\Gamma \vdash A[t/x]$	`exI` t

**: Die Umbenennung $[x'/x]$ kann entfallen, wenn x nicht frei in Γ vorkommt*

***: Die Umbenennung $[x'/x]$ kann entfallen, wenn x nicht frei in C, Γ, Δ vorkommt*

Korrektheit und Vollständigkeit des Kalküls

- **Alle Theoreme sind gültig**
  – C Theorem $\equiv\ \vdash C$ hat vollständigen Beweis
  – Beweis durch strukturelle Induktion über Beweisbaum
  – Blätter sind Regelanwendungen ohne Teilziele (`falseE`, `hypothesis`)
  – Knoten im Beweisbaum sind Regelanwendungen

  $\mapsto$ Es reicht, die "Korrektheit" aller Regeln zu zeigen

Korrektheit und Vollständigkeit des Kalküls

- **Alle Theoreme sind gültig**
  - C Theorem $\equiv \vdash C$ hat vollständigen Beweis
  - Beweis durch strukturelle Induktion über Beweisbaum
  - Blätter sind Regelanwendungen ohne Teilziele (`falseE`, `hypothesis`)
  - Knoten im Beweisbaum sind Regelanwendungen

  $\mapsto$ Es reicht, die “Korrektheit” aller Regeln zu zeigen

- **Alle gültigen Formeln sind beweisbar**
  - Beschreibe systematische Beweisprozedur
    - Erzeuge alle möglichen Substitutionen aller Quantoren (ineffizient!)
  - Zeige: wenn Prozedur nicht terminiert, ist die Formel widerlegbar

  $\mapsto$ Details aufwendig – mehr später bei Tableauxverfahren

Prädikatenlogik – Grenzen

- **Universelle Sprache mit wenigen Vorgaben**
  – Flexibel, aber zu wenig Struktur (nur logische Konnektive)

Prädikatenlogik – Grenzen

- **Universelle Sprache mit wenigen Vorgaben**
  - Flexibel, aber zu wenig Struktur (nur logische Konnektive)
- **Keine Schlüsse über Werte von Termen möglich**
  - Interpretation von Gleichheit (z.B. `4+4=8`) ist nicht festgelegt

Prädikatenlogik – Grenzen

- **Universelle Sprache mit wenigen Vorgaben**
  – Flexibel, aber zu wenig Struktur (nur logische Konnektive)
- **Keine Schlüsse über Werte von Termen möglich**
  – Interpretation von Gleichheit (z.B. `4+4=8`) ist nicht festgelegt
- **Kein Schließen über Datentypen möglich**
  – Welche Struktur und welche Elemente hat ein Datentyp?
  – Interpretation von $\forall x\ x{=}0 \vee x{\geq}1$ nicht festgelegt

Prädikatenlogik – Grenzen

- **Universelle Sprache mit wenigen Vorgaben**
  - Flexibel, aber zu wenig Struktur (nur logische Konnektive)
- **Keine Schlüsse über Werte von Termen möglich**
  - Interpretation von Gleichheit (z.B. `4+4=8`) ist nicht festgelegt
- **Kein Schließen über Datentypen möglich**
  - Welche Struktur und welche Elemente hat ein Datentyp?
  - Interpretation von $\forall x\ x{=}0 \vee x{\geq}1$ nicht festgelegt
- **Erweiterung durch Axiome unpraktisch**
  - \+ alle guten Eigenschaften der Logik bleiben erhalten
  - – Formales Schließen mühsam (zu viele Teilformeln)

Prädikatenlogik – Grenzen

- **Universelle Sprache mit wenigen Vorgaben**
  - Flexibel, aber zu wenig Struktur (nur logische Konnektive)
- **Keine Schlüsse über Werte von Termen möglich**
  - Interpretation von Gleichheit (z.B. `4+4=8`) ist nicht festgelegt
- **Kein Schließen über Datentypen möglich**
  - Welche Struktur und welche Elemente hat ein Datentyp?
  - Interpretation von $\forall x\ x{=}0 \vee x{\geq}1$ nicht festgelegt
- **Erweiterung durch Axiome unpraktisch**
  - \+ alle guten Eigenschaften der Logik bleiben erhalten
  - – Formales Schließen mühsam (zu viele Teilformeln)
- **Erweiterung von Semantik und Inferenzsystem**
  - – Mehr Theorie: Korrektheit, Vollständigkeit etc. muß neu bewiesen werden
  - \+ Formales Schließen "natürlich" und einfacher

Prädikatenlogik – Grenzen

- **Universelle Sprache mit wenigen Vorgaben**
  – Flexibel, aber zu wenig Struktur (nur logische Konnektive)
- **Keine Schlüsse über Werte von Termen möglich**
  – Interpretation von Gleichheit (z.B. `4+4=8`) ist nicht festgelegt
- **Kein Schließen über Datentypen möglich**
  – Welche Struktur und welche Elemente hat ein Datentyp?
  – Interpretation von $\forall$`x x=0` $\vee$ `x`$\geq$`1` nicht festgelegt
- **Erweiterung durch Axiome unpraktisch**
  \+ alle guten Eigenschaften der Logik bleiben erhalten
  – Formales Schließen mühsam (zu viele Teilformeln)
- **Erweiterung von Semantik und Inferenzsystem**
  – Mehr Theorie: Korrektheit, Vollständigkeit etc. muß neu bewiesen werden
  \+ Formales Schließen "natürlich" und einfacher

Mehr in "Automatisierte Logik und Programmierung"